Háskóli Íslands
Raunvísindadeild
Námsbraut í eðlisfræði

EÐL401G Rafsegulfræði 1

Miðvikudaginn 4. maí 2016, kl. 13:30-16:30. Kennari: Viðar Guðmundsson.

Leyfileg hjálpargögn eru skriffæri, vasareiknivél, og kennslubókin: „Field and Wave Electromagnetics“ eftir David K. Cheng ásamt nótum kennara og nemanda.

Í prófinu eru 5 verkefni sem öll vega jafnt. Skrifið skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefnin eru lögð fyrir á íslensku og ensku.

1. **Íslenska**: Undanfarin ár hefur áhugi manna beinst að nanóvírum. Unnið er að því að nota þá sem nanóloftnet og leitað er að margs konar hlutverkum fyrir þá. Hugsum okkur einn þannig með sívalningslögun og endanlega lengd L. Geisli hans er a. Langás vírsins liggur í z-ás sívalnings hnitakerfis. Hann ber seglun þvert á langásinn sem lýst er með $\mathbf{M} = M_0\hat{\mathbf{a}}_x$.

   (a) Umskrifið seglunina í sívalningshnit.

   (b) Reiknið jafngildar segulhleðslur fyrir yfirborð og bol vírsins.

   (c) Finnið heildarsegulhleðslu vírsins.

   (d) Reiknið jafngilda seglunarstrauma vírsins fyrir bol og yfirborð.

   (e) Lýsið og rissið upp mynd af jafngildu straumunum.

   English: In the last years the interest has been growing in nanowires. Work is underway to use them as nanoantennae, and many other roles are being sought for them. We imagine a cylindrical nanowire with finite length L. Its radius is a. The symmetry axis of the wire is along the z-axis of a cylindrical coordinate system. It carries a magnetization perpendicular to its symmetry axis that is described by $\mathbf{M} = M_0\hat{\mathbf{a}}_x$.

   (a) Express the magnetization in cylindrical coordinates.

   (b) Calculate the equivalent magnetic charges for the surface and the bulk.

   (c) Find the total equivalent magnetic charge of the wire.

   (d) Calculate the equivalent magnetization currents for the surface and the bulk.

   (e) Describe the equivalent currents and sketch a figure of them.

2. **Íslenska**: Segulflæði um hringlaga lykkju með geisla a, sjálfspani L og viðnámi R er $\Phi(t) = \Phi_0 \, (\Gamma t)^2 \exp(-\Gamma t)$. Gerum ráð fyrir því að straumur um lykkjuna í upphafi sé $i(0) = i_0$.

   (a) Finnið strauminn um lykkjuna $i(t)$.

   (b) Hve mikil hleðsla hefur flust um hvern punkt lykkjunnar þegar $t \to \infty$?

   (c) Hvernig er heildarhleðsluflutningurinn háður upphafsgildi straumsins?

   English: Magnetic flux through a circular loop with radius a, self-inductance L, and resistance R is $\Phi(t) = \Phi_0 \, (\Gamma t)^2 \exp(-\Gamma t)$. We assume the initial current to be $i(0) = i_0$.

   (a) Find the current in the loop $i(t)$.

   (b) How much charge has passed each point of the loop as $t \to \infty$?

   (c) How does the total charge transported depend on the initial value of the current?

3. **Íslenska**: Gegnheil málmkúla með geisla a ber hleðslu Q. Kúlan er húðuð með jafnþykku rafsvarandi lagi með rafsvörunarstuðul ϵ og ytri geisla b. Finnið spennu kúlunnar miðað við að hún sé 0 þegar $R \to \infty$.

   English: Solid metal ball with radius a carries charge Q. The ball is coated with a uniform dielectric layer with dielectric constant ϵ, and outer radius b. Find the potential of the ball compared to 0 as $R \to \infty$.

4. **Íslenska**: Vigursviðið er gefið sem $\mathbf{A} = (-y^3 B, x^3 B, 0)/(2a^2)$ í kartískum hnitum þar sem a hefur víddina lengd. Reiknið segulflæðið um lárétta hringlaga lykkju með geisla b og miðju í miðri x-y-sléttunni. Finnið einnig segulflæðisvið-ið.

   English: The vector potential is given as $\mathbf{A} = (-y^3 B, x^3 B, 0)/(2a^2)$ in Cartesian coordinates, where a has the dimension length. Calculate the magnetic flux through a horizontal circular loop with radius b and a center in the middle of the x-y-plane. Find also the magnetic flux field.

5. **Íslenska**: Til að skilja betur muninn á rafstöðumætti og geislunarlausn fjölskauts er ágætt að athuga tvískaut. Hugsum okkur tvískaut með hleðslur í $z = \pm d$. Athugandi er í fjarlægð R frá upphafspunkti kúluhnitakerfisins. Frá honum séð er önnur hleðslan í fjarlægð R_+ og hin í fjarlægð R_-. Ef við notum fasora þá er mættið séð frá athugandanum

$$V(R) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{e^{ikR_+}}{R_+} - \frac{e^{ikR_-}}{R_-}\right),$$

með

$$R_+^2 = R^2 - 2Rd\cos\theta + d^2, \quad \text{og} \quad R_-^2 = R^2 + 2Rd\cos\theta + d^2.$$

Kannið mættið þegar $R \gg d$. Fyrir stöðumættið gildir til viðbótar að $k = \omega/c \to 0$, en fyrir tímaháða geislunarmættið er k endanlega stærð. Hver eru aðfelluform þessara tveggja mætta þegar $R \to \infty$?

English: To understand better the difference between the static potential and the radiating solution for a multipole it is good to explore the dipole. We imagine a dipole with charges at $z = \pm d$. An observer is at the distance R from the origin of the spherical coordinate system. He sees one charge at distance R_+ and the other one at R_-. Using phasors the potential seen by the observer is

$$V(R) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{e^{ikR_+}}{R_+} - \frac{e^{ikR_-}}{R_-}\right),$$

with

$$R_+^2 = R^2 - 2Rd\cos\theta + d^2, \quad \text{and} \quad R_-^2 = R^2 + 2Rd\cos\theta + d^2.$$

Explore the potential when $R \gg d$. For the static potential we have additionally that $k = \omega/c \to 0$, but for the time-dependent radiating potential k is a finite quantity. How are the asymptotic forms of these two potentials when $R \to \infty$?

Nokkur heildi – some integrals

$$\int dx\, e^{-\gamma x} x = -\frac{(\gamma x + 1)e^{-\gamma x}}{\gamma^2}$$

$$\int dx\, e^{-\gamma x} x^2 = -\frac{(\gamma^2 x^2 - 2\gamma x + 2)e^{-\gamma x}}{\gamma^3}$$

$$\int_0^\infty dx\, e^{-\gamma x} = -\frac{1}{\gamma}, \quad \int_0^\infty dx\, e^{-\gamma x} x = -\frac{1}{\gamma^2}, \quad \int_0^\infty dx\, e^{-\gamma x} x^2 = -\frac{2}{\gamma^3}$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi\, \cos^2(\phi) = \pi, \quad \int_0^{2\pi} d\phi\, \sin^2(\phi) = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi\, \cos^3(\phi) = 0, \quad \int_0^{2\pi} d\phi\, \sin^3(\phi) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi\, \cos^4(\phi) = \frac{3\pi}{4}, \quad \int_0^{2\pi} d\phi\, \sin^4(\phi) = \frac{3\pi}{4}$$