Rafsegulfræði 1

Fyrirlestrar
Dæmatímar
> Viðar Guðmundsson
vidar@hi.is

Heimasíða námskeiðs

http://hartree.raunvis.hi.is/~vidar/Nam/RSF_1.php/

Heimadæmi
Tímadæmi
gilda 25% í lokaeinkunn

Bók: Field and Wave Electromagnetics
David K. Cheng, 2nd Ed.

Yfirferð heimadæma: Tómas Örn Rosdahl

Lausleg áætlun
fyrir 10 fyrstu vikurnar

Kafli	Efni	Vikur
3	Rafstöðusvið	1
4	Lausnir rafst. verkefna	2
5	Sístæðir straumar	1
6	segulstöðufr.	2
7	Tímaháð svið + Maxwell	2
8	Flatarbylgjur	2

Rafstöðufræði

Rafsvið skilgreint frá kraftsviði

$$\boxed{\bar{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\bar{F}}{q}}$$

með tilraunahleðslu q

↓

Kraftur á hleðslu q í rafsviði $\bar{E}$

$$\boxed{\bar{F} = q\bar{E}}$$

Eiginleikar rafsviðs (rafstöðusvið
eru skilgreindir með tveimur (Maxwells) jöfnum (í "tómarúmi")

$$\boxed{\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

hleðsluþéttleiki

rafsvörunarfasti tómarúms

$$\boxed{\bar{\nabla} \times \bar{E} = 0}$$

Hér má lesa úr jöfnunum: Rafsvið á sér uppsprettur, Rafsviðslínur í tómarúmi í rafstöðufræði eru ekki lokaðar lykkjur.

Stokes regla fyrir snúningslaust eða geymið svið og „Sundurleitni reglan" gefa heildisframsetningu

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

Gauss

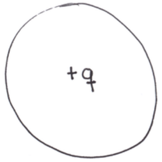
$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0}$$

Flæði rafsviðs út um lokað yfirborð er í réttu hlutfalli við heildarhleðsluna innan þess.

Heildissnið <—> Afleiðusnið

Coulomb

Ein jákvæð punkthleðsla



Einsátta rafsvið út úr fleti

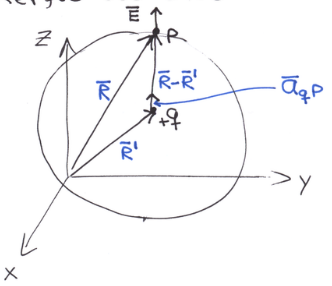
$$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{s} = \oint_S (\bar{a}_R E_R) \cdot \bar{a}_R ds = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E_R (4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

E_R einsleitt á kúluyfirborðinu

$$\boxed{\bar{E} = \bar{a}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}}$$

Miðum ekki alltaf hnitakerfið við staðsetn. hleðslu



$$\bar{E}_P = \bar{a}_{qP} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R} - \bar{R}'|^2}$$

$$= \bar{E}(\bar{R})$$

Einingarvigurinn er skrifanlegur sem

$$\bar{a}_{qP} = \frac{\bar{R}-\bar{R}'}{|\bar{R}-\bar{R}'|}$$

$$\rightarrow$$

$$\boxed{\bar{E}_P = \bar{E}(\bar{R}) = \frac{q(\bar{R}-\bar{R}')}{4\pi\epsilon_0|\bar{R}-\bar{R}'|^3}}$$

Langseilinn rafkraftur

endurspeglar:

* Ljóseind er massalaus

* Ljóseindir víxlverkast ekki innbyrðis

Rafsvið hleðslusafns

$$\bar{E}(\bar{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k(\bar{R}-\bar{R}_k')}{|\bar{R}-\bar{R}_k'|^3}$$

n-hleðslur q_k í hnitum $\bar{R}_k'$ við reiknum rafsviðið $\bar{E}(\bar{R})$ í punkti $\bar{R}$

Samfelld hleðsludreifing

$$\bar{E}(\bar{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} dv' \frac{\rho(\bar{R}')(\bar{R}-\bar{R}')}{|\bar{R}-\bar{R}'|^3}$$

$\rho(\bar{R}')$: hleðsluþéttleiki

fyrir yfirborðshleðsluþéttleika $\rho_s(\bar{R})$ (eða $\sigma(\bar{R})$) er rafsviðið

$$\bar{E}(\bar{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S'} ds' \frac{\rho(\bar{R}')(\bar{R}-\bar{R}')}{|\bar{R}-\bar{R}'|^3}$$

Venjulega er þægilegra að reikna fyrst rafmættið sem við athugum bráðlega.

(Athugasemd um heildun í bók)

Lögmál Gauss

$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Heildarflæði $\bar{E}$ út um lokað yfirborð er jafnt heildarhleðslu Q innan þess margf. með $1/\epsilon_0$

lesa sjálf í bók. Ákaflega mikilvægt fyrir hleðsludreif. með háa samhverfu.

Við skoðum tvær afleiðingar

Hleðsludreifing, kúlusamhverf, $\rho(r)$

$$\rho(\bar{r}) = \begin{cases} \rho(r) & \text{ef } r \leq a_0 \\ 0 & \text{ef } r > a_0 \end{cases}$$

Athugum rafsviðið utan hleðsludreifingarinnar í fjarlægð $r > a_0$

Hleðsludreifingin er kúlusamhverf —> rafsviðið getur aðeins verið "radíalt" og fast á kúlufleti með sömu miðju...

$$\int dv\, \rho(\bar{r}) = Q$$

Einingarvigur í "radial" eða útstefnu í bók $\hat{r} = \bar{a}_R$

$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow \quad 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow \bar{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Í þessu tilfelli er rafsviðið óháð nákvæmri dreifingu hleðslunnar. Sama rafsvið og punkthleðsla Q myndi valda!

Óhlaðið H-atóm

Er rafsvið í kringum það?

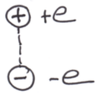
* Gerum ráð fyrir að kjarnhleðslan sé punkthleðsla +e

* Í grunnástandi er hleðsludreifing rafeindarinnar

$\rho_e(r) \sim A e^{-2\alpha r}$ þar sem A og α eru þekktir stuðlar

Atómið er óhlaðið → $\int_{\text{allt rúmið}} dV\, \rho_e(\bar{r}) = -e$

- Hugsum okkur kúluyfirborð með geisla r
- Innan þess er alltaf endanleg jákvæð hleðsla fyrir endanlegt r (hluti ρ_e er utan þessa yfirborðs).
- Það er því alltaf endanlegt rafsvið → kraftur fyrir „utan" H-atóm
- Krafturinn er skammseilinn, fellur með veldisvísisfalli, miklu hraðar en Coulomb-krafturinn fyrir, +e punkthleðslu eða fyrir tvípól



Rafstöðumætti

Um rafstöðusvið gildir $\bar{\nabla} \times \bar{E} = 0$

Almennt gildir fyrir skalarsvið V

$$\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} V) \equiv 0$$

Því er hægt að finna skalarsvið V þannig að

$$\boxed{\bar{E} = -\bar{\nabla} V}$$

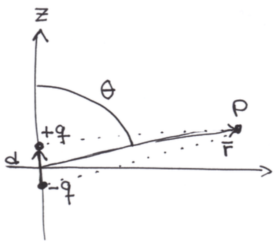
Í 4. kafla eru kynntar aðferðir t.þ.a. reikna $V(\bar{r})$ sem eru einfaldari oftast en að reikna $E(\bar{r})$ beint.

Spennumunur í rafstöðumætti er

$$V_2 - V_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \bar{E} \cdot d\bar{l} \qquad \text{óháð leið}$$

$V_2 - V_1 = \frac{W}{q}$ { er vinnan sem þarf t.þ.a. færa einingarhleðslu frá P_1 til P_2 í rafsviðinu $\bar{E}$

Tvískaut



$$V_P = V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{2} \frac{q_k}{|\bar{r} - \bar{r}'_k|}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\bar{r} - \bar{d}/2|} - \frac{1}{|\bar{r} + \bar{d}/2|} \right\}$$

$\bar{r} - \frac{\bar{d}}{2} = \left(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta - \frac{d}{2}\right)$ í Kartískum hn.

$$\left|\bar{r} - \frac{\bar{d}}{2}\right| = \left(r^2\sin^2\theta + \left(r\cos\theta - \frac{d}{2}\right)^2\right)^{1/2} = \left(r^2 - dr\cos\theta + \frac{d^2}{4}\right)^{1/2}$$

$$= r\left(1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{1/2} \simeq r\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta\right) \text{ ef } r \gg d$$

$$\frac{1}{|\bar{r} - \bar{d}/2|} - \frac{1}{|\bar{r} + \bar{d}/2|} \simeq \left\{\frac{1}{r}\left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta\right) - \frac{1}{r}\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta\right)\right\}$$

$$= \frac{d\cos\theta}{r^2}$$

$$\rightarrow V_P = V(\bar{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{\bar{p}\cdot\hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\bar{p} = q\bar{d}$$

Rafsviðið fæst með

$$\bar{E} = -\bar{\nabla} V = -\hat{a}_R \frac{\partial V}{\partial r} - \hat{a}_\theta \frac{\partial V}{r \partial \theta}$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left\{\hat{a}_R \, 2\cos\theta + \hat{a}_\theta \sin\theta\right\}$$

Leiðari í rafstöðusviði

Stórsær skali, slökunartími

Í jafnvægi gildir innan leiðara

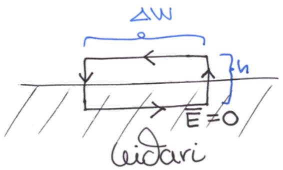
$\dashrightarrow$ $\rho = 0$

$\bar{E} = 0$

Leiðari getur verið með yfirborðshleðslu ρ_s

Þáttur $\bar{E}$ samhliða yfirb. við málmyfirborð (leiðara)

$$\bar{E}_t = 0$$

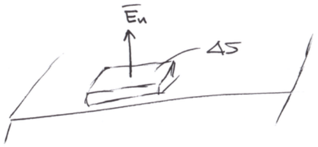


$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$$

$$= E_t \Delta W \quad \text{þ. } \Delta h \to 0$$

$$\to \bar{E}_t = 0$$

Þverþáttur $\bar{E}$ við yfirborð leiðara



$$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = \bar{E}_n \cdot \Delta \bar{S} = \frac{\rho_s \Delta S}{\epsilon_0}$$

$$\to E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$$

Innan leiðara $\bar{E} = 0$, $\rho = 0$ í jafnvægi

Jaðarskilyrði við yfirborð

$\bar{E}_t = 0$

$E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$

Rafsviðið er alstaðar hornrétt á yfirborð leiðara

yfirborðið er jafnspennuflötur

Rafsvarar í rafstöðufræði

Til eru mism. framsetn.
Við fylgjum bók hér.

