

RAF402G Rafsegulfræði 1

Miðvikudaginn 10. maí 2011, kl. 09:00-12:00.

Leyfileg hjálpargögn eru skriffæri, hringfari, vasareiknivél, og kennslubókin: „Field and Wave Electromagnetics“ eftir David K. Cheng.

Í prófinu eru 6 verkefni sem öll vega jafnt. Leysa skal 5 verkefni. Ef nemandi reynir við 6 verkefni er einkunn reiknuð úr 5 bestu lausnunum. Skrifðu skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefnin eru lögð fyrir á íslensku og ensku. Vinsamlegast skilið Smith-kortinu með lausninni.

1. **Íslenska:** Sívalningsþéttir er myndaður úr beinum málmvír með radius a og þunnum málmhólki með radius $5a$. Þeir eru sammiðja og mjög langir. Á milli þeirra er allsstaðar einangrandi efni með hlutfallslegan rafsvörunarstuðul $\epsilon_r = 3$. Á yfirborði vírsins er jafndreifð hleðsla $+\rho_l$ Coulomb per lengdarmetra og á hólknunum eru $-\rho_l$ Coulomb per lengdarmetra, $\rho_l > 0$. Hólkurinn er jarðtengdur, þ. e. við rafspennuna (mættið) $V = 0$.
 - (a) Leiðið út formúlur fyrir rafsviðinu \mathbf{E}_r og orkuþéttleikanum w_e sem föllum af r (þ. e. fjarlægð frá miðju vírsins) fyrir $r = a$ til $5a$. Finnið einnig spennuna V fyrir $r = 0$ til $5a$.
 - (b) Helmingurinn af rafstöðuorku þéttisins er geymdur í rýminu milli $r = a$ og $r = x$, hinn helmingurinn í rýminu milli $r = x$ og $r = 5a$. Finnið x .
 - (c) Finnið stærð og stefnu vektorsins \mathbf{P} (e. polarization) í einangrandi efninu rétt utan vírsins (við $r = a$) og um leið þéttleika bundinnar rafhleðslu á innra yfirborði einangrandi efnisins.

English: A cylindrical capacitor is formed from a straight metal wire with radius a and a thin grounded metal sheath of radius $5a$. They are concentric and very long. The space between them is filled with a dielectric material having relative permittivity $\epsilon_r = 3$. At the surface of the wire there is a uniformly distributed charge of $+\rho_l$ Coulomb per meter length, and the sheath carries a charge of $-\rho_l$ Coulomb per meter.

- (a) Derive formulas for the electrical field \mathbf{E}_r and the energy density w_e as functions of r (i. e., the distance from the center of the wire) between $r = a$ and $r = 5a$. Also find the electric potential V for r between 0 and $5a$.

- (b) Half of the electrical energy of the capacitor is stored in the space between $r = a$ and $r = x$, the other half between $r = x$ and $r = 5a$. Find x .
- (c) Find the magnitude and direction of the polarization vector \mathbf{P} in the dielectric at $r = a$ just outside the wire, and also the surface density of bound charge on the inner surface of the dielectric.

2. **Íslenska:** Þunn kúluskel með miðju í O hefur radius b . Á yfirborði hennar er jafndreifð raffhleðsla Q . Hún er látin snúast um sjálfa sig með jöfnum hornhraða $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{a}}_z$. Finnið segul-tvískautsvægi kúluskeljarinnar, \mathbf{m} , til dæmis með því að skipta henni upp í mjóar gjarðir og nota að hleðslan dQ á hverri gjörð samsvarar hringstraumi $dQ\omega/2\pi$. (Ábending: ef finna þarf $\int \sin^3 \theta d\theta$, má skrifa það sem $\int (\cos^2 \theta - 1)d(\cos \theta)$).

English: A thin hollow spherical shell with its center at O has radius b . It carries a uniformly distributed charge Q . The shell rotates with a steady angular velocity $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{a}}_z$. Find the magnetic dipole moment, \mathbf{m} , of the spherical shell, by for instance viewing it as a collection of thin hoops each with a charge dQ and equivalent current $dQ\omega/2\pi$. (Note: If it is required to integrate the expression $\int \sin^3 \theta d\theta$, it may be written as $\int (\cos^2 \theta - 1)d(\cos \theta)$).

