Þrýstingur

Þrýstingur p rúmmáls gas V með N sameindum er háður hitastigi T í gegnum ástandsjöfnu

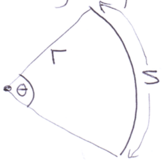
$$p = f(T, V, N)$$

Viljum skilja hér hvernig við getum leitt líkum að jöfnunni fyrir kjörgas

$$pV = Nk_BT$$

Rúmhorn

Fyrir venjulegt horn $\theta = \frac{s}{r}$



Heill hringur $2\pi = \frac{\overbrace{2\pi r}}{r}$

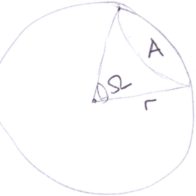
Til er rúmhorn

$$\Omega = \frac{A}{r^2} \rightarrow$$

Stærsta rúmhornið er

$$4\pi = \frac{4\pi r^2}{r^2}$$

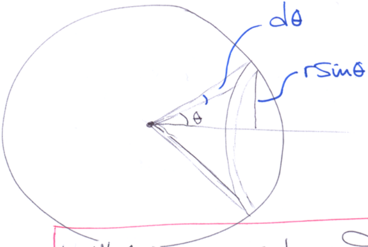
A_{max}



Fjöldi sameinda í vissa átt á vissri ferð

Hluti sameinda sem ferðast í $d\Omega$ er $\frac{d\Omega}{4\pi}$

rúmhornið milli θ og $\theta + d\theta$



$$d\Omega = \frac{2\pi \cdot r\sin\theta \cdot r\,d\theta}{r^2} = 2\pi \sin\theta\, d\theta$$

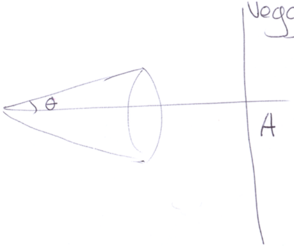
ferðadreif.

$$\rightarrow \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2}\sin\theta \cdot d\theta$$

$\frac{N}{V}$

→ Þéttleiki sameinda með $v \in [v, v+dv]$ og $\theta \in [\theta, \theta + d\theta]$ $\quad n f(v)\,dv\, \frac{1}{2}\sin\theta\, d\theta$

Hugsum okkur rúmhornið mælt um normalvigur veggs



rúmmálið sem hittir þvert á vegginn

$$A\,v\,dt\cdot\cos\theta$$

→ fjöldi sameinda sem hittir á vegginn á dt

$$A\,v\,dt\cos\theta\; n f(v)dv\,\tfrac{1}{2}\sin\theta\, d\theta$$

→ fjöldi sameinda sem stekkur á einingarfleti veggsins á tímaeiningu

$$\boxed{v\cos\theta\; n f(v)\,dv\,\tfrac{1}{2}\sin\theta\, d\theta}$$

Reiknum þrýsting á vegg íláts

Sérhver sameind sem skellur á veggnum verður fyrir skriðþungabreytingu, þvert á hann

atlægi

$2mv\cos\theta$

$$\rightarrow p = \int_0^\infty dv \int_0^{\pi/2} d\theta \underbrace{\left(v\cos\theta \cdot n f(v)\,\frac{1}{2}\sin\theta\right)}_{\text{fjöldi sameinda sem skellur á flatareiningu og tímaeiningu undir horni } \theta \text{ með ferð } v} \overbrace{\left(2mv\cos\theta\right)}^{\text{atlægi}}$$

$$= mn\int_0^\infty dv\, v^2 f(v) \overbrace{\int_0^{\pi/2} d\theta \cos^2\theta \sin\theta}^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} nm\langle v^2\rangle$$

fjöldi sameinda

$N = nV$

þéttleiki —"—

rúmmál kerfis

Áður fékkst $\langle v^2 \rangle = \frac{3k_BT}{m}$

$\rightarrow pV = \frac{1}{3} Nm \langle v^2 \rangle$

$\rightarrow \boxed{pV = Nk_BT}$ ástandsjafna kjörgass

jafngilt

$p = \frac{N}{V} k_BT = nk_BT$

fjöldi móla

fjöldi sameinda í móli

eða $pV = Nk_BT = (n_m N_A) k_BT$

$= n_m \underbrace{(N_A k_B)}_{R} T = n_m R T$

$R = 8.314 \frac{J}{Km}$

$$\boxed{pV = Nk_BT}$$

p er óháður massa sameinda!

Tengsl þrýstings og hreyfiorku

Ein sameind með ferð v
hefur hreyfiorku

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

heildar hreyfiorka á einingarrúmmál

$$u = n\int_0^\infty dv\, \frac{1}{2}mv^2 f(v) = \frac{1}{2}nm\langle v^2\rangle$$

Áður fékkst $\quad p = \frac{1}{3}nm\langle v^2\rangle$

$$\longrightarrow \boxed{p = \frac{2}{3}u}$$

Lögmál Daltons

Blanda gasa í varmajafnvægi

þéttleiki gass i

Hlutþrýstingur gass i

$$p = nk_BT = \left\{\sum_i n_i\right\} k_BT$$

$$= \sum_i n_i k_B T = \sum_i p_i$$

Útstreymi sameinda (Effusion)