Stórsær <-> Smásær skali

* Frjálsar hleðslur
(hreyfanlegar rafeindir....
leiðni rafeindir)

* Bundnar hleðslur
(þéttbundnar rafeindir
hægt að hnika til)

↳ skautun

ytra rafsvið getur hnikað til rafeindum í atómum, sameindum ....

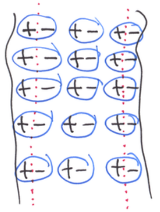
Sumar sameindir eru skautaðar, ytra svið raðar skautunum upp.

Sum efni halda skautunar uppröðun án ytra sviðs (undir vissu hitastigi)

↑

(e. electret)

Rafsvari



hvert lítið rúmfrymi dv' gefur tvískautsmætti í þ. $\bar{r}$

$$dV = \frac{\bar{P}\cdot\hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}dv' \quad , \quad \bar{P} = \bar{P}(\bar{r}')$$

Heildarrafstöðumættið er því

$$V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} dv' \frac{\bar{P}\cdot\hat{a}_R}{R^2} \quad , \quad R = |\bar{r}-\bar{r}'|$$

Skautun leiðir til yfirborðshleðslu (fastrar)

þessa jöfnu má umskrifa sem

$$V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_{S'} \frac{\bar{P}\cdot\hat{a}_n}{R}ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{(-\bar{\nabla}'\cdot\bar{P})}{R}dv'$$

yfirborðsliður

bolliður

Form heildanna bendir á túlkun

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{P}\cdot\hat{a}_n &= \rho_{ps}\\ -\bar{\nabla}\cdot\bar{P} &= \rho_p\end{aligned}}$$

yfirborðshleðsla vegna skautun

bolhleðsla v. skautunar

Skautaðarafsvarann má skipta út fyrir ρ_{ps} og ρ_p (hleðsluþéttleika)

Rafsviði í kerfi með rafsvara má því reikna frá

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\overbrace{(\rho + \rho_p)}$$

heildar stórsæa hleðslan

ρ er því stórsæa frjálsa (hreyfanlega) hleðslan

(Hér eru til önnur byrjunarsjónarmið, hleðslur utan agnanna)

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho+\rho_p) = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho-\bar{\nabla}\cdot\bar{P})$$

$$\longrightarrow \quad \bar{\nabla}\cdot(\epsilon_0\bar{E}+\bar{P}) = \rho$$

Skilgreinum færslusviðið $\bar{D}$ þ.a.

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho$$

þægilegra form þ.s. okkur finnst sem við stjórnum frjálsu hleðslunum

Við þekkjum ρ í upphafi, en ekki ρ_p

með

$$\bar{D} = \epsilon_0\bar{E} + \bar{P}$$

→ því verður þetta á heildisformi

$$\oint \bar{D}\cdot d\bar{a} = Q$$

Varúð, ekki er til Coulombs lögmál fyrir D, ekki er víst að $\bar{\nabla}\times\bar{D} = 0$.
T.D. er $\bar{\nabla}\times\bar{P} \neq 0$ í einf. stangar "electret". Ekkert mætti er til fyrir $\bar{D}$!

Í flestum efnum er $\bar{P}(\bar{E})$

Í efni með línulega og einsleita svörun gildir

$$\bar{P} = \epsilon_0\chi_e\bar{E}$$

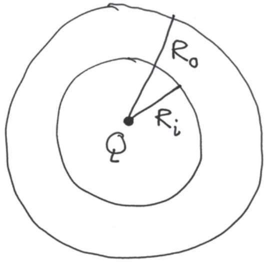
þar sem χ_e er rafviðtak

$$\bar{D} = \epsilon_0\bar{E} + \bar{P} = \epsilon_0(1+\chi_e)\bar{E}$$
$$= \epsilon_0\epsilon_r E = \epsilon E$$

Almennt er ϵ í raun tensor háður tíðni og bylgjulengd (Reiknanlegt frá efniseiginleikum með eðlisfræði þéttefnis)

Dæmi

Jákvæð punkt hleðsla Q í miðju rafsvarakúluskeljar með geisla $R_i < R_o$



finna $\bar{E}$, V, $\bar{D}$ og $\bar{P}$

⑧

$R > R_o$

Rafsvarinn er óhlaðinn

Gauss lögmál

$$E_{R1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\bar{P} = 0 \rightarrow D_{R1} = \epsilon_0 E_{R1}$$

$R_i < R < R_o$

Gauss

$$E_{R2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2}$$

$$\rightarrow D_{R2} = \epsilon E_{R2} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$\bar{P} = \bar{D} - \epsilon_0 \bar{E}$$

$$\rightarrow P_{R2} = \frac{Q}{4\pi R^2}\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) = \frac{Q}{4\pi R^2}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)$$

því $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

$$V_2 = -\int_{\infty}^{R_o} E_{R1}\,dR - \int_{R_o}^{R} E_{R2}\,dR$$

$$= V_1(R_o) - \frac{Q}{4\pi\epsilon}\int_{R_o}^{R}\frac{dR}{R^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{R_o} + \frac{1}{\epsilon_r R} - \frac{1}{\epsilon_r R_o}\right\}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{1}{R_o} + \frac{1}{\epsilon_r R}\right\}$$

---

⑨

$R < R_i$

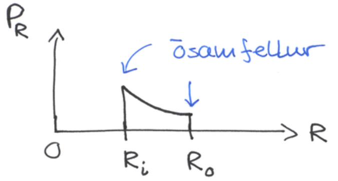
$$E_{R3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

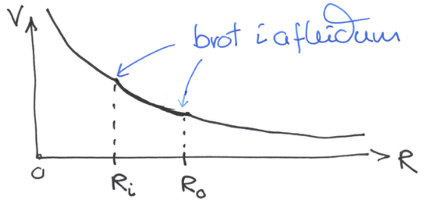
$$D_{R3} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

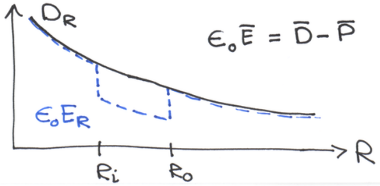
$$P_{R3} = 0$$

$$V_3 = V_2(R_i) - \int_{R_i}^{R} E_{R3}\,dR$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{1}{R_o} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R}\right\}$$







$$\epsilon_0 \bar{E} = \bar{D} - \bar{P}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\rho_{ps}(R_i) &= \bar{P}\cdot(-\hat{a}_R)\Big|_{R=R_i} = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi R_i^2} \\ \rho_{ps}(R_o) &= \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi R_o^2}, \quad \rho_p = 0\end{aligned}}$$

---

⑩

Styrkur rafsvara

sjá töflu 3-1

Jaðarskilyrði á mörkum tveggja rafsvara

$$\boxed{\bar{E}_{1t} = \bar{E}_{2t}} \qquad \left(\frac{\bar{D}_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{\bar{D}_{2t}}{\epsilon_2}\right)$$

$$\boxed{\hat{a}_{n2}\cdot(\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s}$$ hleðsluþéttleiki yfirborðs

↑ einingarvigur út
úr efni 2

---

⑪

Rýmd í fjölleiðarakerfi

N leiðarar með Q_i og V_i

$$V_1 = p_{11}Q_1 + \cdots p_{1N}Q_N$$

$$\vdots$$

$$V_N = p_{N1}Q_1 + \cdots p_{NN}Q_N$$

mættisstuðlar

hægt að snúa við

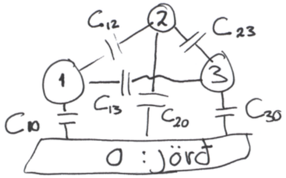
$$Q_1 = C_{11}V_1 + \cdots C_{1N}V_N$$

$$\vdots$$

$$Q_N = C_{N1}V_1 + \cdots C_{NN}V_N$$

C_{ii} : rýmdar stuðlar

C_{ji} $(i \neq j)$: span stuðlar



$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3$$

$$Q_2 = C_{12}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3$$

$$Q_3 = C_{13}V_1 + C_{23}V_2 + C_{33}V_3$$

eða með „hlut rýmd $\mathbb{C}_i$"

$$Q_1 = \mathbb{C}_{10}V_1 + \mathbb{C}_{12}(V_1 - V_2) + \mathbb{C}_{13}(V_1 - V_3)$$

$$Q_2 = \mathbb{C}_{20}V_2 + \mathbb{C}_{12}(V_2 - V_1) + \mathbb{C}_{23}(V_2 - V_3)$$

$$Q_2 = \mathbb{C}_{30}V_3 + \mathbb{C}_{13}(V_3 - V_1) + \mathbb{C}_{23}(V_3 - V_2)$$

Sem má endurraða

$$Q_1 = (\mathbb{C}_{10}+\mathbb{C}_{12}+\mathbb{C}_{13})V_1 - \mathbb{C}_{12}V_2 - \mathbb{C}_{13}V_3$$

$$Q_2 = -\mathbb{C}_{12}V_1 + (\mathbb{C}_{20}+\mathbb{C}_{12}+\mathbb{C}_{23})V_2 - \mathbb{C}_{23}V_3$$

$$Q_3 = -\mathbb{C}_{13}V_1 - \mathbb{C}_{23}V_2 + (\mathbb{C}_{30}+\mathbb{C}_{13}+\mathbb{C}_{23})V_3$$

$$\Downarrow$$

$$C_{11} = \mathbb{C}_{10}+\mathbb{C}_{12}+\mathbb{C}_{13}$$

$$C_{22} = \mathbb{C}_{20}+\mathbb{C}_{12}+\mathbb{C}_{23}$$

$$C_{33} = \mathbb{C}_{30}+\mathbb{C}_{13}+\mathbb{C}_{23}$$

$$C_{12} = -\mathbb{C}_{12}$$

$$C_{23} = -\mathbb{C}_{23}$$

$$C_{13} = -\mathbb{C}_{13}$$

→ snúa við

afstæð hlutrýmd

$$\mathbb{C}_{10} = C_{11}+C_{12}+C_{13}$$

$$\mathbb{C}_{20} = C_{22}+C_{12}+C_{23}$$

$$\mathbb{C}_{30} = C_{33}+C_{13}+C_{23}$$

Rýmd leiðara til jarðar

rýmd leiðara i til allra hinna
tengdra við jörð

Orka í hleðslu uppröðun

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} Q_k V_k}$$

Jöfn vinnunni sem þarf til að raða hleðslum saman frá „∞"

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} dv'\,\rho V}$$

← sjálforka innifalin

táknað við svið

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} dv'\,\bar{D}\cdot\bar{E}}$$

Lausn rafstöðuverkefna

Grunnjöfnur rafstöðufræðinnar í stórsæu efni eru

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\nabla}\cdot\bar{D} &= \rho \quad ① \\ \bar{\nabla}\times\bar{E} &= 0 \quad ② \end{aligned}}$$

með jaðarskilyrðum sem við höfum rætt

Vegna ② er hægt að finna mætti

$$\bar{E} = -\bar{\nabla}V \quad ③$$

Ef hægt er að skrifa

$$\bar{D} = \epsilon\bar{E} \quad ④$$

(ϵ má vera fall af staðarhnitum)

má setja saman ① og ④+③ þ.a.

$$\bar{\nabla}\cdot(\epsilon\bar{\nabla}V) = -\rho$$

Í efni þar sem ϵ er fasti fæst

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}} \quad ⑤$$

Jafna Poissons með Laplace virkjanum ∇^2

Í kerfi með engum frjálsum hleðslum lýsir jafna Laplace

$$\boxed{\nabla^2 V = 0} \quad ⑥$$

rafstöðumættinu V.

