

## EÐL401G Rafsegulfræði 1

Miðvikudaginn 10. maí 2011, kl. 09:00-12:00.

Leyfileg hjálpargögn eru skriffæri, hringfari, vasareiknivél, og kennslubókin: „Field and Wave Electromagnetics“ eftir David K. Cheng.

Í prófinu eru 6 verkefni sem öll vega jafnt. Leysa skal 5 verkefni. Ef nemandi reynir við 6 verkefni er einkunn reiknuð úr 5 bestu lausnunum. Skrifðu skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefnin eru lögð fyrir á íslensku og ensku.

1. **Íslenska:** Sívalningsþéttir er myndaður úr beinum málmvír með radius  $a$  og þunnum málmhólki með radius  $5a$ . Þeir eru sammiðja og mjög langir. Á milli þeirra er allsstaðar einangrandi efni með hlutfallslegan rafsvörunarstuðul  $\epsilon_r = 3$ . Á yfirborði vírsins er jafndreifð hleðsla  $+\rho_l$  Coulomb per lengdarmetra og á hólknunum eru  $-\rho_l$  Coulomb per lengdarmetra,  $\rho_l > 0$ . Hólkurinn er jarðtengdur, þ. e. við rafspennuna (mættið)  $V = 0$ .
  - (a) Leiðið út formúlur fyrir rafsviðinu  $\mathbf{E}_r$  og orkuþéttleikanum  $w_e$  sem föllum af  $r$  (þ. e. fjarlægð frá miðju vírsins) fyrir  $r = a$  til  $5a$ . Finnið einnig spennuna  $V$  fyrir  $r = 0$  til  $5a$ .
  - (b) Helmingurinn af rafstöðuorku þéttisins er geymdur í rýminu milli  $r = a$  og  $r = x$ , hinn helmingurinn í rýminu milli  $r = x$  og  $r = 5a$ . Finnið  $x$ .
  - (c) Finnið stærð og stefnu vektorsins  $\mathbf{P}$  (e. polarization) í einangrandi efninu rétt utan vírsins (við  $r = a$ ) og um leið þéttleika bundinnar rafhleðslu á innra yfirborði einangrandi efnisins.

**English:** A cylindrical capacitor is formed from a straight metal wire with radius  $a$  and a thin grounded metal sheath of radius  $5a$ . They are concentric and very long. The space between them is filled with a dielectric material having relative permittivity  $\epsilon_r = 3$ . At the surface of the wire there is a uniformly distributed charge of  $+\rho_l$  Coulomb per meter length, and the sheath carries a charge of  $-\rho_l$  Coulomb per meter.

- (a) Derive formulas for the electrical field  $\mathbf{E}_r$  and the energy density  $w_e$  as functions of  $r$  (i. e., the distance from the center of the wire) between  $r = a$  and  $r = 5a$ . Also find the electric potential  $V$  for  $r$  between 0 and  $5a$ .

- (b) Half of the electrical energy of the capacitor is stored in the space between  $r = a$  and  $r = x$ , the other half between  $r = x$  and  $r = 5a$ . Find  $x$ .
- (c) Find the magnitude and direction of the polarization vector  $\mathbf{P}$  in the dielectric at  $r = a$  just outside the wire, and also the surface density of bound charge on the inner surface of the dielectric.

2. **Íslenska:** Þunn kúluskel með miðju í  $O$  hefur radius  $b$ . Á yfirborði hennar er jafndreifð raffhleðsla  $Q$ . Hún er látin snúast um sjálfa sig með jöfnum hornhraða  $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{a}}_z$ . Finnið segul-tvískautsvægi kúluskeljarinnar,  $\mathbf{m}$ , til dæmis með því að skipta henni upp í mjóar gjarðir og nota að hleðslan  $dQ$  á hverri gjörð samsvarar hringstraumi  $dQ\omega/2\pi$ . (Ábending: ef finna þarf  $\int \sin^3 \theta d\theta$ , má skrifa það sem  $\int (\cos^2 \theta - 1)d(\cos \theta)$ ).

**English:** A thin hollow spherical shell with its center at  $O$  has radius  $b$ . It carries a uniformly distributed charge  $Q$ . The shell rotates with a steady angular velocity  $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{a}}_z$ . Find the magnetic dipole moment,  $\mathbf{m}$ , of the spherical shell, by for instance viewing it as a collection of thin hoops each with a charge  $dQ$  and equivalent current  $dQ\omega/2\pi$ . (Note: If it is required to integrate the expression  $\int \sin^3 \theta d\theta$ , it may be written as  $\int (\cos^2 \theta - 1)d(\cos \theta)$ ).

