Háskóli Íslands
Raunvísindadeild
Námsbraut í eðlisfræði

EÐL401G Rafsegulfræði 1

Þriðjudaginn 28. apríl 2015, kl. 09:00-12:00. Kennari: Viðar Guðmundsson.

Leyfileg hjálpargögn eru skriffæri, vasareiknivél, og kennslubókin: „Field and Wave Electromagnetics“ eftir David K. Cheng ásamt nótum kennara og nemanda.

Í prófinu eru 5 verkefni sem öll vega jafnt. Skrifið skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefnin eru lögð fyrir á íslensku og ensku.

1. **Íslenska**:

   (a) Hugsum okkur skilflöt tvenns konar efnis. Í rafstöðufræði höfum við notað $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ til þess að leiða út að þáttur rafsviðsins samsíða skilfletinum sé samfelldur við hann. Í rafsegulfræði gildir hins vegar að $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$, lögmál Faradays. Hvernig getum við enn krafist að þáttur rafsviðsins samsíða skilfletinum sé samfelldur við hann í rafsegulfræði?

   (b) Í rafsegulfræði eru leiddar út bylgjujöfnur fyrir mættin $\mathbf{A}$ og V. Sýnið að í seinkuðu lausnum þeirra er seinkunin háð efninu sem rafsegulbylgjan berst um.

   English:

   (a) Imagine the interface of two different materials. In electrostatics we have used $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ to derive that the component of the electric field parallel to the interface must be continuous across it. In electordynamics we have instead the Faraday law $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$. How can we still request the component of the electric field parallel to the interface to be continuous in electrodynamics?

   (b) In electrodynamics we derive wave equations for the potentials $\mathbf{A}$ and V. Show that in the retarded solutions the retardation depends on the material the electromagnetic wave propagates through.

2. **Íslenska**: Örsmáu raftvískauti með vægi $\mathbf{p} = p_0\mathbf{a}_z$ er komið fyrir í miðju kúlulaga holrúmi með geisla a í stórum jarðbundnum kjörleiðara.

   (a) Tilgreinið jaðarskilyrði rafstöðumættisins í holrúminu.

   (b) Finnið rafstöðumættið innan holrúmsins.

   (c) Finnið yfirborðshleðsludreifinguna sem skautast á vegg holrúmsins.

   (d) Hver er heildaryfirborðshleðslan?

   (e) Hvert er tvískautsvægi yfirborðshleðslunnar?

   English: Microscopic electrical dipole with momentum $\mathbf{p} = p_0\mathbf{a}_z$ is placed at the center of a spherical cavity with radius a in a large ideal grounded conductor.

   (a) State the boundary conditions for the electrostatic potential in the cavity.

   (b) Find the electrostatic potential inside the cavity.

   (c) Find the surface charge density polarized on the wall of the cavity.

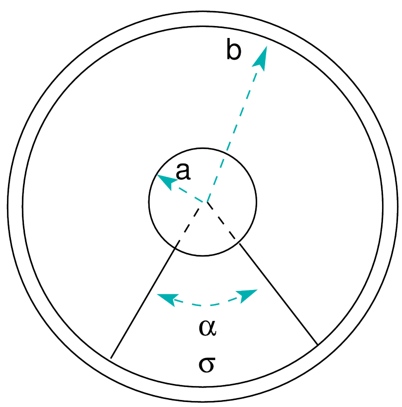
   (d) What is the total surface charge?

   (e) What is the dipole momentum of the surface charge density?

3. **Íslenska**: Flatur leiðari samsíða x-y-sléttunni með z-hnit takmarkað milli $z = -a$ og $z = a$ ber frjálsan straumþéttleika $\mathbf{J} = J_0\mathbf{a}_x$. Leiðarinn er með segulviðtak $\chi_m = 0$. Utan leiðarans er línulega seglandi efni með viðtak $\chi_m \neq 0$. Finnið alls staðar $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$ og jafngilda seglunarstrauma.

   English: Flat conductor parallel to the x-y-plane with z-coordinates restricted between $z = -a$ and $z = a$ carries a free current density $\mathbf{J} = J_0\mathbf{a}_x$. The conductor has magnetic susceptibility $\chi_m = 0$. Outside the conductor is a linear magnetic material with susceptibility $\chi_m \neq 0$. Find everywhere $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$ and the equivalent magnetization currents.