⑤ og ⑥ eru hlutafleiðujöfnur fyrir „skalar" rafstöðumættið

Þegar V er fundið er einfalt að reikna rafsviðið

$$\bar{E} = -\bar{\nabla}V$$

Til eru margar aðferðir til að leysa jöfnur Poissons og Laplace

Greiningaraðferðir   tölulegar

Green föll → heildisjöfnur með innbyggðum jaðarskilyrðum

fallagrunnar → eiginföll virkja Fourier, Laplace gr. .....

Net + endanleg bútun

spegilmyndir

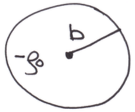
Við skoðum aðeins nokkrar einfaldar aðferðir

Lesa 4-3 í bók um einkvæmni lausna þessarra jafna !

Dæmi

Reikna $\bar{E}$ utan og innan hlaðinnar kúlu með geisla b og fastan hleðsluþéttleika

$$\rho = \begin{cases} -\rho_0 & R \leq b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



Innan kúlu þarf að leysa jöfnu Poissons og jöfnu Laplace utan hennar

Í kúluhnitum er virki Laplace

$$\nabla^2 = \boxed{\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R}\right)} + \frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Hleðslan hér er kúlusamhverf -> rafstöðumættið getur ekki verið háð hornunum $\Omega = (\theta, \phi)$ því skiptir aðeins fyrsti liðurinn máli hér

---

Innan kúlu $R \leq b, \rho = -\rho_0$

$$\nabla^2 V_i = + \frac{\rho_0}{\epsilon}$$

eða

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{dV_i}{dR}\right) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{dV_i}{dR}\right) = R^2 \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

heildum óákveðið

$$R^2 \frac{dV_i}{dR} = \frac{1}{3}R^3 \frac{\rho_0}{\epsilon_0} + C_1$$

eða

$$\frac{dV_i}{dR} = \frac{1}{3} R \frac{\rho_0}{\epsilon_0} + \frac{C_1}{R^2}$$

Rafsviðið $\bar{E}_i = -\bar{\nabla} V_i$

$$\rightarrow \bar{E}_i = -\hat{a}_R \frac{dV_i}{dR}$$

Hleðslan er jafndreifð innan kúlu (engin punkthleðsla í miðju) $\rightarrow$ $\bar{E}_i$ getur ekki haft sérstöðupunkt í $R=0$

$\rightarrow C_1 = 0$

því höfum við

$$\boxed{\bar{E}_i = -\hat{a}_R \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R \qquad R \leq b}$$

Ein heildun í viðbót gefur

$$V_i = \frac{1}{6} R^2 \frac{\rho_0}{\epsilon_0} + C_1'$$

Utan kúlu $R > b$

$$\nabla^2 V_0 = 0$$

eða

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{dV_0}{dR}\right) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{dV_0}{dR}\right) = 0$$

Heildun gefur

$$R^2 \frac{dV_0}{dR} = C_2$$

eða

$$\frac{dV_0}{dR} = \frac{C_2}{R^2}$$

$$\bar{E}_0 = -\bar{\nabla} V_0 = -\hat{a}_R \frac{dV_0}{dR} = -\hat{a}_R \frac{C_2}{R^2}$$

með óþekktum fasta C_2 !

Hér er engin yfirborðshleðsla svo rafsviðið er samfellt í $R=b$

$$|\bar{E}_i(b)| = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} b = \frac{C_2}{b^2} = |\bar{E}_0(b)|$$

$$\rightarrow \quad C_2 = \frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0}$$

eða

$$\bar{E}_0(R) = -\hat{a}_R \frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 R^2}, \quad R \geq b$$

$$= + \hat{a}_R \frac{\left(-\frac{4\pi}{3} b^3 \rho_0\right)}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

---

fyrir mættið fæst

$$V_0 = -\frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 R} + C_2'$$

$C_2' = 0$ því $\lim\limits_{R \to \infty} V_0(R) = 0$

Áður fengum við

$$V_i = \frac{1}{6} R^2 \frac{\rho_0}{\epsilon_0} + C_1'$$

Rafstöðumættið er samfellt í $R = b$

$$V_i(b) = \frac{\rho_0 b^2}{6\epsilon_0} + C_1' = -\frac{\rho_0 b^2}{3\epsilon_0} = V_0(b)$$

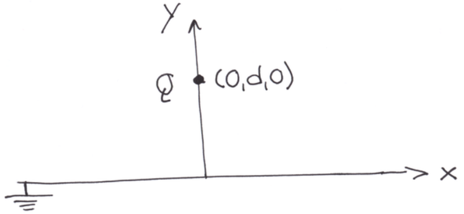
$$\rightarrow \quad C_1' = -\frac{\rho_0 b^2}{2\epsilon_0}$$

og þess vegna að lokum

$$V_i = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\left(\frac{3b^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right)$$

Aðferð spegilhleðslna

Athugum punkthleðslu Q yfir leiðandi plötu með 0-spennu



punkthleðslan leiðir til yfirborðhleðslu á leiðaranum ρ_s

$$V(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+(y-d)^2+z^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho_s}{R_1}ds$$

En ρ_s er óþekkt!

Við vitum

- $V(x,0,z) = 0$ (á leiðaranum)
- Nærri punkthleðslunni gildir $V \to \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ þ. $R \to 0$
- Fjarri Q þ. $x \to \pm\infty$, $y \to +\infty$, $z \to \pm\infty$ verður $V \to 0$

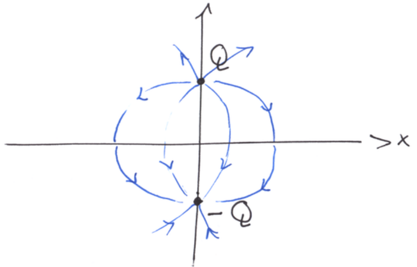
- Samhverfur

$$V(x,y,z) = V(-x,y,z)$$
$$V(x,y,z) = V(x,y,-z)$$

- Við leiðarann verður $\bar{E}$ að vera hornrétt á hann

Lausn

Kippa leiðaraplötu í burtu og bæta við spegilhleðslu



Fyrir $y>0$

$$V(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right)$$

með

$$R_+ = \left[x^2+(y-d)^2+z^2\right]^{1/2}$$
$$R_- = \left[x^2+(y+d)^2+z^2\right]^{1/2}$$

Hægt er að sýna að $V(x,y,z)$ uppfyllir jöfnu Laplace og öll skilyrðin sem við nefndum

+ Einkvæmni lausna

↓

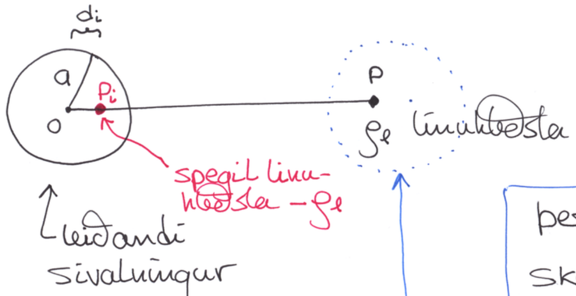
Við höfum rétta lausn

- spegilhleðslan er utan þess svæðis sem við viljum leysa jöfnuna á
- Nú er einfallt að reikna $\bar{E}$ og ρ_s
- Lausnin gildir aðeins fyrir $y>0$

{ yfirborðshleðslan krefst stökks (ósamfellu) í $\bar{E}$ í yfirborðinu, við höfum ekki reynt að ná því -> aðeinslausn f. $y>0$ }

---

línuhleðsla + sívalningur



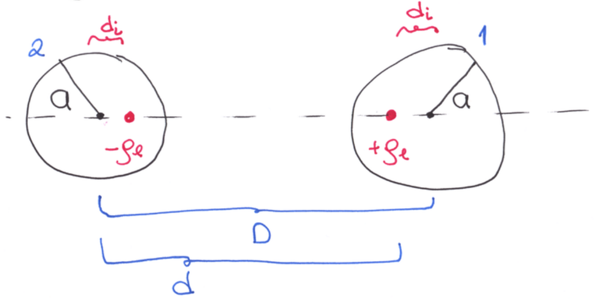
Í bók er sýnt að um spegilhleðsluna verður að gilda

$$\boxed{\rho_i = -\rho_\ell, \quad d_i = \frac{a^2}{d}}$$

þessi spegil línuhleðsla skapar jafnspennuflöt þar sem sívalningurinn var

+

Einnig verður til jafnspennuflötur um ρ_ℓ með miðju hliðraða um d_i frá ρ_ℓ frá fyrri sívalningi þvi getum við skoðað tvær línur



$$V_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{a}{d}\right)$$

$$V_1 = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{a}{d}\right)$$

↑

leitt út á bls. 163-4

Í stað jafnspennuflata leiðaranna koma spegilhleðslurnar $\pm\rho_l$ í fjarlægð $(D-2d_i) = (d-d_i)$ frá hvor annarri

---

$a<d \rightarrow \ln\left(\frac{a}{d}\right) < 0$

og rýmd á lengdareiningu

$$C = \frac{\rho_l}{V_1-V_2} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/a)}$$