3. **Íslenska:** Rafsegul-planbylgja fellur úr tómarúmi á slétt yfirborð sjávar, sem hefur hlutfallslegan rafsvörunarstuðul $\epsilon_r = 80$ og (eðlis)rafleiðni $\sigma = 4 \text{ S/m}$. ϵ_0 er $10^{-9}/36\pi = 8.85 \times 10^{-12}$ og μ_0 er $4\pi \times 10^{-7}$, bæði í viðeigandi SI-einingum.
- (a) Sýnið fram á að ef tíðni bylgjunnar er $f = 10 \text{ MHz}$, megi sjórinn kallast „góður leiðari“.
- (b) Finnið stærðina β_1 fyrir bylgjuna í tómarúminu og stærðina β_2 fyrir bylgju með sömu tíðni niðri í sjónum.
- (c) Bylgjan er látin falla á ská á sjávarflötinn, með innfallshorni θ_i frá lóðlínu, og brothorn hennar niðri í sjónum er θ_t . Rökstyðjið (með hliðsjón af teikningu eða á annan hátt), að $\beta_1 \sin \theta_i = \beta_2 \sin \theta_t$, og sýnið fram á að θ_t í þessu tilviki verði um 1° ef θ_i er 80° .

English: A plane electromagnetic wave impinges from vacuum on the flat surface of the ocean. Seawater has a relative electric permittivity of $\epsilon_r = 80$ and a conductivity of $\sigma = 4 \text{ S/m}$. ϵ_0 is $10^{-9}/36\pi = 8.85 \times 10^{-12}$ and μ_0 is $4\pi \times 10^{-7}$, both in SI units.

- (a) Show that if the frequency of the wave is $f = 10 \text{ MHz}$, the seawater may be called a “good conductor”.
- (b) Find the quantity β_1 for the wave in vacuum and β_2 for a wave with the same frequency in the ocean.

- (c) Let the wave impinge obliquely on the ocean surface, at an angle of incidence θ_i . Then its angle of refraction will be θ_t . Demonstrate (with reference to a drawing, or otherwise) that $\beta_1 \sin \theta_i = \beta_2 \sin \theta_t$, and show that if θ_t is 80° then θ_i will be about 1° .

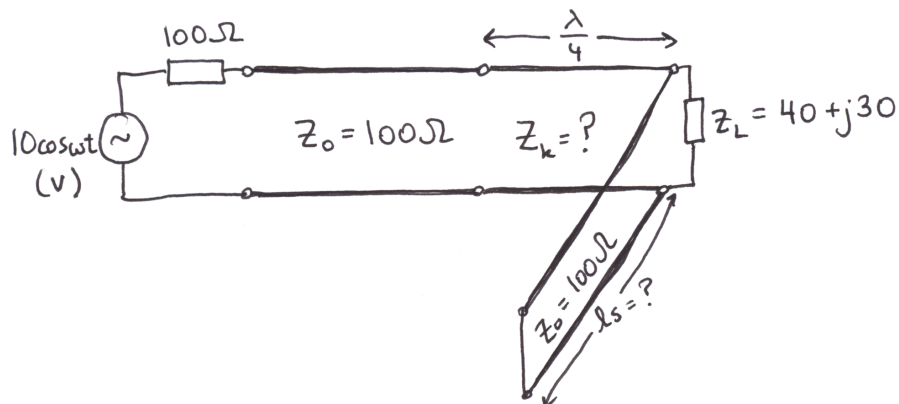
4. **Íslenska:** Rafsegulbylgja með tíðni $f = 10$ GHz berst í sveifluhætti TE_1 í $+z$ -átt milli tveggja fullkomlega leiðandi samsíða plata við $y = 0$ og $y = b = 0.03$ m, í lofti.

- (a) Finnið gildið á marktíðninni f_c fyrir þennan sveifluhátt og gildið á stærðinni β fyrir bylgjuna milli platanna.
- (b) Sýnið fram á að Poynting-vektorinn mitt á milli platanna sé (að meðaltali yfir eina sveiflu) að stærð $(E_0^2/(2\eta_0))(\sqrt{(1 - (f_c/f)^2)})$. E_0 er útslag (e. amplitude) rafsviðsins þar. Áætlið síðan hve mikið afl eins metra breið (í x -átt) ræma af plötunum geti flutt, ef E_0 má ekki vera meira en 3×10^6 V/m.

