Dreifing Plancks

sáum að við þurftum að bæta við $1/N!$-lið í kórsummuna Z_N fyrir fjöl atóma gasið

$\updownarrow$

$\boxed{\text{eins eindir}}$

Kjörgas

Óvíxlverkandi atóm á sígilda stikasvæðinu (classical regime)

$$\frac{n}{n_Q} \ll 1 \quad , \quad n_Q = \left(\frac{M\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$$

Síðar kemur lýsing með samhverfu eiginleikunum fjöleinda bylgjufallsins

(fermi, Bós-eindir $\Leftrightarrow$ spuni)

þar sem ekki þarf að bæta við þessum $N!$-lið

Áður skoðum við Planck-dreifing sem á við Bóseindir (spuni 0, 1, ...) þar sem ekki verður „þétting"

Góð lýsing fyrir ljóseindir í „holi" og hljóðeindir í kristalli

Standard rafsegulbylgjur í holi, eða sveiflur í kristallagrind má lýsa með hreintóna sveifli (HO)

Sveifluháttur (mode) með tíðni $\omega = 2\pi f$ hefur skammtaða orkurófið

$$\varepsilon_s = s \cdot \hbar\omega$$

(Við sleppum 0-punktsorkunni $\frac{1}{2}\hbar\omega$.)

Nú erum við að lýsa fjöleinda kerfi:

s: fjöldi ljós- eða hljóðeinda í sveifluhætti $\hbar\omega$, eða hætti (mode) $\hbar\omega$

Kórsumman er

$$Z = \sum_{s=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{s\hbar\omega}{\tau}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{\tau}\right)}$$

og því líkindin fyrir
s - ljós- eða hljóðeindum

$$P(s) = \frac{\exp\left(-\frac{s\hbar\omega}{\tau}\right)}{Z}$$

Meðal fjöldi ljóseinda er

$$\langle s \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} s\, P(s)$$

$$= Z^{-1} \sum_{s=0}^{\infty} s\, e^{-s\hbar\omega/\tau}$$

athugum að með $y = \frac{\hbar\omega}{\tau}$

$$\sum_{s=0}^{\infty} s\, e^{-sy} = -\frac{d}{dy} \boxed{\sum_{s=0}^{\infty} e^{-sy}}$$

$$= -\frac{d}{dy} \left\{ \frac{1}{1-e^{-y}} \right\}$$

summað upp

$$= \frac{e^{-y}}{\{1-e^{-y}\}^2}$$

$$\to \langle s \rangle = \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}}$$

eða

$$\boxed{\langle s \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{\tau}} - 1}}$$

Meðal fjöldi ljóseinda
í hætti $\hbar\omega$ í holi

Dreifing Plancks

Geislun

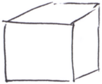
Meðal orkan í hætti er

$$\boxed{\langle \varepsilon \rangle = \langle s \rangle \hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/\tau} - 1}}$$

fyrir sígilt kerfi, þ.e.

$\tau \gg \hbar\omega$ fæst

$$\langle \varepsilon \rangle \approx \tau$$



Teningshol, málmur

Holið getur haft óendanlega marga hætti

Finnast sem lausn á bylgjujöfnunni

$$E_x = E_{x0} \sin(\omega t) \cos\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right)$$

$$E_y = E_{y0} \sin(\omega t) \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right)$$

$$E_z = E_{z0} \sin(\omega t) \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right)$$

styrkur rafsviðs, vigursvið

þverill

Jaðarskilyrði við veggi holsins $\hat{n} \times \bar{E} = 0 \rightarrow \hat{n} \parallel \bar{E}$

Engar hleðslur inni í holi $\rightarrow \bar{\nabla} \cdot \bar{E} = 0$

$$\rightarrow \bar{E}_0 \cdot \bar{n} = 0$$

(n_x, n_y, n_y)

umsetning í bylgjujöfnuna

$$c^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}E_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2}E_i$$

$$\to c^2\pi^2\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right) = \omega^2 L^2$$

skilgreinum $n \equiv \sqrt{\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)}$

$$\to \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

því er heildar meðalorka ljóseindanna í holinu

$$U = \sum_n \langle \varepsilon_n \rangle = \sum_n \frac{\hbar\omega_n}{e^{\frac{\hbar\omega_n}{\tau}}-1}$$

áttungur   2 skautunarstefnur

$$= \frac{1}{8}\cdot 2\cdot\int_0^\infty 4\pi n^2\,dn\,\frac{\hbar\omega_n}{e^{\frac{\hbar\omega_n}{\tau}}-1}$$

$$= \frac{\pi^2\hbar c}{L}\int_0^\infty dn\,\frac{n^3}{e^{\frac{\hbar c n\pi}{L\tau}}-1}$$

$$= \frac{\pi^2\hbar c}{L}\left(\frac{\tau L}{\pi\hbar c}\right)^4\int_0^\infty dx\,\frac{x^3}{e^x-1}$$

þ.s. $\frac{\hbar c n\pi}{L\tau} = x$

$$\boxed{\frac{U}{V} = \frac{\pi^2}{15\hbar^3c^3}\tau^4}$$

$V = L^3$ Stefan-Boltzmann

því (GR: 3.411.1)

$$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{e^{\mu x}-1} = \frac{1}{\mu^{\nu}}\,\Gamma(\nu)\,\zeta(\nu)$$

með $\Re\mu > 0$, $\Re\nu > 1$

og hér $\nu = 4$, $\mu = 1$

$$\Gamma(4) = 6 = 3!$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$ Riemann Zeta fallið

Summan til að finna $\frac{U}{V}$ var yfir alla hætti „n".

$\boxed{\text{Oft er heppilegra að breyta henni í summu yfir orku}}$
eða tíðni

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

notum $n = \frac{\omega L}{\pi c}$, $dn = \frac{L}{\pi c}\,d\omega$

$$U = \frac{\pi^2\hbar c}{L}\int_0^\infty dn\,\frac{n^3}{e^{\frac{\hbar c n\pi}{L\tau}}-1}$$

$$= \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty d\omega\,\frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{\tau}}-1}$$

$$= \int_0^\infty d\omega\, u_\omega$$

með

$$\boxed{u_\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\,\frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{\tau}}-1}}$$

róf þéttleiki