berum því saman

hornalínu stök

$$\delta\rho^{th}_{\alpha\beta} \simeq \bar{\delta}_{\alpha\beta}\, f'(E^0_\alpha)\langle\alpha|\delta V|\beta\rangle$$

$$+ (1-\bar{\delta}_{\alpha\beta})\frac{1}{\hbar}\,\frac{n_\beta - n_\alpha}{\omega_\beta - \omega_\alpha}\langle\alpha|\delta V|\beta\rangle$$

en þegar kveikt var á truflunni

$$\delta\rho_{\alpha\beta}(t) = \frac{1}{\hbar}\left\{\frac{n_\beta - n_\alpha}{\omega_\beta - \omega_\alpha + i\eta}\right\} e^{\eta t}\langle\alpha|\delta V|\beta\rangle$$

engin hornalínu stök

Skammtafræði II 1991

Opið, án ~~fastra~~ tímamarka

mismunandi myndir

samlagning hverfiþunga

Tensor virkjar <-> Wigner-Eckhardt

Eins eindir

Seinni skömmtun <-> Greensföll

Rafsegulsvið <-> kvarðasamhverfur

spunahorna

Landau stig

Sjálfgeislun

Dreififræði -> Lippmann Schwinger...

Greensföll

svörunarföll

Myndir

t.d. G III

Schrödinger-mynd

notuð hingað til

ástönd þróast í tíma

$$i\hbar d_t |\Psi_s(t)\rangle = H |\Psi_s(t)\rangle$$

Flestir virkjar eru ekki tímaháðir

$$|\Psi_s(t)\rangle = U(t,t_0)\,|\Psi_s(t_0)\rangle$$

tímaþróunarvirkinn

Ef H er ekki beint fall af t
þá ~~fæst~~

$$|\Psi_s(t)\rangle = \underbrace{e^{-iH(t-t_0)/\hbar}}_{U(t,t_0)} |\Psi_s(t_0)\rangle$$

p, q : ekki tímaháðir

Heisenberg-mynd

$$|\Psi_H(t)\rangle \equiv e^{iH(t-t_0)/\hbar} |\Psi_s(t)\rangle$$

þ.a.

$$i\hbar d_t |\Psi_H(t)\rangle = e^{iH(t-t_0)/\hbar}\left[-H + i\hbar\partial_t\right]|\Psi_s(t)\rangle$$

$$= 0$$

$\rightarrow$ $|\Psi_H\rangle$ þróast ekki í tíma

en hvað með virkja?
athugum fylkisstak

$$\langle\Psi_s(t)|\,O_s\,|\Phi_s(t)\rangle \equiv M(t)$$

$$= \langle\Psi_H|\,U^{+}(t,t_0)\,O_s\,U(t,t_0)\,|\Phi_H\rangle$$

$$= \langle\Psi_H|\,O_H(t)\,|\Phi_H\rangle = M(t)$$

$$\rightarrow \quad O_H(t) = U^+(t,t_0)\, O_s\, U(t,t_0)$$

og því

$$i\hbar d_t O_H(t) = -U^+(t,t_0)\, H\, O_s\, U(t,t_0) + U^+(t,t_0)\, O_s\, H\, U(t,t_0)$$

$$= U^+(t,t_0)\left[O_s, H\right] U(t,t_0)$$

$$= \left[O_H, H\right]$$

Í stað Schrödinger jöfnunnar fyrir ástönd kemur hreyfingarjafna fyrir virkja

$$\updownarrow$$

meiri formleg samlíking við sígilda eðlisfræði

Ef H_s er tímaóháð og $[A_s, H_s] = 0$

$$\rightarrow \quad A_H(t) = A_s$$

A_s er hreyfingarfasti

$\rightarrow$ ef H_s er tímaóháð $\quad H_s = H_H = H$

Ef A_s er ekki tímaóháð þá gildir

$$\boxed{i\hbar d_t A_H(t) = \left[A_H(t), H_H(t)\right] + i\hbar\left(d_t A_s(t)\right)_H}$$

dæmi

$$H_s(t) = \frac{P_s^2}{2m} + V(X_s, t)$$

$$\rightarrow \quad H_H(t) = \frac{P_H^2}{2m} + V(X_H, t)$$

og því

$$d_t X_H(t) = \frac{1}{m} P_H(t)$$

$$d_t P_H(t) = -\partial_x V(X_H, t)$$

greinileg útvíkkun á Ehrenfest...

Samlíking við sígilda eðlisfr.

Víxlverkunar-mynd (Interaction picture)

(t.d. Quantum theory of many particle systems
Fetter and Walecka, Mac-Graw Hill (1971)
Nonrelativistic QM, A.Z. Capri Benjamin Cummings (1985))

Einnig kölluð Dirac-mynd

Hefur reynst mjög vel fyrir truflana reikning í tímaháðum kerfum

$$H = H_0 + H_1 \qquad H_0 \text{ tímaóháð}$$

þ.s. H_0 einn sér leiddi til kerfis ~~með~~ þekktar lausnir

Skilgreina:

$$|\Psi_I(t)\rangle \equiv e^{iH_0 t/\hbar} |\Psi_S(t)\rangle$$

á milli Heisenberg og Schrödinger mynda → bæði ástönd og virkjar þróast í tíma.

$$i\hbar d_t |\Psi_I(t)\rangle = -H_0 e^{iH_0 t/\hbar} |\Psi_S(t)\rangle + e^{iH_0 t/\hbar} i\hbar d_t |\Psi_S(t)\rangle$$

$$\rightarrow \boxed{i\hbar d_t |\Psi_I(t)\rangle = H_1(t) |\Psi_I(t)\rangle}$$

með

$$H_1(t) = e^{iH_0 t/\hbar} H_1 e^{-iH_0 t/\hbar}$$

$$\langle \Psi_S(t) | O_S | \Phi_S(t) \rangle$$

$$= \langle \Psi_I(t) | e^{iH_0 t/\hbar} O_S e^{-iH_0 t/\hbar} | \Phi_I(t) \rangle$$

$$= \langle \Psi_I(t) | O_I(t) | \Phi_I(t) \rangle$$

með

$$O_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} O_S e^{-iH_0 t/\hbar}$$

og einnig má sýna

$$\boxed{i\hbar d_t O_I(t) = [O_I(t), H_0]}$$

<u>Tímaþróunarvirki</u>

$$|\Psi_I(t)\rangle = U(t,t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle$$

$$U(t_0,t_0) = 1$$

(*) $U(t,t_0) = e^{iH_0 t/\hbar} e^{-iH(t-t_0)/\hbar} e^{-iH_0 t_0/\hbar}, \quad t < \infty$

1) U er einðka

$$U^+(t,t_0) U(t,t_0) = U(t,t_0) U^+(t,t_0) = 1$$

$$U^+(t,t_0) = U^{-1}(t,t_0)$$

2) Grúpu eiginleikar

$$U(t_1,t_2) U(t_2,t_3) = U(t_1,t_3)$$

3) $U(t,t_0) U(t_0,t) = 1$

$$\rightarrow \quad U(t_0,t) = U^+(t,t_0)$$

(*) er óþjált form, nota ...

$$i\hbar d_t U(t,t_0) = H_1(t) U(t,t_0)$$

$$\rightarrow \quad U(t,t_0) = U(t_0,t_0) - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\, H_1(t')\, U(t',t_0)$$

$$= 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\, H_1(t)\, U(t',t_0)$$

Ítrun þessarar jöfnu segir til um stig truflanareiknings m.t.t. $\underline{\underline{H_1(t)}}$

Samlagning hverfiþunga

Heildarhverfiþungi agnakerfis m.t.t. einhvers punkts er fasti (ekkert ytra vægi)

Víxlverkun á milli einda

$\rightarrow$ vægi á eindir

$\rightarrow$ hverfiþungi einstakra einda ekki varðveittur

undantekning er venjulega Hartree nálgun þ.s. allar eindir hreyfast í sama mættinu

$\rightarrow$ vantar „fylgnihrif" í Hartree nálgun

spuna-brautar víxlverkun veldur því að hvorki $\bar{L}$ né $\bar{S}$ eru varðveitt heldur $\bar{J}$

$$[S_x, S_y] = [S_{1x} + S_{2x}, S_{1y} + S_{2y}]$$

$$= [S_{1x}, S_{1y}] + [S_{2x}, S_{2y}]$$

$$= i\hbar S_{1z} + i\hbar S_{2z}$$

$$= i\hbar S_z$$

Sem dæmi ; samlagning spuna

tvær eindir með $s = 1/2$ spuna

Hornréttur grunnur

fjórvítt tensor margfeldi 2×2

$$\{|\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle\} = \{|+,+\rangle, |+,-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$$

eiginvektorar S_1^2, S_2^2 og S_{1z}, S_{2z}

(útvíkkun ...)

$$S_1^2 |\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle = S_2^2 |\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle$$

margfeldi I

$$\left.\begin{aligned} S_{1z} |\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle &= \varepsilon_1 \frac{\hbar}{2} |\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle \\ S_{2z} |\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle &= \varepsilon_2 \frac{\hbar}{2} |\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle \end{aligned}\right\} \text{CSCO}$$

Heildar spuni

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$$

(x, y, z)

er hverfiþungi því $[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} S_k$

$$[S^2, S_{1z}] = [S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 \cdot S_2, S_{1z}]$$

$$= 2[S_1 \cdot S_2, S_{1z}]$$

$$= 2[S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y}, S_{1z}]$$

$$= 2i\hbar(-S_{1y}S_{2x} + S_{1x}S_{2y}) \neq 0$$

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2$$

$$= S_1^2 + S_2^2 + S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+} + 2S_{1z}S_{2z}$$

$\bar{S}_1$ og $\bar{S}_2$ víxlast við S_1^2 og S_2^2

$$\rightarrow \quad [S_z, S_1^2] = [S_z, S_2^2] = 0$$

$$[S^2, S_1^2] = [S^2, S_2^2] = 0$$

$$[S_z, S_{1z}] = [S_z, S_{2z}] = 0$$

en

$$[S^2, S_{1z}] \neq 0$$

síða 2

Því leitdar spuni er varðveittur

Finna nýjan grunn

eiginvektorar $\bar{S}$ og S_z $\quad |S, M\rangle$

$$\{S_1^2, S_2^2, S^2, S_z\} : \text{CSCO}$$

ekki nauðsynlegir

eiginvigrar S^2:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$0 \qquad 2\hbar^2 \qquad 2\hbar^2 \qquad 2\hbar^2$$ eigingildi