Nú gildir $d = D-d_i = D-\frac{a^2}{d}$

$$\rightarrow d = \frac{1}{2}\left(D+\sqrt{D^2-4a^2}\right)$$

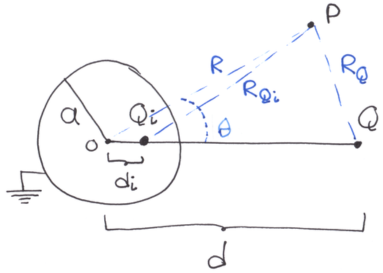
sleppum − lausninni því $D,d \gg a$

$$\boxed{C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left\{\frac{D}{2a}+\sqrt{\left(\frac{D}{2a}\right)^2-1}\right\}}}$$ eða $$\boxed{C = \frac{\pi\epsilon_0}{\mathrm{Arcosh}\left(\frac{D}{2a}\right)}}$$

þ.s.

$$\mathrm{Arcosh}(x) = \ln\left\{x+\sqrt{x^2-1}\right\}$$

Spegilhleðslur fyrir kúluyfirborð



Hér gildir $$\boxed{\begin{aligned} Q_i &= -\frac{a}{d}Q \\ d_i &= \frac{a^2}{d}\end{aligned}}$$

spegilhleðslan er ekki sömu stærðar og upprunalega hleðslan

Dæmi: Reikna yfirborðhleðsluþéttleikann og heildar yfirborðshleðsluna

$$V(R,\varphi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_Q} - \frac{a}{d\cdot R_{Q_i}}\right)$$

$$R_Q = \left[R^2+d^2-2Rd\cos\theta\right]^{1/2}, \quad R_{Q_i} = \left[R^2+\left(\frac{a^2}{d}\right)^2-2\left(\frac{a^2}{d}\right)\cos\theta\right]^{1/2}$$

Jaðarskilyrði fyrir E_n við leiðara

er $E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$

Fyrir kúluflötinn hér gildir

$$E_R(R,\theta)\Big|_{R=a} = E_n$$

Athugið að θ er mælt frá línunni OQ. Best er að hugsa OQ sem z-ásinn hér. θ er þá venjulega azimuthal hornið í kúluhnitum.

$$\rightarrow \rho_s = \epsilon_0 E_R(a,\theta) = -\epsilon_0\frac{\partial V(R,\theta)}{\partial R}\Big|_{R=a}$$

$$= -\frac{Q(d^2-a^2)}{4\pi a(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{3/2}}$$

$\rho_s<0$ með max gildi fyrir $|\rho_s|$ í $\theta=0$ og min gildi í $\theta=\pi$ (hinumegin á kúlunni)

Heildarhleðsla $= \oint\limits_{\text{Kúluyfirborð}} \rho_s ds = a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \; \rho_s(\theta,\varphi)$

$$= -2\pi a^2 \int_0^{\pi} \frac{Q(d^2-a^2)\sin\theta d\theta}{4\pi a(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{3/2}} = -\frac{2\pi a Q(d^2-a^2)}{4\pi} \int_{-1}^{1} \frac{du}{(a^2+d^2-2adu)^{3/2}}$$

$$= -\frac{a}{d} Q = Q_i$$

yfirborðshleðslan er jöfn spegilhleðslunni

Lausn Laplace jöfnu

Kerfi með engum hleðslum → engar spegilhleðslur mögulegar

Við skoðum „aðgreiningu breytistærða" sem er möguleg þegar „spennufletir" falla að flötum þekkts einfalds hnitakerfis

Í Morse og Feshbach (1953) eru kynnt 9 hnitakerfi sem jafna Laplace er aðgreind í

Við skoðum 3, Kartísk-, Sívalning- og Kúluhnit

Aðgreining breytistærða er ekki alltaf möguleg, og þá eru enn til margar aðferðir

---

Hlutafleiðujafna + jaðarskilyrði

① Dirichlet verkefni

Mættið er gefið á jaðrinum

② Neumann verkefni

Normal afleiða mættisins er gefin á jaðrinum

③ Blandað verkefni

Mættið er gefið á hluta jaðrins og normal afleiða þess á afgangnum

---

Kartísk hnit

Jafna Laplace er

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) V(x,y,z) = 0$$

Gerum ráð fyrir að lausnin uppfylli

$$V(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

Innsetning gefur

$$Y(y)Z(z)\frac{d^2X(x)}{dx^2} + X(x)Z(z)\frac{d^2Y(y)}{dy} + X(x)Y(y)\frac{d^2Z(z)}{dz} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz} = 0$$

Hver liður er aðeins fall af einni breytu

Því hlýtur að gilda

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -k_x^2 \quad \text{o.s.fr. fyrir } y \text{ og } z$$

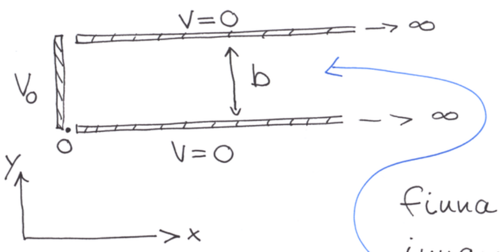
k_i – ákvarðast af jaðarskilyrðum og jafna Laplace krefst

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

Lausn $X''(x) + k_x^2 X(x) = 0$

k_x^2	k_x	$X(x)$	eða
0	0	$A_0x + B_0$	
$+$	k	$A_1\,\text{Sin}(kx) + B_1\,\text{Cos}(kx)$,	$C_1e^{ikx} + D_1e^{-ikx}$
$-$	ik	$A_2\,\text{Sinh}(kx) + B_2\,\text{Cosh}(kx)$,	$C_2e^{kx} + D_2e^{-kx}$

Dæmi



tvær samhliða plötur
(óendanleg hálfplön)
leiðandi V=0

finna V(x,y,z) allstaðar innan

Ekkert háð z á jaðrinum → $V = V(x,y)$

Jaðarskilyrði

$\underline{0 \le y \le b}$ $\boxed{\begin{matrix} V(0,y) = V_0 \\ V(\infty,y) = 0 \end{matrix}}$

$\boxed{\begin{matrix} V(x,0) = 0 \\ V(x,b) = 0 \end{matrix}}$ $\underline{0 \le x \le \infty}$

$V = V(x,y) \longrightarrow k_z = 0$ og $Z(z) = B_0$

$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 \longrightarrow \underline{k_y^2 = -k_x^2 = k^2}$, $k \in \mathbb{R}$

Í þessu vali er k_x þvertala, setjum $k_x = ik$

$\longrightarrow X(x) = D_2e^{-kx}$, vaxandi lausnin er ekki möguleg þ. $x \to \infty$

þá er eftir

$$Y(y) = A_1\,\text{Sin}(ky)$$

Lausn væri því

$$V(x,y) = \underbrace{B_0D_2A_1}_{= C_n} e^{-kx}\,\text{Sin}\,ky$$

En við verðum líka að uppfylla

$$V(x,b) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad C_ne^{-kx}\,\text{Sin}(kb) = 0$$

sem er aðeins mögulegt ef

$$\text{Sin}(kb) = 0 \longrightarrow kb = n\pi \quad \text{eða} \quad k = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1,2,3\ldots$$

Lausnin er því

$$V_n(x,y) = C_ne^{-k_nx}\,\text{Sin}(k_ny), \quad k_n = \frac{n\pi}{b}$$

þessi lausn uppfylli jöfnu Laplace, en ekki jaðarskilyrðið $V(0,y) = V_0$ fyrir $0 < y < b$

Jafna Laplace er línuleg hlutafleiðujafna

—> summa $V_n(x,y)$ fyrir mism. n er líka lausn

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n x} \sin(k_n y)$$

og síðasta jaðarskilyrðið er uppfyllt ef

$$V(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin k_n y = V_0 \,, \quad 0<y<b$$

Ákvarða þarf stuðlana C_n svo þetta skilyrði verði uppfyllt. Þetta er í raun fourier röð.

Notum að föllin $\sin(k_m y)$ skilgreina fullkomin grunn á þessu bili

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n y) = V_0$$

$$\rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^b C_n \sin(k_n y)\sin(k_m y)\,dy = \int_0^b V_0 \sin(k_m y)\,dy$$

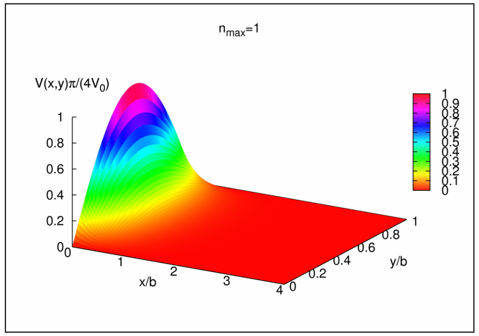
$$\rightarrow \quad \left.\begin{array}{ll} \frac{C_n}{2} b & \text{ef } m=n \\ 0 & \text{ef } m\neq n \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} \frac{2bV_0}{m\pi} & \text{ef } m=1,3,5,\dots \\ 0 & \text{ef } m=0,2,4,\dots \end{array}\right.$$

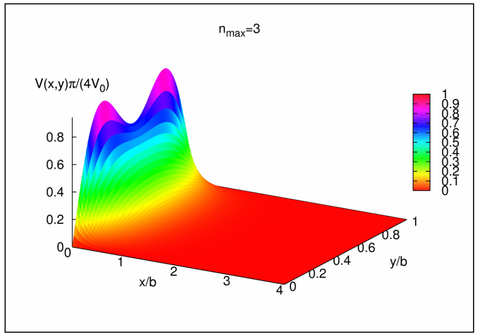
$$\rightarrow \quad C_n = \left\{\begin{array}{ll} \frac{4V_0}{n\pi} & \text{ef } n=1,3,5,\dots \\ 0 & \text{ef } n=0,2,4,\dots \end{array}\right.$$

Því fæst að lokum

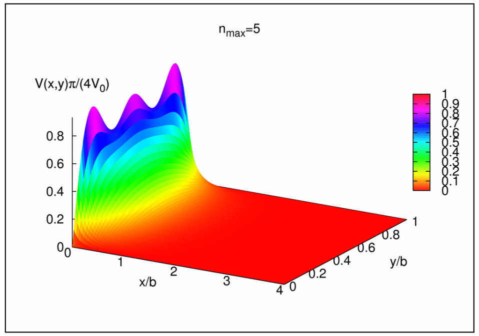
$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-k_n x} \sin(k_n y) \qquad \begin{array}{l} x>0 \\ 0<y<b \end{array}$$

