

## 09.21.54 Skammtafræði I

Fimmtudaginn 16. desember 1999, kl. 14-17.

**Leyfileg hjálpargögn eru: Vasatölva, allar bækur, nótur og dæmi.**

**Leysið þrjú dæmi af fjórum!**

1. Í sígildri eðlisfræði er oft unnið með Lagrangefall. Í skammtafræði er samsvarandi virki fyrir hreintóna sveifil

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 \mathbf{X}^2$$

- (a) Skrifð  $\mathcal{L}$  sem fall af tröppuvirkjunum  $a^\dagger$  og  $a$ .
- (b) Er  $\mathcal{L}$  sjálfoka virki?
- (c) Reiknið væntigildi  $\mathcal{L}$

$$\langle \mathcal{L} \rangle(t) = \langle \alpha(t) | \mathcal{L} | \alpha(t) \rangle$$

í samfasa ástandinu  $|\alpha(t)\rangle$  sem fall af tíma.

- (d) Berið niðurstöðurnar úr liðnum á undan saman við væntigildi virkja Hamiltons  $H$  fyrir sama ástand. Hvernig má skilja muninn?
2. Straumur agna með massa  $m$  og orku  $E$  beinist að skotmarki sem lýst er með mættinu

$$V(r) = -V_0 e^{-r^2/a^2} .$$

- (a) Reiknið deildaþversnið skotmarksins með fyrsta stigs Born-nálgun.
- (b) Áætlið fasavik skotmarksins fyrir  $s$ -bylgju með því að nálga mættið sem kúlulaga mættisbrunn með geisla  $a$  og dýpt  $V_0$ . Notið útkomuna til að reikna nálgun við deildaþversnið skotmarksins.
- (c) Berið saman niðurstöður þessara tveggja nálgana. Fyrir hvaða gildi á  $E$  er hvor nálgun um sig góð?

3. (a) Frjálsum snúði er lýst með Hamiltonvirkjanum

$$H_0 = \frac{1}{2\mathcal{I}} \mathbf{L}^2,$$

þar sem  $\mathcal{I}$  er hverfitregða snúðsins og  $\mathbf{L}$  er hverfipungavirkinn.

- i. Finnið litróf  $H_0$  og margfeldni eigingildanna.
- ii. Finnið litróf og margfeldni eigingilda snúðsins í segulsviði  $\mathbf{B} = B_0\hat{z}$  ef segulvægi hans er  $\vec{\mu} = \gamma\mathbf{L}$ .
- iii. Finnið litróf og margfeldni eigingilda snúðsins ef hann víxlverkar við mættið

$$W = \frac{\alpha}{2\mathcal{I}} L_x^2, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

í stað segulsviðsins.

- (b) Skoðum nú snúð sem er bæði í segulsviði eins og í lið (a)–(ii) og víxlverkar við mættið í lið (a)–(iii). Notið tímaóháðan truflanareikning til að reikna fyrsta stigs leiðréttingu við orku grunnástands og orku fyrsta örvaða ástands snúðsins í tveimur marktilfellum:

- i. Þegar  $\alpha \ll 1$  en  $|\gamma|B_0 \sim \hbar/2\mathcal{I}$ .
- ii. Þegar  $\alpha \sim 1$  en  $|\gamma|B_0 \ll \hbar/2\mathcal{I}$ .

4. Ögn með massa  $m$  hreyfist í mættinu

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2ma^3} |x|.$$

- (a) Finnið orkulitróf kerfisins í WKB nálgun.
- (b) Notið hnikunaraðferðina til að reikna efri mörk á orku grunnástandsins með hnikunarfalli af gerðinni

$$\psi_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|},$$

með  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

- (c) Í framhaldi af (b)–lið reiknið efri mörk á orku fyrsta örvaða ástandsins með hnikunaraðferðinni.