~~roedoe~~ í vegur

$|++\rangle$

$|+-\rangle$

$|-+\rangle$

$|--\rangle$

$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+ \qquad + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

framsetning S^2 og S_z fundin

í grunninum $\{|+-\rangle \dots\}$

og síðan sett á hornalínuform

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad S^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

S M — eiginvigrar S^2

$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|+-\rangle - |-+\rangle\}$ — andsamhverft $1 \rightleftarrows 2$, einstig

$|1,1\rangle = |++\rangle$

$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|+-\rangle + |-+\rangle\}$

$|1,-1\rangle = |--\rangle$

samhverft $1 \rightleftarrows 2$, þrístig

engin sígild samsvörun vegna skömmtunar hverfiþungans og $s = 1/2$ spuna

hornréttur grunnur
4-víttrúm
→ CSCO

Almennar aðferðir

hverfiþungi $\bar{J}$: staðreyndir, upprifjun

grunnur ← eiginvigrar J^2 og J_z: $|k,j,m\rangle$

$$J^2|k,j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|k,j,m\rangle$$

$$J_z|k,j,m\rangle = m\hbar|k,j,m\rangle$$

$$J_\pm|k,j,m\rangle = \dots\dots|k,j,m\pm 1\rangle$$

$\Sigma(k,j)$ vigurrúmið spannað af $\{|k,j,m\rangle\}$

$(2j+1)$ – vítt

Í heild óbreytt eftir verkun $J^2, J_z, J_\pm$

Innan $\Sigma(k,j)$ eru fylkisstök $F(\bar{J})$ óháð k

Samlagning tvær eindir

rúmin $\Sigma(k_1,k_2\,;\,j_1,j_2) = \Sigma_1(k_1,j_1)\otimes\Sigma_2(k_2,j_2)$

$$\bar{J} = \bar{J}_1 + \bar{J}_2$$

$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$ hagfoðsgna → hverfiþungi, J

$[J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_{1k}$ og fyrir 2

$$\underbrace{[\bar{J}_1, \bar{J}_2] = 0}$$

→
$$[J_z, J_1^2] = [J_z, J_2^2] = 0$$
$$[J^2, J_1^2] = [J^2, J_2^2] = 0$$
$$[J_{1z}, J_z] = [J_{2z}, J_z] = 0$$

en $[J_{1z}, J^2] \neq 0$ og f. 2

grunnaskipti

$|k_1 k_2; j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$ er sameiginlegt eiginástand $J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z}$

Viljum finna sameiginleg eiginástönd

$$J_1^2, J_2^2, J^2, J_z$$

Eigingildi

$j_1 \geq j_2$ athugum fyrst

J_z

$$J_z |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle = (J_{1z} + J_{2z})|\cdots\rangle$$

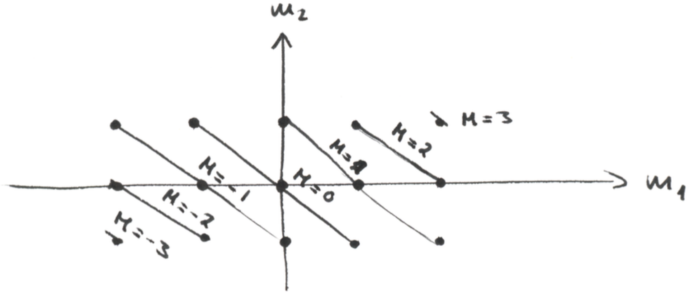
$$= (m_1 + m_2)\hbar\, |\cdots\rangle$$

$\rightarrow$ $M = m_1 + m_2$ tekur gildin

$j_1 + j_2, \; j_1 + j_2 - 1, \ldots \; -(j_1 + j_2)$

Margfeldni M : $g_{j_1 j_2}(M)$

dæmi $j_1 = 2$ $\quad j_2 = 1$



Eigingildi J^2

$$j = j_1 + j_2, \; j_1 + j_2 - 1, \ldots, |j_1 - j_2|$$

$j_1 \geq j_2$

fjöldi ástanda $\displaystyle\sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j+1) = (2j_2+1)(2j_1+1)$

sjá bók

$\rightarrow$ J^2 og J_z eru CSCO á $\mathcal{E}(j_1, j_2)$

eiginvigrar

$$J^2 |J,M\rangle = J(J+1)\hbar^2 |J,M\rangle$$

$$J_z |J,M\rangle = M\hbar |J,M\rangle$$

$$|J,M\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1,j_2;m_1m_2\rangle \underbrace{\langle j_1j_2;m_1m_2|J,M\rangle}_{\text{Clebsch-Gordan stuðlar}}$$

CG-stuðlar valdir þ.a. $\in \mathbb{R}$

$$\neq 0 \text{ ef } \left\{ \begin{array}{l} M = m_1+m_2 \\ |j_1-j_2| \leq J \leq j_1+j_2 \end{array} \right\} \text{ þríhyrnings regla}$$

$|J,M\rangle$ er einingarréttur grunnur

$$\to |j_1j_2m_1m_2\rangle = \sum_{J=j_1-j_2}^{j_1+j_2} \sum_{M=-J}^{J} |J,M\rangle\langle J,M|j_1j_2m_1m_2\rangle$$

Rauntölur

$$\to \langle JM|j_1j_2m_1m_2\rangle = \langle j_1j_2m_1m_2|JM\rangle$$

Snúningur og tensorvirkjar

Framsetning snúnings

(Lectures on QM Gordon Baym) W.A. Benja ~~Woley~~

(QM Merzbacher)

Ef $\vec{J}$ er heildar hverfiþungi kerfis þá snýr

$$R_{\vec{\alpha}} = e^{-i\vec{J}\cdot\vec{\alpha}/\hbar}$$

kerfinu í pósitíva stefnu um $\vec{\alpha}$ um hornið $|\alpha|$ m.þ.a. verka á ástandið frá vinstri

Ef $R_{\bar{\alpha}}$ verkar á eigin ástand J^2 $|jm\rangle$ þá breytist ekki j

snúningur breytir ekki hverfiþunga (lengd)

$$\to [R_{\bar{\alpha}}, J^2] = 0$$

$$J^2 R_{\bar\alpha} |jm\rangle = R_{\bar\alpha} J^2 |jm\rangle = j(j+1) R_{\bar\alpha} |jm\rangle$$

en m breytist, snúna ástandið
er ekki lengur eigin ástand J_z
(nema $\bar\alpha \sim \hat z$) þá breytist ekki z-hnit J

fullkomin grunnur

$$\rightarrow R_{\bar\alpha} |jm\rangle = \sum_{m''=-j}^{j} |jm''\rangle\, d^{(j)}_{m''m}(\bar\alpha)$$

með

$$d^{(j)}_{m'm}(\bar\alpha) = \langle jm'| e^{-i\bar J\cdot\bar\alpha/\hbar} |jm\rangle$$

$(2j+1)\times(2j+1)$ fylki $d^{(j)}(\bar\alpha)$ ← óháð aflfræði

---

Einn snúning $\bar\gamma$ má brjóta niður
í tvo $\bar\alpha$, $\bar\beta$

$$R_{\bar\gamma} = R_{\bar\beta} R_{\bar\alpha}$$

$$[d^{(j)}(\alpha)^{+}]_{m'm} = d^{(j)}_{mm'}(\alpha)^{*}$$

$$= \langle jm'| e^{i\bar J\cdot\bar\alpha} |jm\rangle = d^{(j)}_{m'm}(-\alpha)$$

$$\langle jm|R_{\bar\gamma}|jm'\rangle = \sum_{m''} \langle jm|R_{\bar\beta}|jm''\rangle\langle jm''|R_{\bar\alpha}|jm'\rangle$$

$$\rightarrow \quad d^{(j)}_{mm'}(\bar\gamma) = \sum_{m''} d^{(j)}_{mm''}(\bar\beta)\, d^{(j)}_{m''m'}(\bar\alpha)$$

$$\rightarrow \quad d^{(j)}(\bar\gamma) = d^{(j)}(\bar\beta)\, d^{(j)}(\bar\alpha)$$

mengi
fylkja tengd snúningi sem uppfylla
þessa kröfu eru mismunandi
útsetningar ~~túlkanir~~ snúningsgrúpunnar

$d^{(j)}(\bar\alpha)$ er einöka

$$\leftarrow \quad d^{(j)}(\bar\alpha)^{+} = d^{(j)}(-\bar\alpha)$$

$$d^{(j)}(\bar\alpha)^{+}\, d^{(j)}(\bar\alpha) = 1$$

$R_{\bar\alpha}$ verka á $|jm\rangle$ með fast j
á óklofanlegann hátt

innan $\Sigma(j)$ er $\longrightarrow$
ekkert hlutmengi ástanda
sem ~~verða~~ kyrr í hlutmenginu
við snúning $(R_{\bar\alpha})$
ef hlutmengið er minna
en $\Sigma(j)$

Ef $R_{\bar{\alpha}}$ verkar á 8 ástönd $j=1$ og $j=2$

þá haldast $j=1$ og $j=2$ ástöndin

aðgreind

$\rightarrow$ $R_{\bar{\alpha}}$ verkar kljúfanlega hér

$d^{(j)}$ eru óklúfanlegar túlkanir

$\longleftrightarrow$ ekki er til grunnur þ.a.