3. **Íslenska:** Rafsegul-planbylgja fellur úr tómarúmi á slétt yfirborð sjávar, sem hefur hlutfallslegan rafsvörunarstuðul  $\epsilon_r = 80$  og (eðlis)rafleiðni  $\sigma = 4 \text{ S/m}$ .  $\epsilon_0$  er  $10^{-9}/36\pi = 8.85 \times 10^{-12}$  og  $\mu_0$  er  $4\pi \times 10^{-7}$ , bæði í viðeigandi SI-einingum.
- (a) Sýnið fram á að ef tíðni bylgjunnar er  $f = 10 \text{ MHz}$ , megi sjórinn kallast „góður leiðari“.
  - (b) Finnið stærðina  $\beta_1$  fyrir bylgjuna í tómarúminu og stærðina  $\beta_2$  fyrir bylgju með sömu tíðni niðri í sjónum.
  - (c) Bylgjan er látin falla á ská á sjávarflötinn, með innfallshorni  $\theta_i$  frá lóðlínu, og brothorn hennar niðri í sjónum er  $\theta_t$ . Rökstyðjið (með hliðsjón af teikningu eða á annan hátt), að  $\beta_1 \sin \theta_i = \beta_2 \sin \theta_t$ , og sýnið fram á að  $\theta_t$  í þessu tilviki verði um  $1^\circ$  ef  $\theta_i$  er  $80^\circ$ .

**English:** A plane electromagnetic wave impinges from vacuum on the flat surface of the ocean. Seawater has a relative electric permittivity of  $\epsilon_r = 80$  and a conductivity of  $\sigma = 4 \text{ S/m}$ .  $\epsilon_0$  is  $10^{-9}/36\pi = 8.85 \times 10^{-12}$  and  $\mu_0$  is  $4\pi \times 10^{-7}$ , both in SI units.

- (a) Show that if the frequency of the wave is  $f = 10 \text{ MHz}$ , the seawater may be called a “good conductor”.
- (b) Find the quantity  $\beta_1$  for the wave in vacuum and  $\beta_2$  for a wave with the same frequency in the ocean.

- (c) Let the wave impinge obliquely on the ocean surface, at an angle of incidence  $\theta_i$ . Then its angle of refraction will be  $\theta_t$ . Demonstrate (with reference to a drawing, or otherwise) that  $\beta_1 \sin \theta_i = \beta_2 \sin \theta_t$ , and show that if  $\theta_t$  is  $80^\circ$  then  $\theta_i$  will be about  $1^\circ$ .

4. **Íslenska:** Rafsegulbylgja með tíðni  $f = 10$  GHz berst í sveifluhætti  $TE_1$  í  $+z$ -átt milli tveggja fullkomlega leiðandi samsíða plata við  $y = 0$  og  $y = b = 0.03$  m, í lofti.

- (a) Finnið gildið á marktíðninni  $f_c$  fyrir þennan sveifluhátt og gildið á stærðinni  $\beta$  fyrir bylgjuna milli platanna.
- (b) Sýnið fram á að Poynting-vektorinn mitt á milli platanna sé (að meðaltali yfir eina sveiflu) að stærð  $(E_0^2/(2\eta_0))(\sqrt{(1 - (f_c/f)^2)})$ .  $E_0$  er útslag (e. amplitude) rafsviðsins þar. Áætlið síðan hve mikið afl eins metra breið (í  $x$ -átt) ræma af plötunum geti flutt, ef  $E_0$  má ekki vera meira en  $3 \times 10^6$  V/m.

**English:** An electromagnetic wave with frequency  $f = 10$  GHz is travelling in the  $+z$  direction in  $TE_1$  mode between two perfectly conducting plates in air. The plates are at  $y = 0$  and  $y = b = 0.03$  m.

- (a) Find the cutoff frequency  $f_c$  for this mode and the value of the quantity  $\beta$  for the wave between the plates.
- (b) Show that (on average over one period of oscillation) the Poynting vector at  $y = b/2$  has the magnitude  $(E_0^2/(2\eta_0))(\sqrt{(1 - (f_c/f)^2)})$ .  $E_0$  is the amplitude of the electrical field at  $y = b/2$ . Then estimate the maximum power that can be transmitted by such a pair of plates if they are one meter wide in the  $x$ -direction.  $E_0$  must not exceed  $3 \times 10^6$  V/m.

5. **Íslenska:** Raftvískaut  $\mathbf{p}$  snýst með föstum hornhraða  $\omega$  um ás þvert á tvískautsvægið. Hér getur verið heppilegt að líta á tvískautið sem snýst sem samsett úr tveimur hreintóna tvískautum þvert á hvort annað.

- (a) Finnið geislunarsviðin.
- (b) Leiðið út mynsturfallið.
- (c) Reiknið vigur Poyntings fyrir geislunarsviðin.

**English:** An electric dipole  $\mathbf{p}$  rotates with a constant angular velocity  $\omega$  about an axis perpendicular to the dipole moment. Here, it can be convenient to consider the rotating dipole as a superposition of two sinusoidally varying dipoles at right angle to each other.

- (a) Find the radiation fields.

- (b) Derive the pattern function.
- (c) Calculate the Poynting vector in the radiation-zone.

6. **Íslenska:** Í kennslubókinni og í fyrirlestrunum hefur ekkert verið minnst á geislun einskauts, hvers vegna? Sýnið að kúlusamhverf hleðsludreifing sem sveiflast aðeins í radial-stefnuna (hún er kúlusamhverf á hvaða tímapunkti sem er) geislar ekki! Hvað er hægt að segja um nærsviðin? (Þessi staðreynd hefur greinilega mikið að segja í atómkerfum).

**English:** In the book and in the lectures we have not discussed monopole radiation, why? Show that a spherically symmetric charge distribution oscillating purely in the radial direction (remaining spherically symmetric at all times) emits no radiation! What can be said about the near fields? (Obviously, this fact has important consequences in atomic systems).