4. **Íslenska**: Samásakapall er gerður þannig að milli miðleiðarans og ytri skeljarinnar er rafsvarandi efni. Rafsvarinn er einangrandi nema sneið með hornið α er með eðlisleiðnina σ. Finnið leiðni kapalsins á lengdareiningu.



   English: Coaxial cable is made with a dielectric filling the cavity between the central conductor and the outer conducting shell. The dielectric is insulating except for a slice with the angle α that has the conductivity σ. Find the conductance of the cable per unit length.

5. **Íslenska**: Við höfum leitt út vigurmættið og segulflæðisviðið fyrir segultvískaut með geisla b sem liggur í x-y-sléttu sem

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 m}{4\pi R^2} \sin\theta, \qquad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}(\mathbf{a}_R 2\cos\theta + \mathbf{a}_\theta \sin\theta).$$

Segulvægið er $m = I\pi b^2$. Með því að skilgreina segulvægið sem vigur þvert á flöt tvískautsins, $\mathbf{m} = I\mathbf{s}$, þar sem $\mathbf{s}$ er vigur með „lengd" flatarmáls tvískautsins og stefnu þvert á flöt þess, er hægt að fá óháð hnitum

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} \mathbf{m} \times \mathbf{a}_R.$$

(a) Sýnið að segulflæðisviðið megi rita óháð hnitum sem

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi R^3}[3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{a}_R)\mathbf{a}_R - \mathbf{m}],$$

þar sem $\mathbf{R}$ er staðsetning athuganda miðað við segultvískautið.

(b) Hugsum okkur nú tvö örsmá segultvískaut með $\mathbf{s}_1$ og $\mathbf{s}_2$. Tvískaut 2 er staðsett með vigrinum $\mathbf{R}$ frá skauti 1. Sýnið að víxlspan þeirra sé

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi R^3}[3(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{a}_R)(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{a}_R) - \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2].$$

Víxlverkunarorka tveggja segultvískauta er $U = MI_1I_2$. Því er hægt að skilgreina Hamilton-virkja þeirra sem $H = U$, eða

$$H = \frac{\mu_0}{4\pi R^3}[3(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{a}_R)(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{a}_R) - \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2].$$

(Þegar víxlverkun tveggja spuna er könnuð fæst sami Hamiltonvirki en með öfugu formerki. Þar þarf ekki að taka tillit til orkunnar sem viðheldur spununum sjálfum).

English: We have derived the vector potential and the magnetic flux density for a magnetic dipole with radius b lying in the x-y-plane as

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 m}{4\pi R^2} \sin\theta, \qquad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}(\mathbf{a}_R 2\cos\theta + \mathbf{a}_\theta \sin\theta).$$

The magnetic momentum is $m = I\pi b^2$. By defining the momentum as a vector perpendicular to the plane of the dipole, $\mathbf{m} = I\mathbf{s}$, where $\mathbf{s}$ is a vector with "length" the area of the dipole and direction perpendicular to its plane, it is possible to get independent of coordinates

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi R^2}\mathbf{m} \times \mathbf{a}_R.$$

(a) Show that the magnetic flux density can be written independent of coordinates as

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi R^3}[3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{a}_R)\mathbf{a}_R - \mathbf{m}],$$

where $\mathbf{R}$ is the position of the observer with respect to the magnetic dipole.

(b) Now, imagine two microscopic magnetic dipoles with $\mathbf{s}_1$ and $\mathbf{s}_2$. Dipole 2 is positioned by the vector $\mathbf{R}$ relative to dipole 1. Show that their mutual inductance is

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi R^3}[3(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{a}_R)(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{a}_R) - \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2].$$

The interaction energy of two magnetic dipoles is $U = MI_1I_2$. Thus is possible to define their Hamiltonian as $H = U$, or

$$H = \frac{\mu_0}{4\pi R^3}[3(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{a}_R)(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{a}_R) - \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2].$$

(When the interaction of two spins is explored we get the same Hamiltonian, but with opposite sign. There we need not to consider the energy necessary to maintain the spins themselves).