öll $d^{(j)} = \begin{pmatrix} \boxed{\equiv} & 0 \\ 0 & \boxed{\equiv} \end{pmatrix}$

Eulershorn

Alla snúninga má gera í þremur skrefum

1. Snúa φ um $\hat{z}$
2. Snúa θ um $\hat{y}'$ ← nýr y-ás vegna
3. Snúa ψ um $\hat{z}'$ ← nýr z-ás vegna

$$R_{\varphi\theta\psi} = e^{-i/\hbar \psi J_z'} e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_y'} e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_z}$$

nota

nota $e^{-\frac{i}{\hbar}\psi J_z'}$

$$\rightarrow R_{\varphi\theta\psi} = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_y'} e^{-\frac{i}{\hbar}\psi J_z} e^{\frac{i}{\hbar}\theta J_y'} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_y'} e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_z}$$

nota núna $e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_y'}$

$$R_{\varphi\theta\psi} = e^{-\frac{i}{\hbar}\psi J_{z'}} e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_{y'}} e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_z}$$

athugum $e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_z}$

$$\langle jM| J_y |jM\rangle = \langle jM| e^{+\frac{i}{\hbar}\varphi J_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_z} J_y e^{\frac{i}{\hbar}\varphi J_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_z} |jM\rangle$$

$$= \langle jM'| J_{y'} |jM'\rangle$$

$$\rightarrow \underline{J_{y'} = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_z} J_y e^{\frac{i}{\hbar}\varphi J_z}}$$

og almennt

$$f(J_{y'}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_z} f(J_y) e^{\frac{i}{\hbar}\varphi J_z}$$

$$\rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_{y'}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_y} e^{+\frac{i}{\hbar}\varphi J_z}$$

og $$e^{-\frac{i}{\hbar}\psi J_{z'}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_{y'}} e^{-\frac{i}{\hbar}\psi J_z} e^{\frac{i}{\hbar}\theta J_{y'}}$$

$$\rightarrow R_{\varphi\theta\psi} = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_y} e^{-\frac{i}{\hbar}\psi J_z}$$

og fylkið $d^{(j)}(\varphi, \theta, \psi)$

$$d^{(j)}_{mm'}(\varphi, \theta, \psi) = \langle jm| e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_y} e^{-\frac{i}{\hbar}\psi J_z} |jm'\rangle$$

$$= e^{-im\varphi} e^{-im'\psi} \langle jm| e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_y} |jm'\rangle$$

$$= e^{-im\varphi} e^{-im'\psi} d^{(j)}_{mm'}(\theta) \leftarrow (*)$$

ath

Síðan má sýna

$$d^{(j)}_{m,0}(\varphi, \theta, \psi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}}\, Y^*_{jm}(\theta, \varphi)$$ sjá 159

og með snúning á tveimur ögnum má sýna

$$\boxed{\begin{aligned} & Y_{j_1 m_1}(\theta, \varphi) Y_{j_2 m_2}(\theta, \varphi) \\ &= \sum_{jm} \sqrt{\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{4\pi(2j+1)}} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | jm\rangle \langle j_1 j_2 0 0 | j 0\rangle \\ &\quad \cdot Y_{jm}(\theta, \varphi) \end{aligned}}$$

athuga sjálfir á bls 363–365

til ein virkjar sem ikki
ummyndast á einfaldan hátt
við sauming og flotkast
þá ~~[illegible]~~ hverki sem skalar
né tensor virkjan.

(15a)

$$R_{\varphi\theta 0}|\theta=0,\varphi=0\rangle = |\theta,\varphi\rangle$$

$$\rightarrow \sum_{m'} \langle jm|R_{\varphi\theta 0}|jm'\rangle\langle jm'|\theta=0,\varphi=0\rangle$$

$$= \langle jm|\theta,\varphi\rangle$$

$$\rightarrow \sum_{m'} d^{(j)}_{mm'}(\varphi,\theta,0)\, Y^*_{jm'}(0,0) = Y^*_{jm}(\theta,\varphi)$$

en nú er
$$Y^*_{jm'}(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{ef } m' \neq 0 \\ \sqrt{\frac{(2j+1)}{4\pi}} & \text{ef } m' = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{d^{(j)}_{m0}(\varphi,\theta,0) = \sqrt{\frac{4\pi}{(2j+1)}}\, Y^*_{jm}(\theta,\varphi)}$$

nú er (*) þ.a. d_{m0} óháð ψ

$$\rightarrow d^{(j)}_{m0}(\varphi,\theta,\psi) = \sqrt{\frac{4\pi}{(2j+1)}}\, Y^*_{jm}(\theta,\varphi)$$

Tensor virkjar

$$\langle JM | A | JM \rangle = \langle JM | R_\omega^{-1} R_\omega A R_\omega^{-1} R_\omega | JM \rangle$$

$$= \langle JM' | R_\omega A R_\omega^{-1} | JM' \rangle$$

einoka ummyndun

$$A \to R_\omega A R_\omega^{-1} \qquad (*)$$

athugum hvernig virkjar ummyndast

Skalar

Virkjar sem víxlast við $\vec{J}$ og eru því óbreyttir við (*) eru skalar virkjar

Tensor

(almennt hafa tensor v. einfalda ummyndun við snúning)

Óklýúfanlegir tensor virkjar k. gráðu kallast mengi $2k+1$ virkja

$$T_q^{(k)}, \quad q = -k, -k+1, \dots, k$$

$d^{(k)}$ er óklýúfanlegt

→ engin stök $T^{(k)}$ ummyndast sín á milli án þátttöku hinna → $T^{(k)}$ óklýúfanlegur

Sem ummyndast á eftirfarandi hátt

$$\boxed{R_\omega T_q^{(k)} R_\omega^{-1} = \sum_{q'=-k}^{k} T_{q'}^{(k)} d_{q'q}^{(k)}(\omega)} \quad (1)$$

hliðstætt við

$$R_\omega |jm\rangle = \sum_{m''=-j}^{j} |jm''\rangle d_{m''m}^{(j)}(\omega)$$

---

0. stigs virki = skalar virki

1. —||— = vigur virki

Oft er einfaldara að þekkja óbreytanlega tensorvirkja á ummynduninni þeirra við örsmæðar snúning heldur en (1)

$$R_{\bar\epsilon} = e^{-\frac{i}{\hbar}\bar J\cdot\bar\epsilon} \simeq 1 - \frac{i}{\hbar}\bar J\cdot\bar\epsilon$$

(1) verður þá

$$T_q^{(k)} - \frac{i}{\hbar}\left[\bar J\cdot\bar\epsilon, T_q^{(k)}\right] = \sum_{q'} T_{q'}^{(k)} \langle kq'|(1-\tfrac{i}{\hbar}\bar J\cdot\epsilon)|kq\rangle$$

$$= T_q^{(k)} - \frac{i}{\hbar}\bar\epsilon\cdot\sum_{q'} T_{q'}^{(k)}\langle kq'|\bar J|kq\rangle$$

jöfn veldi $\bar\epsilon$:

$$\rightarrow \boxed{\left[\bar J, T_q^{(k)}\right] = \sum_{q'} T_{q'}^{(k)}\langle kq'|\bar J|kq\rangle}$$

Jafngildir (1)

<u>Einstakir þættir eru</u>

$$\left[J_z, T_q^{(k)}\right] = \hbar q T_q^{(k)} \quad (2)$$

$$\left[J_\pm, T_q^{(k)}\right] = \hbar T_{q\pm1}^{(k)}\sqrt{k(k+1)-q(q\pm1)}$$

Nú er hægt með hníta tengslunum:

og ②

$$V_{q=1} = -\frac{V_x + iV_y}{\sqrt{2}}$$

$$V_{q=0} = V_z \qquad ③$$

$$V_{q=-1} = \frac{V_x - iV_y}{\sqrt{2}}$$

að sýna að virkjavigur (óklýfanlegur) uppfylli

④ $\quad [J_i, V_j] = i\hbar\,\epsilon_{ijk} V_k, \qquad ijk = xyz$

Við höfum einnig áður séð að $\vec{r}$ uppfyllir ④ ($\vec{r}$ er sem sé vigur!)

↳ það má nota til að kanna q-hnitin

$$r_1 = -\frac{x+iy}{\sqrt{2}}$$

$$r_0 = z \qquad \text{nota kúluhnit}$$

$$r_{-1} = \frac{x-iy}{\sqrt{2}}$$

$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\cos\theta$

$$r_1 = -\frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{i\varphi}$$

$$r_0 = r\cos\theta$$

$$r_{-1} = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{-i\varphi}$$

eða í raun

$$r_q = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, r\, Y_{1q}(\theta,\varphi)$$

$$P_{1,q}(x,y,z) \equiv r\, Y_{1q}(\theta,\varphi)$$

er 1. stigs óhliðruð fleirliða í x, y, z

$$P_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,(x+iy)$$

$$P_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, z$$

$$P_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,(x-iy)$$

og hvaða vigur virkja sem er má skrifa sem

$$V_q = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, P_{1q}(V_x,V_y,V_z)$$ kúluhnit vigurs

---

hvaða ℓ stigs tensor sem er má því tákna við óhliðruðu fleirliðuna

$$P_{\ell m}(x,y,z) \equiv r^{\ell}\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

~~sönnun bls 370 - 371~~

því vitjum við sama nána

Ef $\bar{V}$ er vigur virki, þá er mengi hinna $2\ell+1$ fleirliðaa $P_{\ell m}(V_x,V_y,V_z)$ sem myndaðar eru úr þáttum $\bar{V}$ ákljúfanlegur tensor ℓ. stigs

Sönnun ← sönnun bls 370

óhliðruð fleirliða

$$R_{\bar{\alpha}}\, P_{\ell m}(V_x,V_y,V_z)\, R^{-1}_{\bar{\alpha}} = P_{\ell m}(V_{x''},V_{y''},V_{z''})$$

með

$$V_{x''} = R_{\bar{\alpha}}\, V_x\, R^{-1}_{\bar{\alpha}}\,,$$ x'': x-ás snúinn um ás $\bar{\alpha}$ um $-|\bar{\alpha}|$

Vitum

$$Y_{jm}(\theta'',\varphi'') = \sum_{m'=-j}^{j} Y_{jm'}(\theta,\varphi)\, d^{(j)}_{m'm}(\bar{\alpha})$$

$\theta\varphi$ snúin $-|\bar{\alpha}|$ um $\bar{\alpha}$

berist saman við (innfeldmuð $\langle\theta\varphi|$)

$$R_{\bar{\alpha}}\,|jm\rangle = \sum_{m'=-j}^{j} |jm'\rangle\, d^{(j)}_{m'm}(\bar{\alpha})$$

$$\to P_{\ell m}(V_{x''}, V_{y''}, V_{z''}) = \sum_{m'} P_{\ell m'}(V_x, V_y, V_z)\, d^{(\ell)}_{m'm}(\bar\alpha)$$

$$\to R_{\bar\alpha} P_{\ell m} R_{\bar\alpha}^{-1} = \sum_{m'} P_{\ell m'}\, d^{(\ell)}_{m'm}(\bar\alpha)$$

sem er krafan um
ummyndun óklýúfanlegs tensors (stig ℓ)

$\ell = 2$

$$P_{2,\pm2} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\, V_{\pm1}^2$$

$$P_{2,\pm1} = \sqrt{\frac{15}{16\pi}}\,(V_0 V_{\pm1} + V_{\pm1} V_0)$$

$$P_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(2V_0^2 + V_1 V_{-1} + V_{-1} V_1)$$

