Óreiða og hitastig

Lokað kerfi

Föst orka $\delta U/U \ll 1$

Fastur eindafjöldi $\delta N/N \ll 1$

. . . .

Grunnforsenda

„Öll smásæ ástönd sama stórsæja lokaða kerfisins eru jafnlíkleg"

Litla kórsafnið

(micro canonical ensemble)

Lokað kerfi, öll g-ástöndin eru jafn líkleg

$\rightarrow$ líkindi $P(s) = \frac{1}{g}$

Hugsum okkur safn g eins kerfa hvert í einu ástandi af g, litla kórsafnið

öll með sömu stórsæju eiginleikana

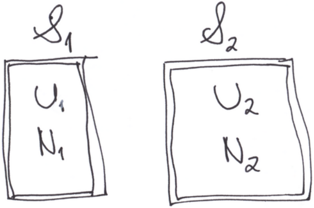
meðaltal — kórmeðaltal

$$\langle x \rangle = \sum_s X(s) P(s)$$

$$= \sum_s X(s) \frac{1}{g}$$

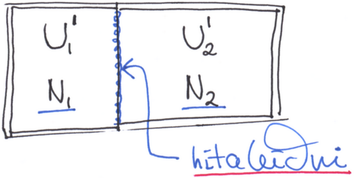
Litlagasta samskipan

Tvö lokuð kerfi



.....Tengd saman

í $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$



Engin skipti á eindum hér

föst alla í $\mathcal{S}$

fyrir spunakerfið, voru N_1 og N_2 fastar en S_1 og S_2 geta breyst við tenginu

$$U(s) = U_1(S_1) + U_2(S_2) = -2mB(S_1+S_2)$$
$$= -2mBs$$

$$s = S_1 + S_2$$
$$N = N_1 + N_2$$

fyrir $\mathcal{S}$ er margfeldnifallið

$$g(N,s) = \sum_{S_1} g_1(N_1,S_1)\, g_2(N_2, s-S_1)$$

Ef $N_1 < N_2 \rightarrow s_1 \in \left[-\frac{N_1}{2}, \frac{N_1}{2}\right]$

samstæðan er mengi allra ástanda með tiltekin s_1 og s_2

Heildarfjöldi ástanda í einni samstæðu er

$$g_1(N_1, s_1)\, g_2(N_2, s_2)$$

$$= g_1(N_1, s_1)\, g_2(N_2, s - s_1)$$

samstæðan sem getur hæsta gildið á $g_1 g_2$ er nefnd líklegasta samstæðan

Hún fæst fyrir $s_1 = \hat{s}_1$ og $\hat{s}_2 = s - \hat{s}_1$

fyrir stórt kerfi verður $g_1 g_2$ mjög skarpt fall fyrir s_1

stærðir eiginleikar kerfis eru vel ákvarðaðir út frá eiginleikum líklegustu samstæðunni

meðaltöl yfir líklegustu samstæðuna eru nefnd varmajafnvægis meðaltöl

notuð í stað kör meðaltala fyrir stærri kerfi

Varmafræðilegt jafnvægi

Tvö lokuð kerfi tengd saman um hitaleiðandi vegg (stórsæ kerfi)

$$U = U_1 + U_2$$

$$g(N,U) = \sum_{U_1} g_1(N_1,U_1)\, g_2(N_2, U-U_1)$$

stærsti liðurinn lýsir eiginleikum kerfisins í varmajafnvægi

$$dg = \left(\frac{\partial g_1}{\partial U_1}\right)_{N_1} g_2\, dU_1 + g_1 \left(\frac{\partial g_2}{\partial U_2}\right)_{N_2} dU_2 = 0$$

$$dU_1 + dU_2 = 0$$

deilum með $g_1 g_2$ og notum $dU_2 = -dU_1$

$$\frac{1}{g_1}\left(\frac{\partial g_1}{\partial U_1}\right)_{N_1} = \frac{1}{g_2}\left(\frac{\partial g_2}{\partial U_2}\right)_{N_2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{\partial \ln g_1}{\partial U_1}\right)_{N_1} = \left(\frac{\partial \ln g_2}{\partial U_2}\right)_{N_2}$$

Skilgreinum óreiðu

$$\boxed{\sigma(N,U) \equiv \ln g(N,U)}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial U_1}\right)_{N_1} = \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial U_2}\right)_{N_1}}$$

Varmajafnvægi

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial U_1}\right)_{N_1} = \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial U_2}\right)_{N_2}$$

$$\Downarrow$$

$$T_1 = T_2$$

skilgreining á hitastigi

Náttúrulegur hitaskali

$$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial U}\right)_N$$

en með $k = 1{,}381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Joules}}{\text{Kelvin}}$

