Fermi gas

$$n_Q \equiv \left(\frac{M\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$$

skammta þéttleikinn

Í 3D-kerfum er þéttleikinn oft ekki breytilegur (Rafeindir í málmum)

Þá má koma kerfinu á skammtastika svæðið með

$$\tau < \tau_0 \equiv \left(\frac{2\pi\hbar^2}{M}\right) n^{2/3}$$

Gas með $\tau \ll \tau_0$ nefnist kulgas (degenerate gas) og hlýgas fyrir $\tau \gg \tau_0$

Fermi

Fermi gas er kulgas þegar

$\tau \ll \varepsilon_F$

Þá eru svigrúm neðan ε_F nostum alveg fullsetin og ofan tóm.

Við munum sjá að rafeindagas í flestum málmum er kulgas við herbergishita

$\boxed{\text{2D Rafeindakerfi eru almennt með breytilegan þéttleika}}$

Fermieindir í hvítum dvergum, ^3He og kjarnefni eru kulgas við venjulegar aðstæður

---

Grunnástand í 3D, rafeindir

Teningur $V = L^3$

Fermiorkan ε_F er orka efsta setna orkustigsins við $\tau = 0$

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi n_F}{L}\right)^2$$

$$N = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} n_F^3$$

hæsta setna n-ið

$n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$

2 spunastefnur

$n_x \cdot n_y \cdot n_z$ jákvæðar heiltölur

Heildarfjöldi rafeinda

$$N = \frac{\pi}{3} n_F^3$$

$$\rightarrow n_F = \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{1/3}$$

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3} \equiv \tau_F$$

þéttleiki $\frac{N}{V}$

sambærilegt Fermi hitastig

Heildarorkan í grunnástandi

$$\varepsilon_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$$

$$U_0 = 2\sum_{n\le n_F}\varepsilon_n = 2\cdot\frac{1}{8}\cdot 4\pi\int_0^{n_F} dn\, n^2\,\varepsilon_n$$

$$= \frac{\pi^3}{2m}\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\int_0^{n_F} dn\, n^4$$

$$= \frac{\pi^3}{10m}\left(\frac{\hbar^2}{L}\right) n_F^5 = \frac{3\hbar^2}{10m}\left(\frac{\pi n_F}{L}\right)^2 N = \frac{3}{5}N\varepsilon_F$$

$$\boxed{\frac{U_0}{N} = \frac{3}{5}\varepsilon_F}$$

fyrir fast N eykst $\frac{U_0}{N}$ þegar rúmmálið minnkar

lítur út eins og fráhrinding milli eindanna, þó hér sé engin víxlverkun

Ástandaþéttleiki

Höfum reiknað meðaltöl

$$\langle X\rangle = \sum_n f(\varepsilon_n,\tau,\mu)\, X_n$$

n: skammtatala svigrúms

Við höfum stundum breytt þessu í

$$\langle x\rangle = \int d\varepsilon\, \mathcal{D}(\varepsilon)\, f(\varepsilon,\tau,\mu)\, X(\varepsilon)$$

heildi yfir ε í stað summu yfir n

↳ Ástandaþéttleika
(þéttleiki svigrúma)

Tökum dæmi

Áður fékkst

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}$$

hugsum svigrúmin þétt (samfelld) og skrifum

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N(\varepsilon)}{V}\right)^{2/3}$$

til þess að finna

$$N(\varepsilon) = \frac{V}{3\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\varepsilon^{3/2}$$

$$\ln N = \frac{3}{2}\ln\varepsilon + \text{fasti}$$

$$\hookrightarrow \frac{dN}{N} = \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

⑤

$$dN = \frac{3N}{2\varepsilon}\,d\varepsilon$$ er fjöldi sveiflumáta með orku milli ε og $\varepsilon + d\varepsilon$

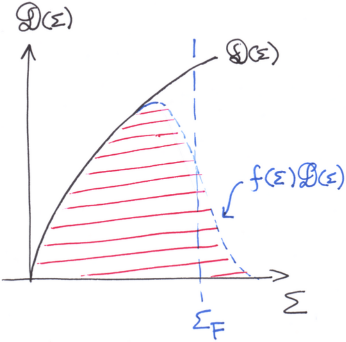
Allt háð vídd kerfisins 3D hér

$$\longrightarrow \mathcal{D}(\varepsilon) \equiv \frac{dN}{d\varepsilon} = \frac{3N(\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

er þéttleiki sveiflumáta

$$\frac{N(\varepsilon)}{\varepsilon} = \left(\frac{V}{3\pi^2}\right)\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}$$

$$\longrightarrow \boxed{\mathcal{D}(\varepsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}}$$



$$N = \int_0^\infty d\varepsilon\, \mathcal{D}(\varepsilon) f(\varepsilon, \tau, \mu)$$

$$U = \int_0^\infty d\varepsilon\, \varepsilon\, \mathcal{D}(\varepsilon) f(\varepsilon, \tau, \mu)$$