Eiginleikar tensora

Ef $T_q^{(k)}$ verkar á $|\alpha, jm\rangle$
þá fæst ástand með z-þátt
hverfiþungans $\hbar(m+q)$

sönnun

snún. um $\hat z$

$$R_\varphi T_q^{(k)} |\alpha j m\rangle = \overbrace{R_\varphi T_q^{(k)} R_\varphi^{-1}} \overbrace{R_\varphi |\alpha j m\rangle}$$

$$= \sum_{q'} \left\{ T_{q'}^{(k)} d^{(k)}_{q'q}(\varphi) \right\} \sum_{m'} |\alpha j m'\rangle d^{(j)}_{m'm}(\varphi)$$

en

$$d^{(j)}_{m'm}(\varphi) = \langle jm' | e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_z} | jm\rangle$$
$$= \delta_{m'm}\, e^{-im\varphi}$$

$$\to R_\varphi T_q^{(k)} |\alpha j m\rangle = e^{-i(q+m)\varphi}\, T_q^{(k)} |\alpha j m\rangle$$

á þennan hátt snúast ástönd með z-hverfiþunga
$\hbar(q+m)$ um $|\bar\varphi|$

$R_\varphi |jm\rangle = e^{-im\varphi} |jm\rangle$

$T_q^{(k)} |\alpha j m\rangle$ er ekki eiginvigur J^2

en

$$|\tilde{\alpha} j m\rangle = \sum_{q m_1} T_q^{(k)} |\alpha j_1 m_1\rangle \langle k j_1 q m_1 | j m\rangle$$

er það með eigingildi $\hbar^2 j(j+1)$, og $\hbar m$ fyrir J_z

(svipað og samlagning hverfiþunga k, q og $j_1 m_1$)

<u>sönnun</u>

$$R|\tilde{\alpha} j m\rangle = \sum_{q m_1} (R T_q^{(k)} R^{-1}) R|\alpha j_1 m_1\rangle \langle k j_1 q m_1 | j m\rangle$$

$$= \sum_{q' m_1'} T_{q'}^{(k)} |\alpha j_1 m_1'\rangle \sum_{q m_1} d_{q'q}^{(k)} d_{m_1' m_1}^{(j_1)} \langle k j_1 q m_1 | j m\rangle$$

athuga

$$d_{q'q}^{(k)} d_{m_1' m_1}^{(j_1)} = \dots\dots ?$$

Kemur frá samlagningu tveggja hverfiþunga

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\bar{J}\cdot\bar{\alpha}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\bar{J}_1\cdot\bar{\alpha}} e^{-i\bar{J}_2\cdot\bar{\alpha}}, \quad \bar{J} = \bar{J}_1 + \bar{J}_2$$

$\bar{J}_1$ og $\bar{J}_2$ - hlutarnir ummyndast óháðir hvor öðrum

$$\rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar}\bar{J}\cdot\bar{\alpha}} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$$

$$= \sum_{m_1' m_2'} |j_1 j_2 m_1' m_2'\rangle d_{m_1' m_1}^{(j_1)}(\bar{\alpha}) d_{m_2' m_2}^{(j_2)}(\bar{\alpha})$$

eða

$$\langle j_1 j_2 m_1' m_2' | e^{-\frac{i}{\hbar}\bar{J}\cdot\bar{\alpha}} | j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = d_{m_1' m_1}^{(j_1)}(\bar{\alpha}) d_{m_2' m_2}^{(j_2)}$$

Vinstri hliðina má umskrifa fyrir $|jm\rangle$ grunninn með CG-stuðlum

$$\langle j_1 j_2 m_1' m_2' |\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{J}\cdot\vec{\alpha}}\, | j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$$

$$= \sum_{jm'm} \langle j_1 j_2 m_1' m_2' | jm'\rangle \langle jm' |\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{J}\cdot\vec{\alpha}}\, | jm\rangle \cdot \langle jm | j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$$

en

$$d^{(j)}_{m'm}(\alpha) = \langle jm' |\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{J}\cdot\vec{\alpha}}\, | jm\rangle$$

$\Rightarrow$

$$d^{(j_1)}_{m_1'm_1}\, d^{(j_2)}_{m_2'm_2} = \sum_{jm'm} \langle j_1 j_2 m_1' m_2' | jm'\rangle \langle jm | j_1 j_2 m_1 m_2\rangle\, d^{(j)}_{m'm}$$

því fæst

$$d^{(k)}_{q'q}\, d^{(j_1)}_{m_1'm_1} = \sum_{in'n} \langle k j_1 q' m_1' | in'\rangle \langle k j_1 q m_1 | in\rangle\, d^{(i)}_{n'n}$$

og þess vegna

$$R|\tilde{\alpha} jm\rangle = \sum_{\substack{q'm_1' \\ qm_1 \\ in'n}} T^{(k)}_{q'} |\alpha j_1 m_1'\rangle \langle k j_1 q m_1 | jm\rangle \langle k j_1 q' m_1' | in'\rangle \langle k j_1 q m_1 | in\rangle\, d^{(i)}_{n'n}$$

hér þarf að nota eiginleika CG-stuðla

$$\sum_{qm_1} \langle k j_1 q m_1 | jm\rangle \langle k j_1 q m_1 | in\rangle = \delta_{i,j}\,\delta_{m,n}$$

þ.a.

$$R|\tilde{\alpha} jm\rangle = \sum_{\substack{q'm_1' \\ i n' n}} T^{(k)}_{q'} |\alpha j_1 m_1'\rangle \langle k j_1 q' m_1' | i n'\rangle \cdot d^{(i)}_{n'n} \delta_{i,j} \delta_{m,n}$$

$n' \to m'$

$$= \sum_{q'm_1' m'} T^{(k)}_{q'} |\alpha j_1 m_1'\rangle \langle k j_1 q' m_1' | j m'\rangle d^{(j)}_{m'm}$$

$$= \sum_{m'} |\tilde{\alpha} j m'\rangle d^{(j)}_{m'm}$$

$\longrightarrow$ $|\tilde{\alpha} jm\rangle$ ummyndast eins og eiginástand J^2 og J_z með eigingildi j og m

Athuga meðaltal yfir öll korn, eða heildi

$$\int d\omega\, f(\omega) \equiv \int_{-1}^{1} \frac{d\cos\theta}{2} \int_0^{4\pi} \frac{d\varphi}{4\pi} \int_0^{4\pi} \frac{d\psi}{4\pi} f(\varphi,\theta,\psi)$$

4π ístað 2π vegna spuna $s = 1/2 \to J = \cdots + 1/2$

$$\int d\omega = 1$$

$$\int d\omega\, d^{(j)}_{mm'}(\varphi,\theta,\psi) = \delta_{j,0}\,\delta_{m',0}\,\delta_{m,0}$$

: meðaltal allra snúninga hverfur nema $j=0$ (hluturinn sé kúlusamhverfur)

$$\int d\omega\, d^{(j_1)}_{m_1'm_1} d^{(j_2)}_{m_2'm_2}$$

$$= \sum_{jm'm} \langle j_1 j_2 m_1' m_2' | j m'\rangle \langle jm | j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \int d\omega\, d^{(j)}_{m'm}$$

$$= \langle j_1 j_2 m_1' m_2' | 00\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | 00\rangle$$

en

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | 00 \rangle = \delta_{j_1, j_2} \delta_{m_1, -m_2} \frac{(-1)^{j_1 - m_1}}{\sqrt{2j_1+1}}$$

og ef $m_1 \to -m_1$ þá fæst
$m_1' \to -m_1'$

$$\int d\omega \, d^{(j_1)}_{-m_1', -m_1}(\omega) (-1)^{2j_1 - m_1 - m_1'} d^{(j_2)}_{m_2' m_2}(\omega)$$

$$= \frac{\delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} \delta_{m_1' m_2'}}{2j_1+1}$$

$$= d^{(j_1)}_{m_1' m_1}(\omega)^*$$

þessi líking verður nú notuð á eftirfarandi hátt

$$\int d\omega = 1$$

$$\to \int d\omega \, R_\omega^{-1} R_\omega = 1$$

$$\to \int d\omega \langle \alpha' j' m' | R_\omega^{-1} R_\omega | \tilde{\alpha} j m \rangle = \langle \alpha' j' m' | \tilde{\alpha} j m \rangle$$

sem jafngildir

$$\sum_{\overline{m}, \overline{m}'} \int d\omega \, d^{(j')}_{\overline{m}' m'}(\omega)^* d^{(j)}_{\overline{m} m}(\omega) \langle \alpha' j' \overline{m}' | \tilde{\alpha} j \overline{m} \rangle$$

$$= \langle \alpha' j' m' | \tilde{\alpha} j m \rangle$$

---

nota nú jöfnuna fyrir heildið yfir tvö d...

$\Rightarrow$

$$\langle \alpha' j' m' | \tilde{\alpha} j m \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \sum_{\overline{m}} \frac{\langle \alpha' j' \overline{m} | \tilde{\alpha} j' \overline{m} \rangle}{2j'+1}$$

horn réttusetning CG-stuðla

$$\sum_{jm} \langle j_1 j_2 m_1' m_2' | jm\rangle \langle jm | j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}$$

$$\sum_{jm}\sum_{qm_1} \langle \alpha' j' m' | T_q^{(k)} | \alpha j_1 m_1\rangle \langle k j_1 q m_1 | jm\rangle \langle jm | k j_1 q' m_1'\rangle$$

$$= \sum_{jm} \frac{\delta_{jj'}\delta_{mm'}}{2j'+1} \sum_{\overline{m}} \langle \alpha' j' \overline{m} | \tilde{\alpha} j' \overline{m}\rangle \cdot \langle jm | k j_1 q' m_1'\rangle$$

nota

$$\sum_{qm_1} \langle \alpha' j' m' | T_q^{(k)} | \alpha j_1 m_1\rangle \delta_{qq'} \delta_{m_1 m_1'}$$

$$= \sum_{\overline{m}} \frac{\langle \alpha' j' \overline{m} | \tilde{\alpha} j' \overline{m}\rangle}{2j'+1} \langle k j_1 q' m_1' | j' m'\rangle$$