English: An electromagnetic wave with frequency $f = 10$ GHz is travelling in the $+z$ direction in TE_1 mode between two perfectly conducting plates in air. The plates are at $y = 0$ and $y = b = 0.03$ m.

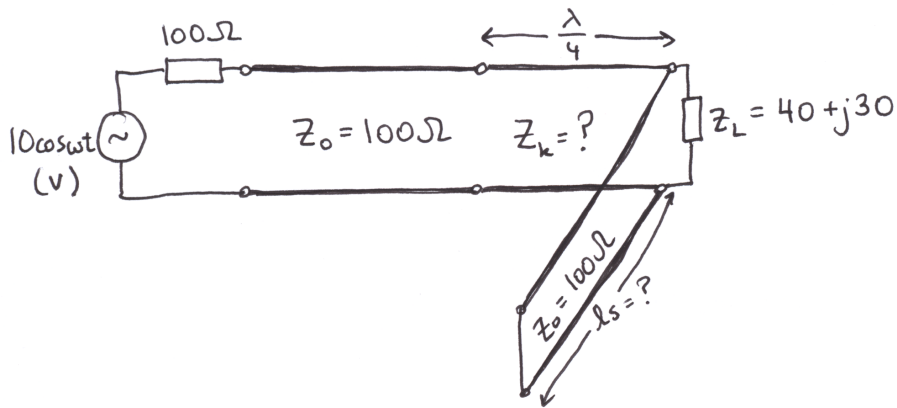
- (a) Find the cutoff frequency f_c for this mode and the value of the quantity β for the wave between the plates.
- (b) Show that (on average over one period of oscillation) the Poynting vector at $y = b/2$ has the magnitude $(E_0^2/(2\eta_0))(\sqrt{(1 - (f_c/f)^2)})$. E_0 is the amplitude of the electrical field at $y = b/2$. Then estimate the maximum power that can be transmitted by such a pair of plates if they are one meter wide in the x -direction. E_0 must not exceed 3×10^6 V/m.

5. **Íslenska:** Nota skal bæði skammhleypant nút af lengd l_s , og kvartbylgjubút, með kenniviðnám Z_k , til að aðhæfa álag Z_L sem mælist $(40 + j30) \Omega$. Aðallínan og skammhleypiti búturinn hafa kenniviðnám $Z_0 = 100 \Omega$, sjá mynd.



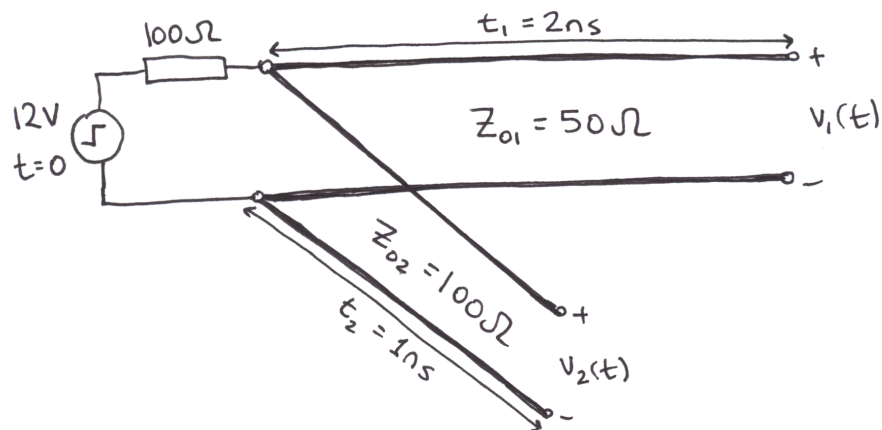
- (a) Hver er almenn skilgreining á því að lína og álag séu aðhæfð? Til hvers eru línur og álög aðhæfð? Hvað þarf að gilda hér til að lína og álag séu aðhæfð?
- (b) Finnið l_s og Z_k (kvarthylgjulínan er taplaus) til að aðhæfa línuna.
- (c) Hvert er meðalaflið sem eyðist í álaginu?