Röðin er vel samleitin og því einfalt að teikna 2D-graf af lausninni

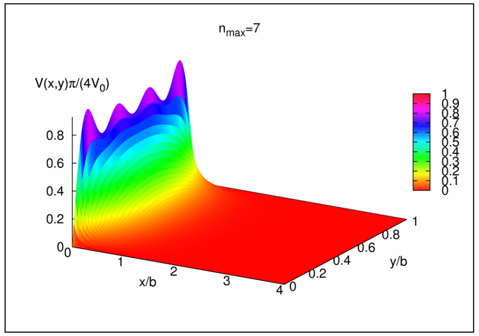




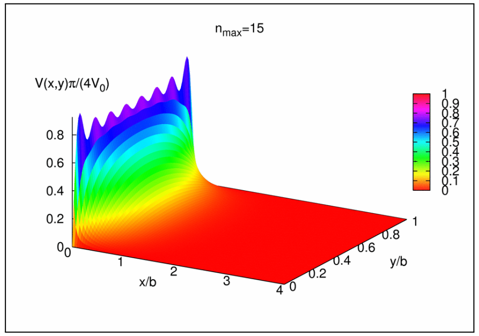
n_max=3
V(x,y)π/(4V_0)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
x/b
0
1
2
3
4
y/b
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0



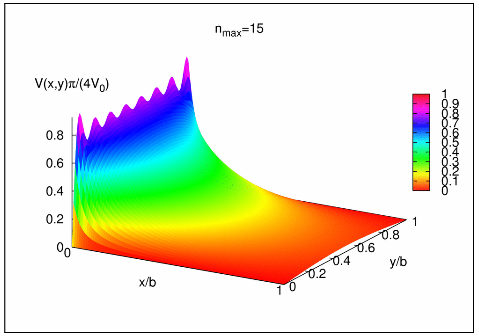
n_max=5
V(x,y)π/(4V_0)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
x/b
0
1
2
3
4
y/b
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0



n_max=7
V(x,y)π/(4V_0)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
x/b
0
1
2
3
4
y/b
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0



n_max=15
V(x,y)π/(4V_0)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
x/b
0
1
2
3
4
y/b
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0



Jafna Laplace í sívalningshnitum (r, φ, z)

$$\nabla^2 V = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Í bókinni er aðeins fjallað um sívalnings verkefni sem eru meiri á lengdina en breiddina

$$\longrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Gerum ráð fyrir að hægt sé að aðgreina breytistærðir þ.a.

$$V(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)$$

Innsetning gefur

$$\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{dR(r)}{dr}\right\} + \frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = 0$$

Því verður að gilda

$$\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{dR(r)}{dr}\right\} = k^2 \quad \text{og} \quad \frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = -k^2$$

Fyrir hornið φ fæst því

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} + k^2\Phi(\phi) = 0$$

$\Phi(\phi)$ verður að vera lotubundin, $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi n)$

k verður að vera heiltala

$$\longrightarrow \Phi(\phi) = A_\phi \sin(n\phi) + B_\phi \cos(n\phi)$$

Jafna útþáttar er þá

$$r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2} + r\frac{dR(r)}{dr} - n^2R(r) = 0$$

Lausn þessarar jöfnu er

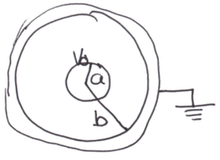
$$R(r) = A_r r^n + B_r r^{-n}$$

Heildarlausnin (á svæði með $0 \le \phi \le 2\pi$) er því

$$V_n(r,\phi) = r^n\left\{A_n \sin(n\phi) + B_n \cos(n\phi)\right\} + r^{-n}\left\{A_n' \sin(n\phi) + B_n' \cos(n\phi)\right\}$$

Dæmi

samása kapall



Jaðarskilyrði

$V(b) = 0$
$V(a) = V_0$

Ekkert í uppsetningunni brýtur hornsamhverfu

$$\hookrightarrow n = 0$$

Þegar $n=0$ er jafna útþáttar

$$\frac{d}{dr}\left\{r\frac{dR(r)}{dr}\right\}=0$$

sem leiðir til

$$R(r)=C_1\ln r+C_2$$

Jaðargildin leiða til

$$\left.\begin{aligned} C_1\ln b+C_2 &= V(b)=0\\ C_1\ln a+C_2 &= V(a)=V_0\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} C_1 &= -\frac{V_0}{\ln(b/a)}\\ C_2 &= \frac{V_0\ln b}{\ln(b/a)}\end{aligned}$$

$$\rightarrow\ \boxed{V(r)=\frac{V_0}{\ln(b/a)}\ln\left(\frac{b}{r}\right)}$$

Jafna Laplace í kúluhnitum

Í bókinni er einungis fjallað um verkefni í kúluhnitum sem hafa ϕ samhverfu, jafnan er þá

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)=0$$

og lausnin er aðgreind í tvo þætti

$$V(R,\theta)=\Gamma(R)\Theta(\theta)$$

Innsetning gefur

$$\underbrace{\frac{1}{\Gamma(R)}\frac{d}{dR}\left\{R^2\frac{d\Gamma(R)}{dR}\right\}}_{R\text{-hluti}}+\underbrace{\frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right\}}_{\theta\text{-hluti}}=0$$

R-hlutinn og θ-hlutinn verða að vera óháðir

$$\frac{1}{\Gamma(R)}\frac{d}{dR}\left\{R^2\frac{d\Gamma(R)}{dR}\right\}=k^2$$

því saman l. verður að koma út 0

og

$$\frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right\}=-k^2$$

Útþátturinn umformast í

$$R^2\frac{d^2\Gamma(R)}{dR^2}+2R\frac{d\Gamma(R)}{dR}-k^2\Gamma(R)=0$$

með lausn

$$\Gamma_n(R)=A_nR^n+BR^{-(n+1)}$$

og

$$n(n+1)=k^2\quad,\quad n=0,1,2,\cdots\cdots$$

Θ-hlutinn verður þá

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right\}+n(n+1)\Theta(\theta)\sin\theta=0$$

sem er þekkt sem afleiðujafna Legendre og hefur lausn

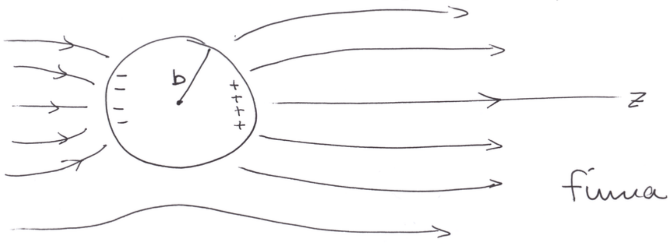
$$\Theta_n(\theta)=P_n(\cos\theta)$$

P_n er fleirliða Legendre. (Til eru einnig föll Legendre....)
P_n hefur enga sérstöðup. í $\theta=0,\pi$ eins og hin lausnin
$Q_n(\cos\theta)$
Samantekin er lausnin því

$$V_n(R,\theta)=\left\{A_nR^n+BR^{-(n+1)}\right\}P_n(\cos\theta)$$

Dæmi

Leiðandi kúla í föstu rafsviði



Við búumst við að á kúlunni skautist yfirborðshleðsla

finna $V(R,\theta)$ og $\overline{E}(R,\theta)$

Í upphafi er rafsviðið $\overline{E}_0 = \hat{a}_z E_0$ áður en kúlunni er komið fyrir.

Jaðarskilyrði

$V(b,\theta) = 0$ ①

$V(R,\theta) = -E_0 z$ ②

$= -E_0 R \cos\theta$

þ. $R \gg b$

Almenna lausnin er

$$V(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n R^n + B_n R^{-(n+1)} \right\} P_n(\cos\theta), \quad R \geq b$$

Jaðarskilyrði ② gefur $A_n = 0$ ef $n \neq 1$, $A_1 = -E_0$

Vitum $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

$$\rightarrow V(R,\theta) = -E_0 R \cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

fyrsti liðurinn í summunni $n=0$ á einungis við hlaðna kúlu $\rightarrow B_0 = 0$

$$V(R,\theta) = \left(\frac{B_1}{R^2} - E_0 R \right) \cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

Reynum jaðarskilyrði ①, $V(b,\theta) = 0$

$$\rightarrow \left(\frac{B_1}{b^2} - E_0 b \right) \cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n b^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) = 0$$

Sem verður aðeins uppfyllt með

$$B_1 = E_0 b^3 \quad \text{og} \quad B_n = 0 \text{ f. } n \geq 2$$

$$\rightarrow \boxed{V(R,\theta) = -E_0 \left\{ 1 - \left(\frac{b}{R} \right)^3 \right\} R \cos\theta,} \quad R \geq b$$

ytra sviðið

tvískautsþáttur

Rafsviðið

$$\overline{E}(R,\theta) = -\hat{a}_R \frac{\partial V}{\partial R} - \hat{a}_\theta \frac{\partial}{R \partial \theta} V$$

$$= +\hat{a}_R \left\{ E_0 \left[1 + 2 \left(\frac{b}{R} \right)^3 \right] \cos\theta \right\}$$

$$- \hat{a}_\theta \left\{ E_0 \left[1 - \left(\frac{b}{R} \right)^3 \right] \sin\theta \right\} \qquad R \geq b$$

og hleðsluþéttleikinn

$$\rho_s(\theta) = \epsilon_0 E_R(b,\theta) = 3 \epsilon_0 E_0 \cos\theta$$

tvípólsdreifing

Ef ekki er gert ráð fyrir ϕ-samhverfu í kúluhnitum verða hornþættir lausnar kúluföll

$$Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\phi}$$

þ.s.