$m_1 \to m \quad j_1 \to j \quad q' \to q \quad m_1' \to m$

$\to$

$$\langle \alpha' j' m' | T_q^{(k)} | \alpha j m\rangle = \sum_{\overline{m}} \frac{\langle \alpha' j' \overline{m} | \tilde{\alpha} j' \overline{m}\rangle}{2j'+1} \langle k j q m | j' m'\rangle$$

nota skilgreininguna fyrir $|\tilde{\alpha}, jm\rangle$

$$\sum_{qm_1} \langle \alpha' j' m' | T_q^{(k)} | \alpha j_1 m_1\rangle \langle k j_1 q m_1 | jm\rangle$$

$$= \frac{\delta_{jj'}\delta_{mm'}}{2j'+1} \sum_{\overline{m}} \langle \alpha' j' \overline{m} | \tilde{\alpha} j' \overline{m}\rangle$$

nú má sannfæra sig um að þessi jafna heldur ef

$$\boxed{\langle \alpha' j' m' | T_q^{(k)} | \alpha j m\rangle = \sum_{\overline{m}} \frac{\langle \alpha' j' \overline{m} | \tilde{\alpha} j' \overline{m}\rangle}{2j'+1} \cdot \langle k j q m | j' m'\rangle}$$

sem venjulega er skrifað sem

$$\underbrace{\langle \alpha' j' m' | T_q^{(k)} | \alpha j m\rangle}_{\text{fylkisstak virkja}} = \underbrace{\frac{\langle \alpha' j' \| T^{(k)} \| \alpha j\rangle}{\sqrt{2j'+1}}}_{\text{~~Efnuell~~ háður aflfræði en óháður } m, m', q \text{ Skert stak}} \underbrace{\langle k j q m | j' m'\rangle}_{\text{hornhluti (CG-st) óháður aflfræði}}$$

dæmi

Reiknum $\langle \alpha' j' m' | J_q | \alpha j m \rangle$

Wigner Eckart:

$$\langle \alpha' j' m' | J_q | \alpha j m \rangle = \frac{\langle \alpha' j' \| J \| \alpha j \rangle}{\sqrt{2j'+1}} \langle 1 j q m | j' m' \rangle$$

þessi hluti er óháður q

→ t.þ.a. reikna skerta fylkisstakið er þægilegt q valið

t.d. $q = 0$ $\quad J_0 = J_z$

þá fæst einfaldlega

$$\langle \alpha' j' m' | J_q | \alpha j m \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{\alpha'\alpha} \hbar m$$

$$= \frac{\langle \alpha' j' \| J \| \alpha j \rangle}{\sqrt{2j'+1}} \langle 1 j 0 m | j' m' \rangle$$

→ skerta stakið $= 0$ ef $j \neq j'$ og $\alpha \neq \alpha'$

CG-stuðull $\quad 0 + m = m' \quad \rightarrow m = m'$

$$\langle 1 j 0 m | j m \rangle = \frac{m}{\sqrt{j(j+1)}}$$

og því fæst

$$\frac{\langle \alpha' j' \| J \| \alpha j \rangle}{\sqrt{2j'+1}} = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{jj'} \sqrt{j(j+1)}\, \hbar$$

þ.a. skerta stakið er sem $\sqrt{\langle J^2 \rangle}$

og almennt fæst

$$\langle \alpha' j' m' | J_q | \alpha j m \rangle = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{jj'} \sqrt{j(j+1)}\, \hbar \langle 1 j q m | j m' \rangle$$

sem hefði auðvitað mátt finna á auðveldari hátt

Fjöleindakerfi

- Lauslegur inngangur um eind $\leftrightarrow$ svið og aðra skömmtun
- eins agnir
- önnur skömmtun

Lauslegur inngangur

Schrödinger jafna einnar eindar

$$\left\{ i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - V(x) \right\} \psi(x,t) = 0$$

á svipaðan hátt má skrifa Schrödinger jöfnuna fyrir margeinda kerfi

$$\left\{ i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1} \nabla_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} V(x_i - x_j) \right\} \psi(x_1 \ldots x_N, t)$$

mögulegt að nota fyrir He-atóm ....

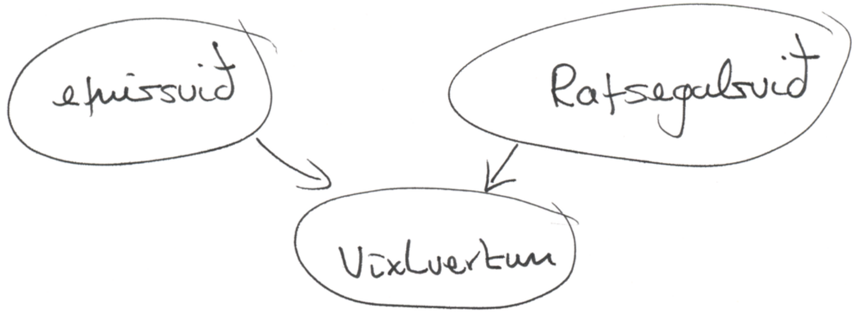
en í stóru kerfi verður jafnan 3N+1-víð og mjög erfitt að ráða við samhverfur t.d. Pauli eins

---

Hvað er gert í sígildri eðlisfræði við hliðstæðar aðstæður ?

t.d. margar sígildar agnir, hlaðnar með innbyrðis Coulomb krafta

innfært svið



En lítum á, Schrödingerjöfnuna fyrir eina eind og t.d. bylgjujöfnuna fyrir rafsegulsviðið eru báðar sviðsjöfnur

$$\left\{ i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - V(x) \right\} \psi(x,t) = 0$$

$$\left\{ \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \right\} \bar{A}(x,t) = \frac{4\pi}{c} \bar{J}(x,t)$$

$\psi, A_j \in \mathbb{C}$

Við viljum útvíkka aðra eða báðar þannig að þær gildi fyrir fjöleindakerfi (rafeindir, ljóseindir)

<u>það sem verður því gert, 2. skömmtun</u>

tökum t.d. Schrödingerjöfnuna

þess verður krafist að í stað $\psi(x,t) \in \mathbb{C}$ komi virki $\phi(x,t)$ sem uppfyllir

$$i\hbar\partial_t\phi(x,t) = [\phi(x,t), H] \quad (*)$$

svo í stað $\psi(x,t)$, sem leiðir til líkinda þéttleikans $|\psi(x,t)|^2$, kemur virki $\phi(x,t)$ á Hilbertrúmi (occupation space).
líkindaþéttleika hugtakið flyst yfir í vigurrúmið.

$\psi(x,t)$ uppfyllir línulega jöfnu, jafnvel þegar víxlverkun á sér stað

$\phi(x,t)$ getur uppfyllt ólínulega jöfnu þegar víxlverkun á sér stað

Hamiltonvirkinn mun verða t.d.

$$H = \int d\bar{x}\, \phi^+(x,t) \underbrace{\left\{ -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(x) \right\}}_{\ddot{\mathcal{H}}:\ \text{Hamilton þéttleiki}} \phi(x,t)$$

$$\rightarrow \quad [\phi(\bar{x},t), \phi^+(\bar{x}',t)]_{\pm} = \delta(\bar{x}-\bar{x}')$$

$\uparrow$

Bósonur, Fermíónur

Fram mun koma að schrödingerjafnan fyrir $\Psi(x_1 x_2 x_3 \dots x_N, t)$ er jafngild Schrödingerjöfnunni fyrir $\phi(x,t)$

Schrödingerjafnan fyrir $\phi(x,t) \in \mathbb{C}$ og aðferðafræðin sem fylgir henni mun auðvelda umfjöllun margeindakerfa

síðan verður einnig litið á rafsegulsviðið.

Eins eindir

skammtaagnir einnar tegundar eru óaðgreinanlegar!

Ekki er hægt að fylgjast með einni ögn í víxlverkandi margeindakerfi

↳ við gætum ef til vill fylgst með $|\Psi(x_1 x_2 x_3 \dots)|^2$
(en „fylgju föll agnanna" skarast við víxlverkun)

$\Downarrow$

Virki samsvarandi mælistærð í margeindakerfi verður að meðhöndla eindirnar eins

Virkinn $A(1,2,\dots N)$ verður að vera samhverfur m.t.t. vísanna $1,2,\dots N$

umraðanir + samhverfa

umröðun   spuni og staðarhnit

$$P_{ij}\Psi(1,2,\ldots i,\ldots j,\ldots N) = \Psi(1,2,\ldots j,\ldots i, N)$$

hvaða umröðun sem er má skrifa sem margfeldi slíkra virkja P_{ij}

Ef virkinn A er <u>samhverfur</u> við umröðun (mælistærð)

$$\rightarrow PA = AP \rightarrow PAP^{-1} = A$$

Væntingargildi A í hvaða ástandi sem er, er óháð röðun og merkingu einda

$$\sum_{s_1\ldots s_N}\int d\vec{r}_1\ldots d\vec{r}_N\, \Psi^*(1,2\ldots N)\, A(1,2\ldots N)\,\Psi(1,2\ldots N)$$

P víxlast við H → eiginástönd H eru eiginástönd P. bylgjuföll fasta umröðunar eiginleika

tilraunir sýna að bylgjuföll

$\Psi(1,\ldots N)$ eru ávallt eiginástönd P með eigingildi ± 1 (óháð tíma)

Eigingildið +1 tengist spuna 0, 1, 2, … bóseindir
−1 —||— 1/2, 3/2, … Fermíeindir

óháð tíma vegna þess að truflun $V(1,2\ldots N)$ er samhverf og víxlast við P

$$P|\Psi\rangle = \pm|\Psi\rangle \rightarrow PV|\Psi\rangle = VP|\Psi\rangle = \pm V|\Psi\rangle$$

Ástönd frjálsra agna

frjálsar: agnirnar geta verið í ytra föstu mætti, en víxlverkast <u>ekki</u> innbyrðis.

N: eindir

$$H = H_0(1) + H_0(2) + \cdots + H_0(N)$$

$$H\,\Psi(1,\ldots,N) = E\,\Psi(1,\ldots,N)$$

fyrir bóseeindir er lausnin

$$\Psi_S(1,2\ldots N) = \sum_P P\,\varphi_a(1)\,\varphi_b(2)\cdots\varphi_N(N)$$

samhverf

summa yfir allar raðanir

eða $\frac{1}{\sqrt{N!}}$

hver röðun er eitt ástand fyrir margfalda orkugildið (margfeldni $N!$)

$$E = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \cdots + \varepsilon_N$$

þetta er dæmi um skiptimargfeldni

fyrir Fermieindir þarf ástandið að vera algerlega andsamhverft :

$$\Psi_A(1,2,\ldots N) = \begin{vmatrix} \varphi_a(1) & \varphi_a(2) & \cdots & \varphi_a(N) \\ \varphi_b(1) & \varphi_b(2) & \cdots & \varphi_b(N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_N(1) & \varphi_N(2) & \cdots & \varphi_N(N) \end{vmatrix}$$

Slater ákveða

eða $\frac{1}{\sqrt{N!}}$

normun ástandanna

$$\langle \Psi_A | \Psi_A \rangle = N!$$

$$\langle \Psi_S | \Psi_S \rangle = \frac{N!}{N_a!\,N_b!\cdots N_N!}$$

þar sem ástand a getur verið N_a setið

Ψ_A er algerlega andsamhverft

$\longrightarrow$ hvert ástand er einsetið

$$\Psi(2,1,3 \dots N) = -\Psi(1,2,3 \dots N)$$

ef $1=2 \longrightarrow \Psi = 0$

Í raun má því sjá að reikningar með margeinda bylgjuföll verða flóknir

$\Downarrow$

Hentugra að beyta annarri skömmtun

"Önnur skömmtun

Útbúum rúm vigra

$|n_0, n_1, n_2 \dots\dots \rangle \qquad n_a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

þ.a. n_a tákni fjölda einda í ástandi a

Óendanlega vítt rúm, og mengi slíkra vigra er óteljanlegt

Þurfum að velja teljanlegt hlutmengi til þess að mynda grunn Hilbertsrúms.