Leki úr íláti um smátt gat

Lítill leki sem breytir ekki

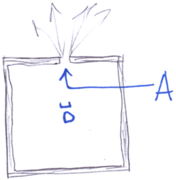
jafnvægisástandi gassins

hraðinn er $\sim \frac{1}{\sqrt{m}}$

> Stærð gatsins verður að vera miklu smærri en meðalfjarlægðin λ milli árekstra

Flæði

$$\text{flæði sameinda} = \frac{\text{fjöldi sameinda}}{\text{flötur} \times \text{tími}} = \Phi$$



notum því: fjöldi sameinda á einingar flöt og tíma, stefnu og ferð

$$v\cos\theta \cdot n f(v)\,dv\,\frac{1}{2}\sin\theta\,d\theta$$

$$\Phi = \int_0^\infty dv \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot v\cos\theta \cdot n f(v)\,\frac{1}{2}\sin\theta$$

$$= \frac{n}{2}\int_0^\infty dv\, v f(v) \overbrace{\int_0^{\pi/2} d\theta \cos\theta \sin\theta}^{1/2} = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$$

$$\longrightarrow \boxed{\Phi = \frac{1}{4} n \langle v \rangle}$$

notum $p = n k_B T \rightarrow n = \frac{p}{k_B T}$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}}$$

$$\rightarrow \boxed{\Phi = \frac{p}{\sqrt{2\pi m k_B T}}}$$

eins og lögmál Grahams segir fyrir (reynslulögmál)

fjöldi sameinda sem sleppur á einingartíma er útstreymishraðinn (effusion rate)

$$\Phi A = \frac{pA}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

Ef $D \ll \lambda$ þá verður engin (thermalization, varmaútjöfnun) við gatið $\rightarrow$ líklegra að sameindir með háan hraða sleppi

$\boxed{\text{Útstreymi, } D \ll \lambda, \rightarrow \text{ ekki dreifing Maxwells-Boltzmanns fyrir sameindirnar sem streyma út}}$

líkindi þess að sameind hitti á gatið

$$\sim v \cos\theta \, n f(v) dv \, \frac{1}{2} \sin\theta \, d\theta$$

$$\sim v f(v)$$

<u>ekki jafnmiklar líkur</u> fyrir öll gildi á v

→ útstreymið leiðir til ferðadreifingar

$$\sim v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}$$

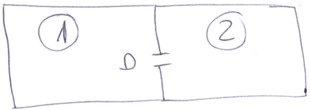
fyrir gas í jafnvægi er ~~meðal~~ orkan (hreyfiorkan)

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

en í útstreymi

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m \frac{\int_0^\infty dv\, v^2 v^3 e^{-\frac{mv^2}{k_B T}}}{\int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{k_B T}}}$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{2 k_B T}{m} \right) \frac{\int_0^\infty du\, u^2 e^{-u}}{\int_0^\infty du\, e^{-u} u} = \boxed{2 k_B T}$$



Ef $D \gg \lambda \longrightarrow$ jafnvægi $p_1 = p_2$

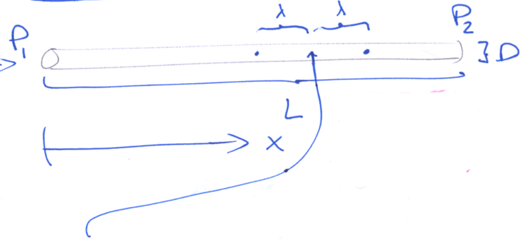
Ef $D \ll \lambda \longrightarrow$ jafnvægi þegar $\Phi_1 = \Phi_2$

En

$$\Phi = \frac{p}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \longrightarrow \frac{p_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{p_2}{\sqrt{T_2}}$$

Knudsen hrifin

Knudsen flæði



Langt rör með lágum þrýstingi (flestir árekstrar við pípuvegg)

$\rightarrow \lambda \gg D$

Notum $\Phi = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$

frá síðasta árekstri

$$\Phi \simeq \frac{\langle v \rangle}{4} \left\{ n(x-D) - n(x+D) \right\}$$

að næsta árekstri

(, en D?)

$$p = \frac{1}{3} n m \langle v^2 \rangle$$

$$\Phi(x) \simeq \frac{3}{4m} \frac{\langle v \rangle}{\langle v^2 \rangle} \left\{ \underbrace{p(x-D) - p(x+D)}_{\simeq\, -2D \frac{dp}{dx}} \right\}$$

Φ verður að vera fast eftir pípunni (varðveisla) í stöðugu ástandi

$$\frac{dp}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{L}$$

→ Massaflæðið $\dot{M} = m \Phi A = m \Phi \frac{\pi D^2}{4}$

því fæst að

$$\dot{M} \simeq \frac{3}{8} \overbrace{\frac{\langle v \rangle}{\langle v^2 \rangle}}^{\frac{8}{3\pi \langle v \rangle}} \pi D^3 \frac{P_1 - P_2}{L}$$

$$\rightarrow \quad \dot{M} \simeq \frac{D^3}{\langle v \rangle} \frac{P_1 - P_2}{L} = D^3 \sqrt{\frac{\pi m}{8 k_B T}} \frac{P_1 - P_2}{L}$$