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x)$$

og

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, Y^*_{\ell' m'}(\theta,\phi)\, Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{m'm}$$

Kúluföllin eru hornrétt. Og liðunin

$$r_< = \begin{cases} r' & \text{ef } r'<r \\ r & r<r' \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1}\left(\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}\right) Y^*_{\ell m}(\theta',\phi')\, Y_{\ell m}(\theta,\phi)}$$

er notuð til að ráða við heildun með $\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$

Í sívalningshnitum er til slík liðun

$$\boxed{\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk\, e^{im(\phi-\phi')} J_m(kr)\, J_m(k\varrho')\, e^{-k(z_>-z_<)}}$$

í Besselföllum og einfaldari

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \int_0^{\infty} e^{-k|z|} J_0(kr)\, dk$$

$\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$ er Greenfallið fyrir Poisson jöfnuna í óendanlegu einsleitu rúmi og heildi eins og

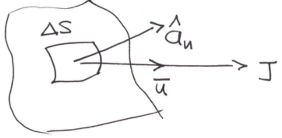
$$V(\bar{x}) = \int d\bar{x}' \frac{\varrho(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$$

eru leyst oft með þessum liðunum

Sístæðir straumar

Straumþéttleiki og lögmál Ohms

Athugum straum hleðslubera í gegnum yfirborð



á tímanum Δt fer um ΔS

$$\Delta Q = \varrho\, \bar{u}\cdot\underbrace{\hat{a}_n\, \Delta S}_{=\overline{\Delta S}}\, \Delta t$$

$$\rightarrow \Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \varrho\, \bar{u}\cdot\overline{\Delta S}$$

er straumurinn um ΔS

ϱ: hleðsluþéttleiki

Straumþéttleikinn er þá skilgreindur með

$$\Delta I = \bar{J}\cdot\overline{\Delta S}$$

Heildarstraumurinn er heildi hans yfir S

$$I = \int_S \bar{J}\cdot d\bar{S}$$

og

$$\bar{J} = \varrho\bar{u}$$

Á okkar stórsæja skala er $\bar{u}$ rekhraði hleðslubera

Í mörgum efnum gildir

$$\bar{u} = -\mu_e \bar{E}$$

þ.s. μ_e er hreyfanleiki rafeinda, og einnig

$$\bar{J} = \sigma\bar{E}$$

þ.s. $\sigma = -\varrho_e \mu_e$

Þau efni eru kölluð ómsk (í þeim tengjast J og $\bar{E}$ línulega)

σ (conductivity) er eðlisleiðni efnis

Viðnám efnisbúts með lengd ℓ og fastan þverskurð S er

$$\boxed{R = \frac{\ell}{\sigma S}}$$

Leiðni (conductance) efnisbúts er

$$G = \frac{1}{R} = \sigma\frac{S}{\ell}$$

$$\boxed{\begin{gathered} R_{sr} = R_1 + R_2, \quad \frac{1}{R_{\parallel}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\ G_{\parallel} = G_1 + G_2 \end{gathered}}$$

lesa sjálf um íspennu og
Lögmál Kirchhoff's

Straumur um yfirborð S

$$I = \oint_S \bar{J}\cdot d\bar{s} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dv$$

$$\rightarrow \int_V \bar{\nabla}\cdot J\, dv = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv$$

$$\downarrow$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

eða

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho + \bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0}$$

samfelldni jafnan

Hleðsla er varðveitt í hverjum punkti rúmsins

Í einföldum ómskum leiðara gildir

$$\bar{J} = \sigma\bar{E}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho + \sigma\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\sigma}{\epsilon}\rho = 0$$

með lausn

$$\rho = \rho_0 e^{-\sigma/\epsilon t}$$

fyrir kopar er slökunartíminn

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma} \sim 1\cdot 10^{-19}\,s$$

Hleðsluberi með fastan rekhraða $\bar{u}$ í rafsviði $\bar{E}$

Vinnan framkvæmd af $\bar{E}$

$$\Delta W = q\bar{E}\cdot(\Delta\bar{l})$$

$$\rightarrow P = \frac{\Delta W}{\Delta t}\bigg|_{\Delta t\to 0} = q\bar{E}\cdot\bar{u}$$

er aflið tekið frá $\bar{E}$

fyrir hleðslu þéttleika fast

$$dP = \bar{E}\cdot\rho\bar{u}\, dv$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{P = \int_V \bar{E}\cdot\bar{J}\, dv}$$

Joules reglan fyrir sístöðan straum

fyrir sístöðan straum gildir

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0 \quad \dashrightarrow \quad \oint_S \bar{J}\cdot d\bar{s} = 0$$

Í ómsku efni má setja saman

Heildisform

$$\bar{J} = \sigma\bar{E} \quad \text{og} \quad \bar{\nabla}\times\bar{E} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\bar{\nabla}\times\left(\frac{\bar{J}}{\sigma}\right) = 0 \quad \dashrightarrow \quad \oint_C \frac{1}{\sigma}\bar{J}\cdot d\bar{l} = 0$$

samanburður við $\bar{E}$ og $\bar{D}$ við jaðar gefur

$$\boxed{J_{1n} = J_{2n}} \quad \text{og} \quad \boxed{\frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}$$

Einsleitur leiðari

Um sístöðan straum í einsleitum leiðara gildir

$$\bar{\nabla}\times\bar{J} = 0$$

því er til mættisfall ϕ þ.a.

$$\bar{J} = -\bar{\nabla}\phi$$

og

$$\nabla^2\phi = 0$$

Skilflötur tveggja leiðandi rafsvara (lekastraumur)

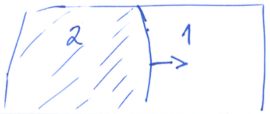
$$J_{1n} = J_{2n} \rightarrow \sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \rightarrow \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \rho_s$$

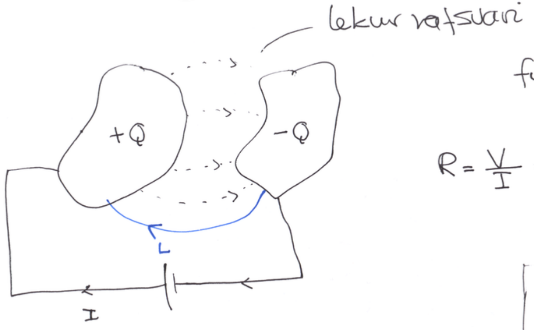
því verður að vera hleðsla á skilfletinum

$$\rho_s = \left(\epsilon_1\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \epsilon_2\right)E_{2n}$$

$$= \left(\epsilon_1 - \epsilon_2\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)E_{1n}$$



Viðnám - rýmd



fyrir viðnám gildir

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_L \bar{E}\cdot d\bar{l}}{\oint_S \bar{J}\cdot d\bar{s}} = \frac{-\int_L \bar{E}\cdot d\bar{l}}{\oint_S \sigma\bar{E}\cdot d\bar{s}}$$

fyrir rýmd

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_S \bar{D}\cdot d\bar{s}}{-\int_L \bar{E}\cdot d\bar{l}} = \frac{\oint_S \epsilon\bar{E}\cdot d\bar{s}}{-\int_L \bar{E}\cdot d\bar{l}}$$

berum saman

$$\boxed{RC = \frac{C}{G} = \frac{\epsilon}{\sigma}}$$

fyrir einsleitt efni

Dæmi

samása vír, þar höfðum við áður fundið

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$$ á lengdarein.

því er lekaviðnámið á einingarlengd

$$R = \frac{\epsilon}{\sigma}\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Aðferð til að reikna viðnám milli jafnspennuflata í efni

① velja hnitakerfi

② Gefa ráð fyrir V_0 milli skauta

③ Finna $\bar{E}$ í leiðaranum (leysa Laplace ...)

④ Finna heildarstrauminn

$$I = \int_S \bar{J}\cdot d\bar{s} = \int_S \sigma\bar{E}\cdot d\bar{s}$$

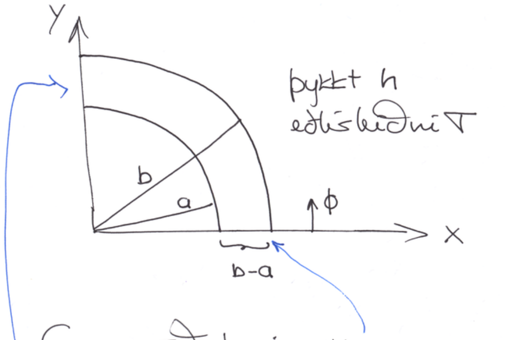
⑤ Finna R sem

$$R = \frac{V_0}{I}$$

Gildir aðeins fyrir einsleitt efni með ϵ og σ föstu

Dæmi

Reikna viðnám fjórðungsskinnu milli enda



Gerum ráð fyrir $V=0$ á $y=0$ eða $\phi=0$

$V=V_0$ á $x=0$ eða $\phi=\pi/2$

Sívalningshnit (í raun pólhnit)

$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = 0$$

almenn lausn

$$V = C_1\phi + C_2$$

með jaðarskilyrðum

$$\hookrightarrow V = \frac{2V_0}{\pi}\phi$$

Straumþéttleiki

$$\bar{J} = \sigma\bar{E} = -\sigma\bar{\nabla}V = -\hat{a}_\phi \sigma \frac{\partial V}{r\partial\phi} = -\hat{a}_\phi \frac{2\sigma V_0}{\pi r}$$

finna I, $d\bar{s} = -\hat{a}_\phi h dr$

$$I = \int_s \bar{J}\cdot d\bar{s} = \frac{2\sigma V_0}{\pi} h \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{2\sigma h V_0}{\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

og því

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{\pi}{2\sigma h \ln(b/a)}$$

D.K. Cheng minnir síðan á að það sé ekki augljóst í upphafi hvort $\bar{J}$ sé háð r !

Segulstöðufræði

Tilraunir sýna að ekki aðeins rafkraftur verkar á hleðslur

$$\bar{F}_e = q\bar{E}$$

Við bætist kraftur með annarskonar verkun

$$\bar{F}_m = q\bar{u}\times\bar{B}$$

Leiðir til nýs sviðs, $\bar{B}$, segulflæðisviðs.
Eiginleikum $\bar{B}$ er lýst með tímaóháðu jöfnunum

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0, \qquad \bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\bar{J}$$

Seinni jafnan gefur

$$0 = \bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{B}) = \mu_0\bar{\nabla}\cdot\bar{J} \rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0$$

í samræmi við „stöðufræði".