Þetta má gera á mismunandi hátt.
Og hlutmengin yrðu ekki jafngild
(not unitarily equivalent)

rödud ástönd, samhverfubrot, þéttefnisfr.
„einoka ummm" út fyrir grunn

: hér verður frekari umræðu sleppt....

tökum hlutmengi ~~með~~ endanlegum einda fjölda (samb. v. tilraunir)

$$\{ |n_0, n_1, n_2 \cdots \rangle ; \sum_i n_i < \infty \}$$

hlutmengið er teljanlegt og hægt er að finna grunn og skilgreina innfeldi

$$\langle n_0', n_1', \cdots | n_0, n_1, \cdots \rangle = \prod_{i=0}^{\infty} \delta_{n_i', n_i}$$

Einingar réttir vigrar

Ef $\{\xi_a\}$ eru vigrar í grunninum

þá er línulega vigur rúmið (Hilbertrúm)

$$\mathcal{H} = \{ \xi = \sum_{a=0}^{\infty} C_a \xi_a ; \sum_{a=0}^{\infty} |C_a|^2 < \infty \}$$

nefnd Fock-rúm og er rúm þeirra ástanda sem hér verður um fjallað.

Til þess að kanna rúmið þurfum við tröppu virkja

eyðingarvirkja a_i fyrir eind í ást. i

sköpunarvirkja a_i^+ — || —

athugum fyrst bóseeindir

$$a_i | \cdots n_i \cdots \rangle \equiv \sqrt{n_i}\, | \cdots n_i - 1 \cdots \rangle$$

$$a_i^+ | \cdots n_i \cdots \rangle \equiv \sqrt{n_i + 1}\, | \cdots n_i + 1 \cdots \rangle$$

$$a_i a_i^+ | \cdots n_i \cdots \rangle = n_i + 1 | \cdots n_i \cdots \rangle$$

$$a_i^+ a_i | \cdots n_i \cdots \rangle = n_i | \cdots n_i \cdots \rangle$$

$$\rightarrow \quad [a_i a_i^+ - a_i^+ a_i] | \cdots n_i \cdots \rangle = | \cdots n_i \cdots \rangle$$

$$\rightarrow \quad [a_i, a_i^+] = 1 \qquad [a_i, a_j^+] = \delta_{ij}$$

tóma ástandið $|0\rangle \equiv |0,0,\cdots 0\cdots\rangle$

$\boxed{\text{tóma ástandið þarf ekki að vera grunnástand kerfis}}$

$$|n_0,n_1,\cdots\rangle = \cdots \frac{(a_1^+)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}}\frac{(a_0^+)^{n_0}}{\sqrt{n_0!}}|0\rangle$$

töluvirki

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^+ a_i$$

$$N|n_1,n_2\cdots\rangle = \underbrace{\left[\sum_{i=0}^{\infty} n_i\right]}_{=N}|n_1,n_2,\cdots\rangle$$

↑ heildarfjöldi einda

Fermi eindir

hér er $n_i = 1$ eða 0 í $|n_0,n_1,\cdots\rangle$

$$b_i|\cdots 1_i\cdots\rangle = |\cdots 0_i\cdots\rangle\,\eta(n_0\cdots n_{i-1})$$

$$b_i^+|\cdots 1_i\cdots\rangle = 0$$

$$b_i|\cdots 0_i\cdots\rangle = 0$$

$$b_i^+|\cdots 0_i\cdots\rangle = |\cdots 1_i\cdots\rangle\,\eta(n_0\cdots n_{i-1})$$

með

$$\eta(n_0\cdots n_{i-1}) = (-1)^{\sum_{j<i} n_j}$$

↑ kemur vegna ~~víxlunar~~ endur

$b_i(bbb\dots)|0\rangle$

$$\longrightarrow \quad \{b_i, b_j^+\} \equiv b_i b_j^+ + b_j^+ b_i = \delta_{ij}$$

$$\{b_i, b_j\} = 0$$

$$\{b_i^+, b_j^+\} = 0$$

$$|n_0, n_1, n_2 \cdots\rangle = \cdots (b_2^+)^{n_2} (b_1^+)^{n_1} (b_0^+)^{n_0} |0\rangle$$

$$N = \sum_i b_i^+ b_i \quad : \text{ töluvirki}$$

Sviðsvirkjar

Bose og Fermi

Skilgreinum

$$\psi(\bar{x}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \langle \bar{x} | k \rangle a_k$$

$$\psi^+(\bar{x}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \langle k | \bar{x} \rangle a_k^+$$

$$\Rightarrow \quad [\psi(\bar{x}), \psi^+(\bar{y})]_{\pm} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \langle \bar{x} | j \rangle \langle k | \bar{y} \rangle [a_j, a_k^+]_{\pm}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \langle \bar{x} | k \rangle \langle k | \bar{y} \rangle = \langle \bar{x} | \bar{y} \rangle = \delta(\bar{x} - \bar{y})$$

einnig fæst

$$[\psi(\bar{x}), \psi(\bar{y})]_{\pm} = [\psi^+(\bar{x}), \psi^+(\bar{y})]_{\pm} = 0$$

Eins má sýna

$$a_k = \int d\bar{x} \, \langle k | \bar{x} \rangle \psi(\bar{x})$$

$$a_k^+ = \int d\bar{x} \, \langle \bar{x} | k \rangle \psi^+(\bar{x})$$

og

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int d\bar{x} \, d\bar{y} \, \underbrace{\langle \bar{x} | k \rangle \langle k | \bar{y} \rangle}_{=1} \psi^+(\bar{x}) \psi(\bar{y})$$

$$= \int d\bar{x} \, \psi^+(\bar{x}) \psi(\bar{x})$$

$$\Rightarrow \quad \psi^+(\bar{x}) \psi(\bar{x}) \quad : \text{ einda þéttleika virki}$$

$$[N, \psi^+(\bar{x})] = \psi^+(\bar{x})$$

$$[N, \psi(\bar{x})] = -\psi(\bar{x})$$

$\rightarrow$ $\psi^+(\bar{x})$ er sköpunar virki og $\psi(\bar{x})$ eyðingar virki

<u>tóma ástandið</u>

$$\psi(\bar{x})|\Omega\rangle \equiv 0 \quad \underline{\text{skilgr. fyrir } |\Omega\rangle}$$

$\rightarrow$ $a_k|\Omega\rangle = 0$ f. öll k

$\rightarrow$ $|\Omega\rangle = |0, 0, \cdots\rangle$

~~eins~~ og sést líka af:

$$N|\Omega\rangle = 0$$

$\psi^+(\bar{x})$ skapar <u>eina eind</u> því

$$N\psi^+(\bar{x})|\Omega\rangle = \{\psi^+(\bar{x})N \cancel{-} [\psi^+(\bar{x}), N]\}|\Omega\rangle$$

$$= 1 \cdot \psi^+(\bar{x})|\Omega\rangle$$

---

líkinda þéttnin fyrir því að finna ögnina í ástandinu $\psi^+(\bar{x})|\Omega\rangle$ í ástandinu $|\alpha\rangle$ er

$$\langle\alpha|\psi^+(\bar{x})|\Omega\rangle$$

og $|\bar{y}\rangle = \psi^+(\bar{y})|\Omega\rangle$

$\rightarrow$ ef $|\alpha\rangle = |\bar{y}\rangle$ þá fæst:

$$\langle\bar{y}|\psi^+(\bar{x})|\Omega\rangle = \langle\Omega|\psi(\bar{y})\psi^+(\bar{x})|\Omega\rangle$$

nota víxl

$$= \delta(\bar{y}-\bar{x})\langle\Omega|\Omega\rangle = \delta(\bar{y}-\bar{x})$$

því er $\psi^+(\bar{x})|\Omega\rangle$ ástand agnar sem er staðsett í punktinum $\bar{x}$

$\psi^+(\bar{x})$ skapar ögn staðsetta í punktinum $\bar{x}$

Í raun eru slík ástönd ekki í Hilbertrúminu, svo mynda verður bylgjupakka.

