

Varmafræði og inngangur að safneðlisfræði (EFN307G)

Mánudaginn 4. desember 2017, kl. 09:00-12:00. Lokapróf.

Kennari: Viðar Guðmundsson.

Leyfileg hjálpargögn eru skriffæri, vasareiknivél, allar bækur og nótur.

Í prófinu eru 4 verkefni sem öll vega jafnt. Skrifðu skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefni eru lögð fyrir á íslensku og ensku.

1. **Íslenska:** Ljóseindagas hefur ástandsjöfnurnar

$$u = \left(\frac{4\sigma}{c}\right) T^4 \quad \text{og} \quad pV = \frac{U}{3} \quad \text{með} \quad U = uV.$$

- Risjið pV- og TS-myndir af Carnot-hring fyrir ljóseindagasið.
- Finnið V_3 og V_4 fyrir gefið V_1 og V_2 .
- Finnið vinnuna og varmann fyrir jafnhitaferlana, og vinnuna fyrir óvermnu ferlana.
- Reiknið nýtni vélarinnar.

English: A photon gas is described by the equations of state

$$u = \left(\frac{4\sigma}{c}\right) T^4 \quad \text{and} \quad pV = \frac{U}{3} \quad \text{with} \quad U = uV.$$

- Sketch pV- and TS-diagrams of a Carnot-cycle for the photon gas.
- Find V_3 and V_4 for given V_1 and V_2 .
- Find the work and heat for the isotherms, and the work for the adiabats.
- Calculate the efficiency of the engine.

2. **Íslenska:** Eðlisvarmi kopars er $c_p = 30.5(T/T_D)^3$ kJ/(kg·K) við lágt hitastig, þar sem $T_D = 348$ K er hitastig Debye fyrir kopar.

- (a) Hve mikla orku þarf til að hita 10 g af kopar frá 10 K upp í 20 K?
- (b) Hve mikla orku þarf minnst til að kæla koparinn aftur niður í 10 K, ef umhverfishitinn er $T_R = 293$ K?

English: The heat capacity of copper is $c_p = 30.5(T/T_D)^3$ kJ/(kg·K) at low temperature, where $T_D = 348$ K is the Debye temperature for copper.

- (a) How much energy is needed to heat 10 g of copper from 10 K up to 20 K?
- (b) What is the least amount of energy needed to cool the copper again down to 10 K, if the environment temperature is $T_R = 293$ K?

3. **Íslenska:** Athugum þrívítt skammtagas óvíglerkandi fermí- eða bóseinda.

- (a) Reiknið þrýstinginn í bósgasinu fyrir neðan þéttingarhitastigið T_c og skýrið hvers vegna hann er óháður rúmmáli gassins V . Hér má nýta sér að $z \sim 1$.
- (b) Útskýrið hvers vegna ekki þarf að leiðrétta jöfnuna fyrir varmafræðilega mættið Φ_G fyrir fermígasið með því að bæta við þætti grunnástandsins eins og gera þarf fyrir bósgasið.

English: Consider a three-dimensional quantum gas of non-interacting fermions or bosons.

- (a) For the bose gas below the condensation temperature T_c , calculate the pressure of the gas, and explain why it does not depend on the volume V of the system. In this regime we can approximate $z \sim 1$.
- (b) For the fermi gas, explain why we do not need to correct the expression for the grand potential Φ_G by adding the contribution of the ground state, as is required for the bose gas.

4. **Íslenska:** Takmarkaður eða afskorinn hreintóna sveifill er með orkuróf

$$E_n = \epsilon_0 + n\epsilon, \quad \text{með } n = 0, 1, 2, \dots, n_0 - 1.$$

- (a) Finnið meðalorku $\langle E \rangle$ og meðalörvun $\langle n \rangle$ takmarkaða sveifilsins við hitastig T .
- (b) Reiknið óreiðu og varmarýmd sveifilsins.
- (c) Hver er aðfellohegðun varmarýmdarinnar við lágt og hátt hitastig? Hvernig og hvers vegna eru þessar aðfellar á annan veg en fyrir ótakmarkaða hreintóna sveifilinn?

Fyrir þetta dæmi gæti verið gott að muna eftir jöfnunni

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} x^n = \frac{1 - x^{n_0}}{1 - x}.$$

English: A bounded or truncated harmonic oscillator has the energy spectrum

$$E_n = \epsilon_0 + n\epsilon, \quad \text{with } n = 0, 1, 2, \dots, n_0 - 1.$$

- (a) Find the mean energy $\langle E \rangle$ and the mean excitation $\langle n \rangle$ of the truncated oscillator at temperature T .
- (b) Calculate the entropy and the specific heat of the oscillator.
- (c) What is the asymptotic behavior of the specific heat at low and high temperatures? How and why do these limits differ from the results for the unbounded harmonic oscillator?

For this example it could be convenient to remember

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} x^n = \frac{1 - x^{n_0}}{1 - x}.$$