Fyrri jafnan gefur

$$\oint_s \bar{B}\cdot d\bar{s} = 0$$

Flæði $\bar{B}$ um lokað yfirborð er alltaf hverfandi í heild
→ ekki eru til frjálsar uppsprettur $\bar{B}$!
eins og hleðslur fyrir $\bar{E}$.
Segulein skaut eru ekki til! ← tilraunaniðurstaða

Stokes setningin gefur okkur

$$\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\bar{J}$$

$$\rightarrow \int_s (\bar{\nabla}\times\bar{B})\cdot d\bar{s} = \mu_0\int_s \bar{J}\cdot d\bar{s}$$

$$\rightarrow \oint_C \bar{B}\cdot d\bar{\ell} = \mu_0 I$$

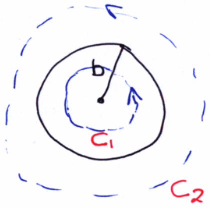
Heildi $\bar{B}$ um lokaða lykkju er jafnt straumnum um lykkjuna

Lögmál Ampères. Hægt að nota á svipaðan hátt og Gauss lögmálið fyrir $\bar{E}$

Segulstöðufræðinni er lýst með

$$\boxed{\begin{array}{ll} \overline{\nabla}\cdot\overline{B} = 0 & \oint_S \overline{B}\cdot d\overline{s} = 0 \\ \overline{\nabla}\times\overline{B} = \mu_0 \overline{J} & \oint_C \overline{B}\cdot d\overline{l} = \mu_0 I \end{array}}$$

Dæmi · óendanlega langur vír með geisla b og straum I. Finna $\overline{B}$ utan og innan vírs



← veljum heildunarvegi hringlaga sammiðja leiðaranum

innan

$$dl = \hat{a}_\phi r_1 d\phi$$

$$\overline{B}_1 = \hat{a}_\phi B_{\phi 1}$$

Heildið gefur hægrihandar-reglu: þumall í straumstefnu Fingur í $\overline{B}$ stefnu

$$\int_{C_1} \overline{B}_1\cdot d\overline{l} = \int_0^{2\pi} B_{\phi 1} r_1 d\phi = 2\pi r_1 B_{\phi 1}$$

Straumur innan C_1: $I_1 = \frac{\pi r_1^2}{\pi b^2} = \left(\frac{r_1}{b}\right)^2 I$

Því verður

$$\overline{B}_1 = \hat{a}_\phi B_{\phi 1} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 r_1 I}{2\pi b^2} \qquad r_1 \leq b$$

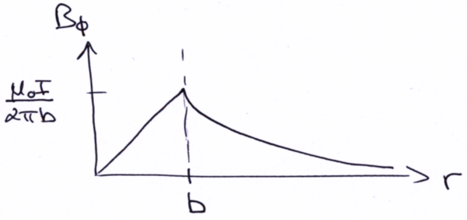
Vex línulega með fjarlægð frá miðju vírs

Utan

$$\overline{B}_2 = \hat{a}_\phi B_{\phi 2}, \quad dl = \hat{a}_\phi r_2 d\phi$$

$$\oint_{C_2} \overline{B}_2\cdot d\overline{l} = 2\pi r_2 B_{\phi 2}$$

$$\longrightarrow \overline{B}_2 = \hat{a}_\phi B_{\phi 2} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} \qquad r_2 \geq b$$



Því sést strax að inni í leiðandi sívalningskel með yfirborðstraum er $\overline{B} = 0$

En utan er sviðið af sams konar tegund

Vigurmættið

vegna $\overline{\nabla}\cdot\overline{B} = 0$ er hægt að finna vigursvið $\overline{A}$ þ.a.

$$\boxed{\overline{B} = \overline{\nabla}\times\overline{A}}$$

Þessi jafna nægir ekki til að fast ákveða $\overline{A}$

"Öll vigursvið $\overline{A}$ má skipta upp í tvo þætti $\overline{A} = \overline{A}_l + \overline{A}_t$ þ.a. $\overline{\nabla}\times\overline{A}_l = 0$ og $\overline{\nabla}\cdot\overline{A}_t = 0$. Því er hægt að bæta $\overline{A}'$ við $\overline{A}$ þ.a. $\overline{\nabla}\times\overline{A}' = 0$. $\overline{B}$ er óbreytt en $\overline{A}$ er ekki ákvarðað að fullu

↑ Hér stendur t fyrir transverse og l fyrir longitudinal

Skoðum $\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\bar{J} \rightarrow \boxed{\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{A} = \mu_0\bar{J}}$

eða

$$\boxed{\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}) - \nabla^2\bar{A} = \mu_0\bar{J}} \quad (*)$$

Í raun þarf að nota $\nabla^2\bar{A} = \bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}) - \bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{A}$ sem skilgreiningu á $\nabla^2\bar{A}$. Í kartískum hnitum fæst

$$\nabla^2\bar{A} = \hat{a}_x\nabla^2 A_x + \hat{a}_y\nabla^2 A_y + \hat{a}_z\nabla^2 A_z$$

en þessi einföldun er ekki almenn fyrir önnur hnitakerfi

Við sáum áður að $\bar{\nabla}\times\bar{E} = 0$ var notuð til þess að finna V þ.a. $\bar{E} = -\bar{\nabla}V$

Hér má nota $\bar{\nabla}\times\bar{A}_\ell = 0$ til þess að finna skalarmætti sem gæfi $\bar{A}_\ell$: $\bar{A}_\ell = -\bar{\nabla}\Phi$ t.d. Þetta skalarmætti fyndist aldrei í $\bar{B}$ því

$$\bar{B} = \bar{\nabla}\times(\bar{A}_t - \bar{\nabla}\Phi) = \bar{\nabla}\times\bar{A}_t$$

Því tökum við mesta frelsi sem við höfum og krefjumst

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{A} = 0 \leftarrow \text{A hefur þá aðeins þverhluta}$$

og jafnan verður

$$\boxed{\nabla^2\bar{A} = -\mu_0\bar{J}}$$

(Coulombmáli, þvermáli geislunarmáli)

Í óendanlegu stöðurúmi er lausn þessarar jöfnu

$$\boxed{\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} dr'^3 \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}} \quad (**)$$

Tengsl $\bar{A}$ og $\bar{B}$, $\boxed{\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A}}$ má líka skrifa á heildisformi með því að heilda yfir yfirborð og nota reglu Stokes:

$$\Phi = \int_S \bar{B}\cdot d\bar{s} = \int_S (\bar{\nabla}\times\bar{A})\cdot d\bar{s} = \oint_C \bar{A}\cdot d\bar{\ell}$$

C er jaðar yfirborðsins S.

$$\rightarrow \boxed{\Phi = \oint_C \bar{A}\cdot d\bar{\ell}}$$

Í (**) er stundum fjallað um straumdreifingu sem er einvíð eftir einhverjum lokuðum ferli C' (J er þá skilgreint með δ-föllum) og jafnan verður

$$\boxed{\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'} \frac{d\bar{\ell}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|}}$$

Segulflæðisviðið er þá

$$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{C'} \bar{\nabla}\times\left(\frac{d\bar{\ell}'}{R}\right)$$

Notum

$$\bar{\nabla}\times(f\bar{G}) = f\bar{\nabla}\times\bar{G} + (\bar{\nabla}f)\times\bar{G}$$

og

$$\bar{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\bar{R}}{R^3} = -\hat{a}_R\frac{1}{R^2}$$

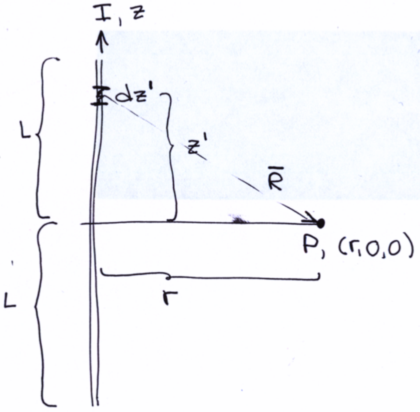
einingarvigur frá $\bar{r}'$ til $\bar{r}$

(einnig er ljóst að $\overline{\nabla}\times d\bar{l}'=0$) því fæst lögmál Biot-Savart

$$\overline{B}(\bar{r})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'}\frac{d\bar{l}'\times\hat{a}_r}{|\bar{r}-\bar{r}'|^2}$$

Dæmi

Leiðarabútur með lengd 2L og straum I. Finna $\overline{A}$ í fjarlægð r frá miðjum vír



Leiðarinn heldur áfram, því erum við aðeins að finna $\overline{A}$ í punkti P vegna þessa búts

---

$d\bar{l}'=\hat{a}_z dz'$, sívalnings hnit eru þægilegust

$$R=\sqrt{(z')^2+r^2}$$

$$\rightarrow\ \overline{A}=\hat{a}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{dz'}{\sqrt{(z')^2+r^2}}$$

$$=\hat{a}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\left(z'+\sqrt{(z')^2+r^2}\right)\right]\Big|_{-L}^{L}$$

$$=\hat{a}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left\{\frac{\sqrt{L^2+r^2}+L}{\sqrt{L^2+r^2}-L}\right\}$$

$\overline{B}$ má síðan reikna út frá

$$\overline{B}=\overline{\nabla}\times\overline{A}=\overline{\nabla}\times(\hat{a}_z A_z)=\hat{a}_r\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\phi}-\hat{a}_\phi\frac{\partial A_z}{\partial r}$$

þ.a.

$$\overline{B}=\hat{a}_\phi\frac{\mu_0 I L}{2\pi r\sqrt{L^2+r^2}}$$

eða nota Biot-Savart

$$\overline{B}(\bar{r})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'}\frac{d\bar{l}'\times\hat{a}_r}{R^2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'}\frac{d\bar{l}'\times\overline{R}}{R^3}$$

með

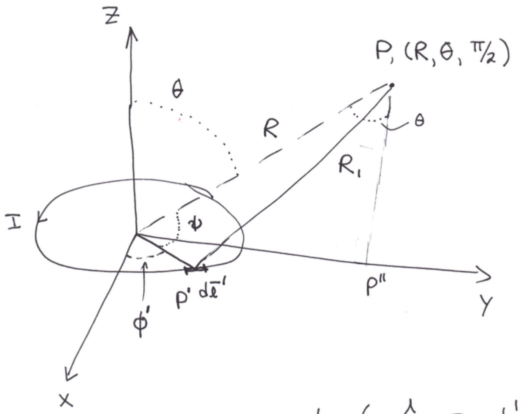
$$\overline{R}=\hat{a}_r r-\hat{a}_z z',\quad d\bar{l}'\times\overline{R}=\hat{a}_z dz'\times(\hat{a}_r r-\hat{a}_z z')$$
$$=\hat{a}_\phi r\,dz'$$

og

$$\overline{B}=\hat{a}_\phi\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{r\,dz'}{((z')^2+r^2)^{3/2}}=\hat{a}_\phi\frac{\mu_0 I L}{2\pi r\sqrt{L^2+r^2}}$$

Segultvískaut

Straumlykkja, hringur með geisla b, í x-y-sléttu ber straum I

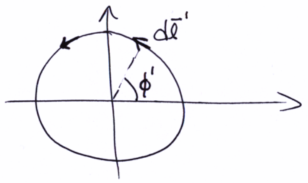


$$\overline{A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'}\frac{d\bar{l}'}{R_1}$$

Síðar þegar við viljum skoða markgildið R>>b viljum við miða svæðið við fjarlægðina frá miðju straumlykkju R

$$d\bar{l}'=(-\hat{a}_x\sin\phi'+\hat{a}_y\cos\phi')\,b\,d\phi'$$

Við höfum fest tímabundið P yfir y-ásnum



Speglað um y-ás finnst samsvarandi $d\bar{\ell}'$ þ.a. y-þáttur þessara tveggja straumfryma styttist út í heildun

$$\rightarrow \quad \bar{A} = -\hat{a}_x \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{b \operatorname{Sin}\phi'}{R_1} d\phi'$$