<u>t.d. smyrja út ástandið</u>

til þess að fá endanlegu normu

$$|f\rangle = \int d\bar{x}\, f(\bar{x})\, \psi^{+}(\bar{x})\, |\Omega\rangle$$

$$\langle f|f\rangle = \int d\bar{x}\, |f(\bar{x})|^2$$

<u>eða smyrja virkjann</u>

$$\psi^{+}(f) = \int d\bar{x}\, f(\bar{x})\, \psi^{+}(\bar{x})$$

dreififöll og - - - - - - - ostr-

Túlkanir virkja

Lítum á (local) virkja F sem breytir ekki eindafjölda

Í staðar rúminu er túlkun hans

$$\langle \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N | F | \bar{y}_1 \cdots \bar{y}_M \rangle$$

$$= \delta_{NM}\, F^{(N)}(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N) \prod_{j=1}^{N} \delta(\bar{x}_j - \bar{y}_j)$$

hvernig verður túlkunin í setni rúminu (occupation space)

$$\langle n_0 \cdots | F | m_0 \cdots \rangle$$

notum að $|\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N\rangle$ ástöndin spanna allt staðarrúmið

$$|\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}\, \psi^+(\bar{x}_N) \cdots \psi^+(\bar{x}_1)\,|\Omega\rangle$$

$$\rightarrow \psi^+(\bar{x})\,|\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}\, \psi^+(\bar{x})\, \psi^+(\bar{x}_N) \cdots \psi^+(\bar{x}_1)\,|\Omega\rangle$$

$$= \frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{N+1}}\, \frac{1}{\sqrt{N!}}\, \psi^+(\bar{x})\, \psi^+(\bar{x}_N) \cdots \psi^+(\bar{x}_1)\,|\Omega\rangle$$

$$= \sqrt{N+1}\; |\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N\, \bar{x}\rangle$$

pessi normum kemmer vegua tõluvirtjaas

(2)

$$\rightarrow \langle n_0 \cdots | F | m_0 \cdots \rangle \qquad \left\{ \sum n_i = \sum m_i = N \right\}$$

$$= \int d\bar{x}_1 \cdots d\bar{x}_N\, d\bar{y}_1 \cdots d\bar{y}_N$$

$$\cdot \langle n_0 \cdots | \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N\rangle \langle \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N | F | \bar{y}_1 \cdots \bar{y}_N\rangle$$

$$\cdot \langle \bar{y}_1 \cdots y_N | m_0 \cdots \rangle$$

$$= \int d\bar{x}_1 \cdots d\bar{x}_N \qquad F^{(N)}(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N)$$

$$\cdot \langle n_0 \cdots | \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N\rangle \langle \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N | m_0 \cdots \rangle$$

$$= \frac{1}{N!} \int d\bar{x}_1 \cdots d\bar{x}_N\;\; F^{(N)}(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N)$$

$$\langle n_0 \cdots | \psi^+(\bar{x}_N) \cdots \psi^+(\bar{x}_1) | \Omega\rangle$$

$$\langle \Omega | \psi(\bar{x}_1) \cdots \psi(\bar{x}_N) | m_0 \cdots \rangle$$

$$|\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\, \psi^+(\bar{x}_N) \cdots \psi^+(\bar{x}_1)\,|\Omega\rangle$$

sjäun seima
normum seu vegua mä med pui
~~ae~~ setjä $F = 1$

3

Vitum að

$$\psi(\bar{x}_1)\cdots\psi(\bar{x}_N)\,|m_0\cdots\rangle$$

með

$$\sum m_k = N$$

ef þetta er til þá

er hornrétt á öll ástönd nema $|\Omega\rangle$

þess vegna má í stað $|\Omega\rangle\langle\Omega|$ nota

$$1 = \sum_{\{n'\}} |n_0'\cdots\rangle\langle n_0'\cdots|$$

$\rightarrow$

$$\langle n_0\cdots|F|m_0\cdots\rangle = \frac{1}{N!}\langle n_0\cdots|\int d\bar{x}_1\cdots d\bar{x}_N$$

$$\cdot\,\psi^\dagger(\bar{x}_N)\cdots\psi^\dagger(\bar{x}_1)\,F^{(N)}(\bar{x}_1\cdots\bar{x}_N)\,\psi(\bar{x}_1)\cdots\psi(\bar{x}_N)\,|m_0\cdots\rangle$$

4

dæmi

$$H = \sum_{j=1}^{N} H(\bar{x}_j) \qquad (*)$$

summa einnar-eindar Hamiltonvirkja

síðasti liður summunnar verður

$$\langle n_0\cdots|\frac{1}{N!}\int d\bar{x}_1\cdots d\bar{x}_N\, H(\bar{x}_N)\psi^\dagger(\bar{x}_N)\cdots\psi^\dagger(\bar{x}_1)$$

$$\psi(\bar{x}_1)\cdots\psi(\bar{x}_N)\,|m_0\cdots\rangle$$

heildið yfir $\bar{x}_1$ býr til tölu virkjann

$\int d\bar{x}_1\,\psi^\dagger(\bar{x}_1)\psi(\bar{x}_1)$ sem gefur 1

línurnar sem eindunum er eytt

þ. honum er beitt á $\psi(\bar{x}_2)\cdots\psi(\bar{x}_3)\,|m_0\cdots\rangle$

$\int d\bar{x}_2\,\psi^\dagger(\bar{x}_2)\psi(\bar{x}_2)$ beitt á $\psi(\bar{x}_3)\cdots\psi(\bar{x}_N)\,|m_0\cdots\rangle$

gefur 2

⋮

$$\langle n_0 \cdots | \frac{1}{N!} \int d\bar{x}_1 \cdots d\bar{x}_N \; H(\bar{x}_N) \psi^+(\bar{x}_N) \cdots \psi^+(\bar{x}_1)$$

$$\cdot \psi(\bar{x}_1) \cdots \psi(\bar{x}_N) | n_0 \cdots \rangle$$

$$= \frac{1}{N} \langle n_0 \cdots | \int d\bar{x}_N \; \psi^+(\bar{x}_N) \; H(\bar{x}_N) \psi(\bar{x}_N) | n_0 \cdots \rangle$$

síðan er litið á hvern lið og víxlað eða antivíxlað t.þ. að fá svipað form

$\rightarrow$

$$\langle n_0 \cdots | H | n_0 \cdots \rangle$$

$$= \langle n_0 \cdots | \int d\bar{x} \; \psi^+(\bar{x}) H(x) \psi(\bar{x}) | n_0 \cdots \rangle$$

þ.a. margeinda Hamiltonvirkinn í staðar-rúmi

$$H = \sum_{j=1}^{N} H(\bar{x}_j)$$

er jafngildur Hamiltonvirkjanum í seturúminu

$$H = \int d\bar{x} \; \psi^+(\bar{x}) H(\bar{x}) \psi(x)$$

$$= \int d\bar{x} \; \psi^+(\bar{x}) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\bar{x}) \right\} \psi(\bar{x})$$

Víxlverkun eindanna sem skrifa má sem para víxlverkun

$$V(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_N) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k}^{N} V(\bar{x}_j, \bar{x}_k)$$

verður

$$V = \frac{1}{2} \int d\bar{x} d\bar{y} \; \psi^+(\bar{x}) \psi^+(\bar{y}) V(\bar{x}, \bar{y}) \psi(\bar{y}) \psi(\bar{x})$$

athugum betur

þessi röð svið svirkjanna (tveggja í endann) skiptir ekki máli fyrir bóseindir, <u>en er mikilvæg fyrir Fermi eindir</u>

annars er V ekki Hermít virki!

Á sama hátt er straumvirkinn

$$J = -\frac{i\hbar}{2m}\int d\bar{x}\, \underbrace{\psi^{+}(\bar{x})\overleftrightarrow{\nabla}\psi(\bar{x})}_{\text{straumþéttnivirki}}$$

og $\overleftrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{\nabla} - \overleftarrow{\nabla}$

og svo framvegis.....

<u>Dæmi</u>

Agnir með paravíxlum í einhverju kerfi (Coulomb víxlverkun eða einhver önnur t.d. víxlverkun á milli óhlaðinna agna)

$$H = H_0 + H_I$$

$$H_0 = \int d\bar{x}\, \psi^{+}(x)\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right\}\psi(\bar{x})$$

$$H_I = \frac{1}{2}\int d\bar{x}\,d\bar{y}\, \psi^{+}(\bar{x})\psi^{+}(\bar{y})V(\bar{x}-\bar{y})\psi(\bar{y})\psi(\bar{x})$$

notum einhvern grunn fyrir einnar eindar ástönd (t.d. H_0)

$$\psi(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\langle\bar{x}|\bar{k}\rangle a_{\bar{k}}$$

nota má almennan grunn, en einfaldara...

Ef $|\bar{k}\rangle$ er eigin ástand einnar eindar Hamiltonsvirkjans H_0 með orku $\hbar\omega_{\bar{k}}$ þá fæst

$$H_0 = \sum_{\bar{k},\bar{p}} \hbar\omega_{\bar{p}} \int d\bar{x}\, \phi^*_{\bar{k}}(\bar{x})\phi_{\bar{p}}(\bar{x})\; a^+_{\bar{k}} a_{\bar{p}}$$

$$= \sum_{\bar{k}} \hbar\omega_{\bar{k}} a^+_{\bar{k}} a_{\bar{k}}$$

$$H_I = \int d\bar{x}d\bar{y} \sum_{\bar{k}\bar{p}\bar{n}\bar{l}} \phi^*_{\bar{k}}(\bar{x})\phi^*_{\bar{p}}(\bar{y})\phi_{\bar{n}}(\bar{y})\phi_{\bar{l}}(\bar{x}) \cdot V(\bar{x}-\bar{y})\, a^+_{\bar{k}} a^+_{\bar{p}} a_{\bar{n}} a_{\bar{l}}$$

sem er túlkun H í seturúmunum sem má síðan einfalda enn frekar þegar $\phi_{\bar{k}}(\bar{x})$ er þekkt.

Athugasemdir um myndir

Hingað til höfum við notað Schrödingermynd athugum aðeins Heisenbergmyndina.

Í henni

$$|\psi\rangle = e^{iHt/\hbar} |\psi_S(t)\rangle$$

og

$$\psi(\bar{x},t) = e^{iHt/\hbar}\, \psi_S(\bar{x})\, e^{-iHt/\hbar}$$

Í raun gæti oft verið einfaldara að hafa ástandið fast í tíma og geta fundið hreyfingarjöfnu fyrir virkjann ψ

Ummyndunin er einőka og heldur
því óbreyttum samtímavíxlum

$$[\psi(\bar{x},t), \psi^{+}(\bar{y},t)]_{\pm} = \delta(\bar{x}-\bar{y})$$

H er ekki beint háður tíma

→

$$i\hbar\partial_t \psi(\bar{x},t) = [\psi(\bar{x},t), H]$$

$$i\hbar\partial_t \psi^{+}(\bar{x},t) = [\psi^{+}(\bar{x},t), H]$$

Athugum sama Hamilton virkja og áður

→

$$[\psi(\bar{x},t), H] = \int d\bar{y}\left[\psi(\bar{x},t), \psi^{+}(\bar{y},t)\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\bar{y}}^2 + V_0(\bar{y})\right\}\psi(\bar{y},t)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\int d\bar{y}\,d\bar{z}\left[\psi(\bar{x},t), \psi^{+}(\bar{y},t)\psi^{+}(\bar{z},t)\psi(\bar{z},t)\psi(\bar{y},t)\right]V(\bar{y},\bar{z})$$

Sem gefur sviðsjöfnuna

$$i\hbar\partial_t \psi(\bar{x},t) = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_0(\bar{x})\right\}\psi(\bar{x},t)$$

$$+\left\{\int d\bar{y}\,\psi^{+}(\bar{y},t)V(\bar{y},\bar{x})\psi(\bar{y},t)\right\}\psi(\bar{x},t)$$

(ef notað er $[A,BC] = \begin{cases} [A,B]C - B[C,A] \\ \{A,B\}C - B\{C,A\} \end{cases}$ .....)