Boltzmann fastandum

fæst

$$\frac{1}{T} = k_B\left(\frac{\partial \sigma}{\partial U}\right)_N = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_N$$

þar sem $\tau = k_B T$

$[\tau] \sim$ orka (vídd orka)

og $\underline{S} = k_B \sigma$ varmafræðileg óreiða

óháð/bundin óreiða

$[\sigma] \sim 1$

víddarlaus skilgreining á óreiðu

Óreiða

U_1, T_1, σ_1^i $\qquad$ U_2, T_2, σ_2^i

$T_1 > T_2$

$U_1 - \delta U$, σ_1^f $\qquad$ $U_2 + \delta U$, σ_2^f

Jafnvægisástandið (samskipanin) hefur hæst g → hæst σ

$\boxed{\text{$\sigma$ vex þegar orka (varmi) streymir frá heita til kalda kerfisins}}$

Heildar breyting óreiðu

$$\Delta\sigma = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial U_1}\right)_{N_1}(-\Delta U) + \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial U_2}\right)_{N_2}(\Delta U)$$

$$= \left\{-\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right\}\Delta U > 0$$

$\boxed{\text{Ef } \tau_1 > \tau_2}$

Vaxandi óreiða

Tvö kerfi í varmasnertingu

$$U = U_1 + U_2$$

$$g(U) = \sum_{U_1} g_1(U_1)\, g_2(U-U_1)$$

Einn liður í summunni, segjum

$$g_1(U_{10})\, g_2(U-U_{10}) \qquad (\text{þ.e. } U_1=0)$$

er fyrir kerfin strax eftir snertingu (engin orka flust)

síðan bætast margir jákvæðir liðir við

$$\boxed{\to g \quad \text{vex}}$$

Í raun

$$\boxed{\begin{aligned}(g_1 g_2)_{max} &= g_1(\hat{U}_1)\, g_2(U-\hat{U}_1) \\ &\gg g_1(U_{10})\, g_2(U-U_{10})\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma^f &\simeq \ln(g_1 g_2)_{max} \\ &\geqslant \sigma^i = \ln(g_1 g_2)_0\end{aligned}}$$

Tvö spuna kerfi

í varmatengslum

funktið áður fyrir stórt kerfi

$$g_1(N_1, s_1)\, g_2(N_2, s - s_1) = g_1(0)\, g_2(0) \exp\left\{ -\frac{2s_1^2}{N_1} - \frac{2(s-s_1)^2}{N_2} \right\}$$

útgildi

$$\frac{\partial}{\partial s_1}\left\{ \ln\left(g_1(N_1 s_1)\, g_2(N_2, s - s_1)\right)\right\} = -\frac{4s_1}{N_1} + \frac{4(s-s_1)}{N_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1^2}\left\{ \cdots \right\} = -4\left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right) < 0$$

$\rightarrow$ útgildi er max-gildi þegar

$$\frac{s_1}{N_1} = \frac{s - s_1}{N_2} = \frac{s_2}{N_2}$$

þegar hlutfallslegur spunamismunur kerfanna er jafn

Hvaða áhrif hefur lítið frávik

$$S_1 = \hat{S}_1 + \delta \quad \text{og} \quad S_2 = \hat{S}_2 - \delta$$

geta líklegustu skipanina

sjá bls. 38 í bók

$$g_1(N_1 \hat{s}_1 + \delta)\, g_2(N_2, \hat{S}_2 - \delta) = (g_1 g_2)_{max} \exp\left(-\frac{2\delta^2}{N_1} - \frac{2\delta^2}{N_2}\right)$$

$$\boxed{\text{Ef} \quad N_1 = N_2 = 10^{22} \quad \text{og} \quad \delta = 10^{12} \rightarrow \frac{\delta}{N_1} \simeq 10^{-10}}$$

þá fæst $\quad 2\delta^2/N_1 = 200 \quad$ og

$$\exp(\quad) = e^{-400} \simeq 10^{-174}$$

$\rightarrow$ <u>Hverfandi</u> líkur fyrir flökkti upp á 10 milljarðastahluta $\delta/N_1 \sim 10^{-10}$

venjulegt flókkt finnst aðeins í smáum kerfum,

þ.s. N ~ 10 í smáu kerfi í tengslum við stórt kerfi

'Opið opið eða lokað kerfi

Allt sem við fjöllum um

Hvernig má lýsa opnum kerfum?

Dæmi