English: A combination of a shorted stub of length l_s , and a quarter wave line of characteristic impedance Z_k , are to be used to match a feedline to a complex load, Z_L , measuring $(40 + j30) \Omega$, see image



- (a) What is the general definition of a matched line? Why is it important to match a line to a load? What has to hold here so that the line is matched?
- (b) Find l_s and Z_k (the quarter-wave line is lossless) to achieve a match.
- (c) What is the total time-average power dissipated in the load?

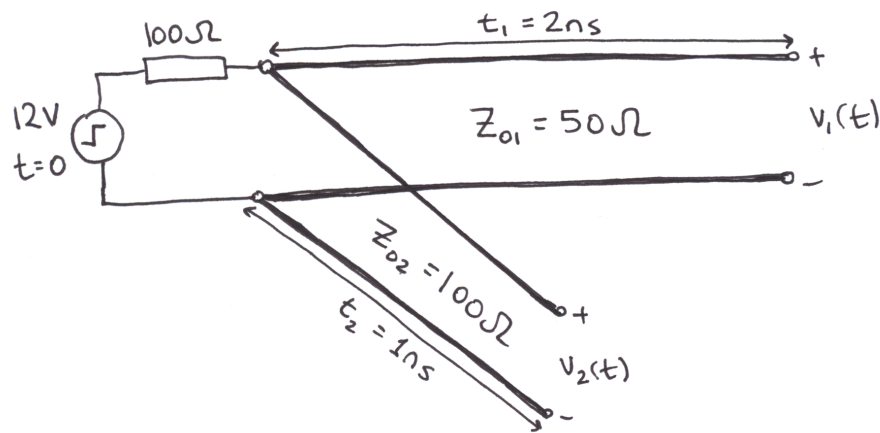
6. **Íslenska:** Gefin er eftirfarandi taplaus uppsetning merkjaflutningslína



Merkið frá spennugjafanum er gefið með $v(t) = 12u(t)$ V, og t_1 og t_2 gefa hversu langan tíma það tekur merki að ferðast aðra leið eftir línunni.

- Finnið innspennuna inn á línurnar í $t = 0^+$ (rétt eftir að spennan fer úr 0 í 12 V).
- Reiknið endurvarpsstuðla hvorrar línu við álag og aflgjafa (séð frá línunni).
- Þegar spennumerki kemur frá álagi að línunótum (við aflgjafann), þá endurvarpast hluti þess, en hluti sendist yfir á hina línuna. Sendistuðull línu er $\tau = 1 + \Gamma$. Finnið sendistuðla línanna við aflgjafann (séð frá línunni).
- Notið þessar upplýsingar til að teikna endurvarpsmyndir fyrir hvora línu fyrir sig, fyrir $0 \leq t \leq 8$ ns. Merkið ásana, og reiknið spennugildin. (Hér getur verið gott að teikna endurvarpsmyndirnar hlið við hlið).
- Skissið spennugildin $v_1(t)$ og $v_2(t)$ fyrir $0 \leq t \leq 8$ ns. Merkja skal inn öll tölugildi á báðum ásum, og sýna skýrt hvaða gildi eiga við hvar.
- Á hvaða gildi stefna $v_1(t)$ og $v_2(t)$ í æstæði (t stefnir á $+\infty$)?

English: Consider the lossless transmission line system shown in the figure.



The voltage source signal is $v(t) = 12u(t)$ V, and t_1 and t_2 are one way travel-times along the line.

- Find the voltage at the beginning of the lines at $t = 0^+$ (just after the voltage has gone from 0 to 12 V).
- Calculate the reflection coefficients for each line, both at the load and by the voltage source (as seen from each line).
- When a voltage signal arrives at the line junction (by the voltage source), having traveled from the load, a portion is reflected and a portion is transmitted forward on to the other line. The transmission coefficient is given by $\tau = 1 + \Gamma$. Find the transmission coefficients for each line.

- (d) Use this information to draw voltage reflection-diagrams for each line for $0 \leq t \leq 8$ ns. Label axes and mark in voltage values. (Here, it may be helpful to draw the diagrams side-by-side).
- (e) Sketch the voltages $v_1(t)$ og $v_2(t)$ for $0 \leq t \leq 8$ ns. Label both axes, and mark in voltage values.
- (f) What are the steady-state values of $v_1(t)$ og $v_2(t)$ (as t goes to $+\infty$)?

