

## 09.21.62 Skammtafræði 2

### Tíma- og heimadæmi

Kennari: Viðar Guðmundsson

Til umfjöllunar 23. mars:

1. Kerfi óvíxlverkandi bóseinda er lýst með Hamiltonvirkjanum

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k.$$

Reiknið

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \exp(iHt/\hbar)\psi_s(\mathbf{x})\exp(-iHt/\hbar),$$

þar sem

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \mathbf{x} | k \rangle a_k.$$

2.  $a_k$  og  $a_k^\dagger$  eru eyðingar og sköpunarvirkjar fyrir fermíeindir með  $k = 1, 2$ . Við skilgreinum nýja virkja með

$$\begin{pmatrix} u^* & -v^* \\ v^* & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^\dagger \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^\dagger \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^\dagger \\ b_2 \end{pmatrix}$$

með

$$|u|^2 + |v|^2 = 1, \quad uv^* - u^*v = 0.$$

- (a) Sannreynið að  $b_k^\dagger$  og  $b_k$  séu fermívirkjar.

- (b) Finnið  $c \in \mathbb{C}$  þannig að

$$\begin{aligned} b_1^\dagger &= U a_1^\dagger U^\dagger & b_1 &= U a_1 U^\dagger \\ b_2^\dagger &= U a_2 U^\dagger & b_2 &= U a_2^\dagger U^\dagger, \end{aligned}$$

þar sem

$$U = \exp \{ c(a_1^\dagger a_2^\dagger - a_2 a_1) \}.$$