sem er greinilega ólínuleg virkjajafna

Hana má nota t.þ.a. finna nálgun á hreyfingarjöfnu Greensfallsins fyrir kerfið

diffurjafna

Oft er líka víxlverkunarmyndin notuð t.þ.a. finna heildisjöfnu fyrir Greensfallið, þá jöfnu má síðan ítra

$\boxed{\text{En hvers vegna er Greensfallið svo eftirsótt?}}$

Útfrá Greens fallinu má finna

Fetter Walecka 64

1. væntingargildi allra einnar einda virkja

önnur Greensföll gefa væntigildi fjöleinda virkja

2. Orku grunnástandsins

3. Örvunarróf kerfisins

Greens fallið

spuna sleppt hér

Grunnástand kerfis $|\Psi_0\rangle$

(orkulægsta ástandið) $\langle\Psi_0|\Psi_0\rangle = 1$

$$i G(\bar{x}t, \bar{x}'t') = \langle\Psi_0| T(\Psi(\bar{x}t)\Psi^{+}(\bar{x}'t'))|\Psi_0\rangle$$

í Heisenberg mynd

þar sem

$$T(A(t)B(t')) = \begin{cases} A(t)B(t') & \text{ef } t > t' \\ \pm B(t')A(t) & \text{ef } t' > t \end{cases}$$

---

(1) Athugum einnar einda virkja

$$A = \int d\bar{x}\, \Psi^{+}(\bar{x},t)\, A(\bar{x},t)\, \Psi(\bar{x},t)$$

$$\mathcal{A}(\bar{x},t) = \Psi^{+}(\bar{x}t)\, A(\bar{x}t)\, \Psi(\bar{x}t)$$

væntingargildi A-þéttninar í grunnástandinu er þá

$$\langle \mathcal{A}(\bar{x},t)\rangle = \langle\Psi_0|\mathcal{A}(\bar{x},t)|\Psi_0\rangle$$

$$= \lim_{\substack{\bar{x}' \to \bar{x} \\ t' \to t^{+}}} A(\bar{x},t)\langle\Psi_0|\Psi^{+}(\bar{x}'t')\Psi(\bar{x}t)|\Psi_0\rangle$$

$$\boxed{\langle \mathcal{A}(\bar{x},t)\rangle = \pm i \lim_{t' \to t^{+}} \lim_{\bar{x}' \to \bar{x}} A(\bar{x},t)\, G(\bar{x}t, \bar{x}'t')}$$

(2)

t.d. fast

$$\langle n(\bar{x},t)\rangle = \pm i\, G(\bar{x}t, \bar{x}t^+)$$

$$\langle E_{kin}\rangle = \pm i \int d\bar{x} \lim_{\bar{x}'\to\bar{x}} \left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} G(\bar{x}t, \bar{x}'t^+)\right]$$

$$\langle V\rangle = \pm \frac{1}{2} i \int d\bar{x} \lim_{t'\to t^+} \lim_{\bar{x}'\to\bar{x}} \left[i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\right] G(\bar{x}t, \bar{x}'t')$$

og þess vegna

$$\boxed{E = \pm \frac{i}{2} \int d\bar{x} \lim_{t'\to t^+} \lim_{\bar{x}'\to\bar{x}} \left\{i\hbar\partial_t - \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\right\} G(\bar{x}t, \bar{x}'t')}$$

(3)

"Örvana rófið", Lehmann framsetn

Heisenberg mynd

$$iG(\bar{x}t, \bar{x}'t') = \langle \Psi_0 | T\{\psi(\bar{x}t)\, \psi^+(\bar{x}'t')\} | \Psi_0\rangle$$

fullkomið mengi ástanda $|\bar{k}\rangle$

$$iG(\bar{x}t, \bar{x}'t') = \sum_{\bar{k}} \Big\{ \theta(t-t') \langle \Psi_0 | \psi(\bar{x}t) | \bar{k}\rangle\langle \bar{k} | \psi^+(\bar{x}'t') | \Psi_0\rangle$$

$$\pm\, \theta(t'-t) \langle \Psi_0 | \psi^+(\bar{x}'t') | \bar{k}\rangle\langle \bar{k} | \psi(\bar{x}t) | \Psi_0\rangle \Big\}$$

notum

$$\psi(\bar{x}t) = e^{iHt/\hbar}\, \psi(\bar{x})\, e^{-iHt/\hbar}$$

Schrödingermynd

$\longrightarrow$

$$iG(\bar{x}t, \bar{x}'t') = \sum_{k} \Big\{ \theta(t-t')\, e^{-i(E_k - E_0)(t-t')/\hbar} \langle \Psi_0 | \psi(\bar{x}) | \bar{k}\rangle\langle \bar{k} | \psi^+(\bar{x}') | \Psi_0\rangle$$

$$\pm\, \theta(t'-t)\, e^{i(E_k - E_0)(t-t')/\hbar} \langle \Psi_0 | \psi^+(\bar{x}') | \bar{k}\rangle\langle \bar{k} | \psi(\bar{x}) | \Psi_0\rangle \Big\}$$

Ef $|\Psi_0\rangle$ er ástand N-agna þá er greinilegt að $|k\rangle$ er ástand $N\pm1$-agnar

---

nota fourier umformun

$$G(\bar{x},\bar{x}',\omega) = \int d(t-t')\, e^{i\omega(t-t')}\, G(\bar{x},\bar{x}';t-t')$$

$$= \hbar \sum_{k} \left\{ \frac{\langle\Psi_0|\Psi(\bar{x})|k\rangle\langle k|\Psi^{\dagger}(\bar{x}')|\Psi_0\rangle}{\hbar\omega - (E_k - E_0) + i\eta} \mp \frac{\langle\Psi_0|\Psi^{\dagger}(\bar{x}')|k\rangle\langle k|\Psi(\bar{x})|\Psi_0\rangle}{\hbar\omega + (E_k - E_0) - i\eta} \right\}$$

$\pm i\eta$ part t.þ.a. fourier umformunin sé með vissu samleitin

$(E_k - E_0)$ er orkan sem það kostar að bæta við eða fjarlægja eina eind úr kerfinu

þessi orka tengist örvana orkunni, en mismunandi fyrir bóseindir og fermíeindir

<u>athugum Fermíeindir</u>

eindafjöldi, gatvarið N-1

$$(E_k - E_0) \overset{\text{t.d.}}{=} (E_k(N+1) - E_0(N))$$

$$= (E_k(N+1) - E_0(N+1)) + (E_0(N+1) - E_0(N))$$

$$= \Delta E_k(N+1) \quad \leftarrow \text{\underline{Örvana orka}}$$

$$+ \mu(N) + O(\tfrac{1}{N}) \quad \leftarrow \text{\underline{efnamætti}}$$

Heppilegt er að skilgreina

$$iG^R(\bar{x}t,\bar{x}'t') \equiv \langle\Psi_0|\left[\psi(\bar{x}t),\psi^+(\bar{x}'t')\right]_\pm|\Psi_0\rangle\theta(t-t')$$

$$iG^A(\bar{x}t,\bar{x}'t') \equiv \pm\langle\Psi_0|\left[\psi(\bar{x}t),\psi^+(\bar{x}'t')\right]_\pm|\Psi_0\rangle\theta(t'-t)$$

sem seinkaða og flýtta Greensfallið.

sama má

$$\mathrm{Re}\, G^{R,A}(\bar{x}\bar{x}';\omega) = \mp\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega'}{\pi}\frac{\mathrm{Im}\,G^{R,A}(\bar{x}\bar{x}';\omega')}{\omega-\omega'}$$

o.s.fr.

En hvaða jöfnur eru til fyrir G

Hvernig má finna G

Hreyfingarjafna

$$i\hbar\partial_t\psi(\bar{x}t) = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V_0(x)\right\}\psi(\bar{x},t)$$

$$+\left\{\int d\bar{y}\,\psi^+(\bar{y}t)V(\bar{y},\bar{x})\psi(\bar{y}t)\right\}\psi(\bar{x}t)$$

athugum fyrir G

$$i\hbar\partial_t G(\bar{x}t,\bar{x}'t') = +\hbar\langle\Psi_0|\partial_t\{\theta(t-t')\psi(\bar{x}t)\psi^+(\bar{x}'t')$$

$$\pm\theta(t'-t)\psi^+(\bar{x}'t')\psi(\bar{x}t)\}|\Psi_0\rangle$$

$$= +\hbar\langle\Psi_0|\{\delta(t-t')\psi(\bar{x}t)\psi^+(\bar{x}'t') + \theta(t-t')(\partial_t\psi(\bar{x}t))\psi^+(\bar{x}'t')$$

$$\mp\delta(t'-t)\psi^+(\bar{x}'t')\psi(\bar{x}t) \pm\theta(t'-t)\psi^+(\bar{x}'t')\partial_t\psi(\bar{x}t)\}|\Psi_0\rangle$$

$$= \hbar\delta(t-t')\delta(\bar{x}-\bar{x}') + \hbar\langle\Psi_0|T(\partial_t\psi(\bar{x}t)\cdot\psi^+(\bar{x}'t'))|\Psi_0\rangle$$

þá fæst

$$\left\{ i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_0(x) \right\} G(\bar{x}t, \bar{x}'t')$$

$$= \hbar\delta(t-t')\delta(\bar{x}-\bar{x}') \pm i \int d\bar{y}\, V(\bar{y},\bar{x}) G(\bar{x}t, \bar{y}t; \bar{x}t, \bar{y}t^+)$$

þannig tengist 1 eindar Greens fall
2 einda Greensfalli, 2 einda Gr-fall
tengist 3 einda G-falli o.s.fr.

Hér þarf því nálgun til þess að
klippa á keðjuna

hér er ástæðan fyrir
nafngiftinni Greens fall

Hvernig er G reiknað

Lausleg frásögn

Kveikt á víxlverkun (adiabatic)

$$H = H_0 + e^{-\epsilon|t|} H_1$$

tímaháður → notast við víxlverkunarmynd
tímaþróun:

$$|\Psi_I(t)\rangle = U_\epsilon(t,t_0)|\Psi_I(t_0)\rangle$$

með

$$U_\epsilon(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t} dt_n$$

$$\cdot\, e^{-\epsilon(|t_1| + \cdots + |t_n|)} T\left[H_1(t_1) \cdots H_1(t_n)\right]$$

Sem var lausn á

$$i\hbar\partial_t U(t,t_0) = H_1(t)U(t,t_0)$$