Háskóli Íslands
Raunvísindadeild
Eðlisfræðiskor

09.21.54 Skammtafræði I

Föstudaginn 19. desember 1997, kl. 9-13.

Leyfileg hjálpargögn eru: Vasatölva, allar bækur, nótur og dæmi.

Leysið fjögur dæmi af fimm!

1. Tímaþróunarvirki einvíðs hreintóna sveifils er

$$U(t,0) = \exp\left(-iHt/\hbar\right),$$

með

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

(a) Athugum virkjana

$$\begin{aligned} \tilde{a}(t) &= U^\dagger(t,0)\, a\, U(t,0) \\ \tilde{a}^\dagger(t) &= U^\dagger(t,0)\, a^\dagger\, U(t,0). \end{aligned}$$

Finnið hvernig tákna má þessa virkja við upphaflegu virkjana a og $a^\dagger$ með því að skoða hvað gerist þegar þeir verka á eiginástönd H, $|\phi_n\rangle$.

(b) Finnið virkjana $\tilde{X}(t)$ og $\tilde{P}(t)$ skilgreinda sem

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t) &= U^\dagger(t,0)\, X\, U(t,0) \\ \tilde{P}(t) &= U^\dagger(t,0)\, P\, U(t,0). \end{aligned}$$

Hvernig er hægt að túlka þessar jöfnur?

(c) Sýnið að ástandið

$$U^\dagger\left(\frac{\pi}{2\omega}, 0\right)|x\rangle$$

sé eiginástand virkjans P og finnið eigingildi þess.

(d) Sýnið að ástandið

$$U^\dagger\left(\frac{\pi}{2\omega}, 0\right)|p\rangle$$

sé eiginástand virkjans X og finnið eigingildi þess.

(e) Klukkan $t = 0$ er ástandi sveifilsins lýst með bylgjufallinu $\psi(x, 0)$. Hvernig er hægt að finna bylgjufall sveifilsins á öllum seinni tímum $t_q = q\pi/(2\omega)$ út frá $\psi(x, 0)$ ef q er náttúruleg tala?

2. Ástandi rafeindar er lýst með bylgjufallinu

$$\psi_k(x) = u_k(x) \exp(ikx),$$

þar sem $u_k(x+L) = u_k(x)$. Vegna lotubindingarinnar má skrifa u_k sem Fourier-röð

$$u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-N}^{N} c_n \exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right).$$

Rafeindinn verður fyrir ytri truflun $V(t) = V_0 \exp(-i\omega t)$.

(a) Sannið að valreglur kerfisins séu að $\Delta k = k' - k = 2\pi n/L$, með $n \in \mathbf{Z}$.

(b) Hvernig eru valreglurnar fyrir ytri truflun á forminu $V(t) = V_0 \exp(iqx - i\omega t)$.

3. Notið nálgun Borns til þess að reikna diffurþversnið eftirtaldra þrívíðra mætta:

(a) $V(\mathbf{r}) = \exp(-\alpha r)\cos^2\theta$.

(b) $V(\mathbf{r}) = \exp(-\alpha r)\cos^2\phi$.

(c) $V(r) = \exp(-\alpha r)$.

(d) Ræðið mun þessara tilvika.

4. Kerfi er lýst með Hamilton-virkjanum $H_0 + H_I$ þar sem $H_0 = AJ_z^2$ og $H_I = \lambda A(J_x^2 - J_y^2)$. Athugum kerfið fyrir tilvikið $j = 1$.

(a) Finnið orkuróf og eiginástönd H_0.

(b) Reiknið orkuróf og eiginástönd H með aðferð fyrir fyrsta stigs truflun.

(c) Reiknið orkuróf og eiginástönd með hnikareikningi.

(d) Finnið rétt orkuróf og eiginástönd með nákvæmri aðferð.

5. Tveir einvíðir orkubrunnar A og B með sömu endanlegu dýpt og breidd eru staðsettir á samhverfan hátt sitt hvoru megin við $x = 0$. Hamiltonvirki eindar í kerfinu er

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_A + V_B.$$

(a) Notið hnikareikning til þess að finna grunnástand kerfisins með reynslulausninni $\psi(x, \lambda) = \cos(\lambda)\psi_A(x) + \sin(\lambda)\psi_B(x)$, þar sem ψ_A og ψ_B eru staðlaðar eiginlausnir kerfa með aðeins einum brunni:

$$\begin{aligned}\left(-\tfrac{\hbar^2}{2m}\tfrac{d^2}{dx^2} + V_A\right)\psi_A &= E\psi_A \\ \left(-\tfrac{\hbar^2}{2m}\tfrac{d^2}{dx^2} + V_B\right)\psi_B &= E\psi_B.\end{aligned}$$

Sýnið að væntigildi H hafi lágmark þegar $\lambda = \pm\pi/4$ og lággildið sé

$$E + \langle A|V_B|A\rangle \pm \frac{1}{2}\langle A|H|B\rangle = E + \langle B|V_A|B\rangle \pm \frac{1}{2}\langle B|H|A\rangle.$$

(b) Hvort formerkið gefur lægri orku?

(c) Reynslubylgjufallið er aðeins staðlað ef $\langle A|B\rangle = 0$. Þetta skilyrði er ekki uppfyllt hér, en líklegt er að $\langle A|B\rangle$ sé lítil stærð. Hvers vegna?

(d) Kannið samhverfu lausnanna.

(e) Sýnið að samhverfan breytist ekki þó gert væri ráð fyrir því að $\langle A|B\rangle = 0$.