Samhverfa gerir mögulegt að heilda helming bilsins og margfalda með 2. Eins er augljóst að almennur P gefi $\hat{a}_\phi$ í stað $-\hat{a}_x$

$$\rightarrow \quad \bar{A} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\operatorname{Sin}\phi'}{R_1} d\phi'$$

Cósínus regla gefur

$$R_1^2 = R^2 + b^2 - 2bR \operatorname{Cos}\psi$$

ofanvarpið í tveimur skrefum í stað eins

skoðun á mynd leiðir í ljós að

$$R \operatorname{Cos}\psi = R \operatorname{Cos}(\tfrac{\pi}{2}-\theta)\operatorname{Cos}(\tfrac{\pi}{2}-\phi') = R \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\phi'$$

og

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{b^2}{R^2} - \frac{2b}{R}\operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\phi'\right)^{-1/2}$$

Viljum reikna fjær-svið og setjum því $R^2 >> b^2$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{R_1} \simeq \frac{1}{R}\left(1 - \frac{2b}{R}\operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\phi'\right)^{-1/2}$$

$$\simeq \frac{1}{R}\left(1 + \frac{b}{R}\operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\phi'\right)$$

því fæst

$$\bar{A} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I b}{2\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + \frac{b}{R}\operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\phi'\right) \operatorname{Sin}\phi' \, d\phi'$$

$$= \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I b^2}{4R^2} \operatorname{Sin}\theta \qquad \text{þ. } R >> b$$

og $\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$ gefur

$$\bar{B} = \hat{a}_R \frac{1}{R \operatorname{Sin}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi \operatorname{Sin}\theta) - \hat{a}_\theta \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R A_\phi)$$

$$= \frac{\mu_0 I b^2}{4R^3}\left(\hat{a}_R 2\operatorname{Cos}\theta + \hat{a}_\theta \operatorname{Sin}\theta\right)$$

Heildið má leysa nákvæmlega án þess að nota $R >> b$ þá fæst

$$\bar{A} = \frac{\mu_0 I b}{\pi} \frac{1}{\sqrt{b^2 + R^2 + 2Rb \operatorname{Sin}\theta}} \left[\frac{(2-k^2)K(k) - 2E(k)}{k^2}\right]$$

$$k^2 = \frac{4bR \operatorname{Sin}\theta}{R^2 + b^2 + 2Rb \operatorname{Sin}\theta}$$

og K og E eru fullkomnu sporbaugsheildin

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{da}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{Sin}^2 a}} \;, \qquad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{Sin}^2 a} \, da$$

Lausnin er einungis sett hér til þess að sýna að hún sé til í formi vel þekktra falla.

Skoðum aftur lausnina

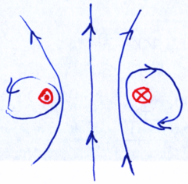
$$\bar{A} = \hat{a}_\phi \, \frac{\mu_0 (I\pi b^2)}{4\pi R^2} \sin\theta$$

Ef skilgreint er tvískautssegulvægið

$$\bar{m} = \hat{a}_z I\pi b^2 = \hat{a}_z I S = \hat{a}_z m$$

Þá fæst

$$\boxed{\bar{A} = \frac{\mu_0 \, \bar{m} \times \hat{a}_R}{4\pi R^2}}$$



Sambærilegt við mættið frá raftvískauti

$$\boxed{V = \frac{\bar{p} \cdot \hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}}$$

Segulun og jafngildur straumþéttleiki

Í efni finnast segultvískaut. Þau geta raðast upp og leitt til segulunar M ← þéttleiki tvískautvægis

$$d\bar{m} = \bar{M} \, dv'$$

$$\rightarrow d\bar{A} = \mu_0 \frac{\bar{M} \times \hat{a}_R}{4\pi R^2} dv'$$

Er vigursviðið vegna segulvægis lítils rúmfrymis dv'

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \bar{M} \times \bar{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right) dv'$$

$$\rightarrow \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \bar{M} \times \bar{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right) dv'$$

Heildar vigursviðið frá efnisbútunum í V'

Notum vigurlíkinguna $\bar{\nabla} \times (f\bar{G}) = f\bar{\nabla} \times \bar{G} + (\bar{\nabla} f) \times \bar{G}$

$$\rightarrow \bar{M} \times \bar{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R} \bar{\nabla}' \times \bar{M} - \bar{\nabla}' \times \left(\frac{\bar{M}}{R}\right)$$

Þá fæst

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\bar{\nabla}' \times \bar{M}}{R} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \bar{\nabla}' \times \left(\frac{\bar{M}}{R}\right) dv'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_{V'} \frac{\bar{\nabla}' \times \bar{M}}{R} dv' + \oint_{S'} \frac{\bar{M} \times \hat{a}_n'}{R} ds' \right\} \quad (*)$$

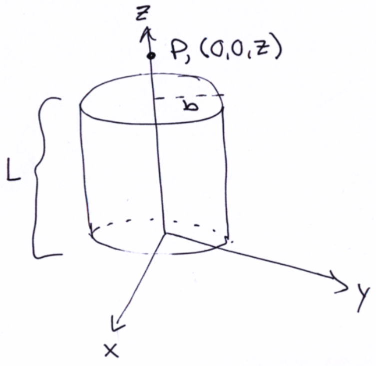
þ.s. við notuðum

$$\int_{V'} \bar{\nabla}' \times \bar{F} \, dv' = -\oint_{S'} \bar{F} \times d\bar{s}'$$

Útlit jöfnunnar segir okkur að í stað $\bar{M}$ sé hægt að skilgreina segulunarstraum þéttleika í rúmi og yfirborði þ.a.

$$\boxed{\bar{J}_m = \bar{\nabla} \times \bar{M} \, , \quad \bar{J}_{ms} = \bar{M} \times \hat{a}_n}$$

Dæmi



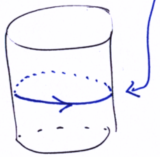
Finna segulflæðisviðið $\bar{B}$ á ás stangarseguls með geisla b og lengd L, og einsleita segulun

$$\bar{M} = \hat{a}_z M_0$$

Einsleit segulun $\rightarrow$ $\bar{J}_m = \bar{\nabla}' \times \bar{M} = 0$

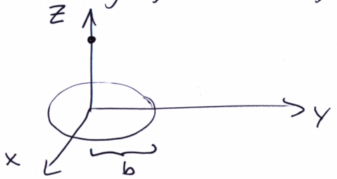
Á hlið sívalningsins

$$\bar{J}_{ms} = \bar{M} \times \hat{a}_n' = (\hat{a}_z M_0) \times \hat{a}_r = \hat{a}_\phi M_0$$



Á endaflötunum er $\hat{a}_n'$ samsíða eða andsamsíða $\bar{M}$ $\rightarrow$ $\bar{J}_{ms} = 0$ á endum

Í Ex 6-6 er reiknað segulflæðisvið einnar straumlykkju á ás yfir henni miðri (líka gert í E-2)



$$\bar{B} = \hat{a}_z \frac{\mu_0 I b^2}{2(z^2+b^2)^{3/2}}$$

Nú erum við með sívalningsflöt með straumþéttleika frá hverjum hring á yfirborðinu með hæð dz' fast

$$d\bar{B} = \hat{a}_z \frac{\mu_0 \overbrace{(M_0 dz')}^{I \,=\, J_{ms} dz'} b^2}{2\left[(z-z')^2 + b^2\right]^{3/2}}$$

Nú heildum við yfir z'

$$\bar{B} = \hat{a}_z \int_0^L \frac{\mu_0 M_0 b^2 dz'}{2\left[(z-z')^2+b^2\right]^{3/2}}$$

$$= \hat{a}_z \frac{\mu_0 M_0}{2} \left\{ \frac{z}{\sqrt{z^2+b^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2+b^2}} \right\}$$

Nærri efni getur segulflæðisviðið $\bar{B}$ raðað upp tvískautum innan efnisins og/eða spanað strauma þ.a.

$$\frac{1}{\mu_0} \bar{\nabla} \times \bar{B} = \bar{J} + \bar{J}_m = \bar{J} + \bar{\nabla} \times \bar{M}$$

$$\rightarrow \bar{\nabla} \times \left(\frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \right) = \bar{J} \leftarrow \text{„frjáls straumur"}$$

Því er heppilegt að skilgreina segulsviðið $\bar{H}$ þ.a.

$$\boxed{\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \quad \rightarrow \quad \bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J}}$$

Ef efni er línulegt gildir

$$\bar{M} = \chi_m \bar{H}$$

með χ_m segulviðtak

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{B} &= \mu_0 (1 + \chi_m) \bar{H} \\ &= \mu_0 \mu_r \bar{H} \doteq \mu \bar{H} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\mu_r = 1 + \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0}}$$

samanburður

$\bar{E}$ — $\bar{B}$
$\bar{D}$ — $\bar{H}$
ϵ — $\frac{1}{\mu}$
$\bar{P}$ — $-\bar{M}$
ρ — $\bar{J}$
V — $\bar{A}$

Segulrásir

Hvernig flæða $\overline{B}$ og $\overline{H}$ um spennubreyta og fleiri segulrásir

Grunnjöfnur

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{B} = 0$$

$$\overline{\nabla}\times\overline{H} = \overline{J}$$

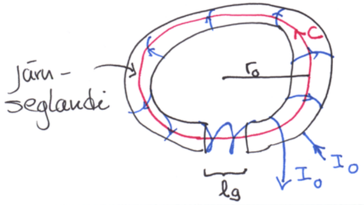
(frjálsi straumurinn sem við viljum stjórna)

Heildisform

$$\oint_C \overline{H}\cdot d\overline{l} = NI = V_m$$

magneto-motive force „ístraumur"

Dæmi (um segulrás)



Kleinuhringur (hjólflötur) með geil

$2\pi r_0 >> l_g$, þversnið $S << \pi r_0^2$.

$S = \pi a^2$, $a << r_0$

Ekkert flæðistap út fyrir

$$\overline{B}_f = \overline{B}_g = \hat{a}_\phi B_f$$

í geil

í járni

$$\overline{H}_f = \hat{a}_\phi \frac{B_f}{\mu}$$

$$\overline{H}_g = \hat{a}_\phi \frac{B_f}{\mu_0}$$

en við höfum ekki reiknað þessar stærðir enn.

Við höfum aðeins tengt þær

Notum $\oint \overline{H}\cdot d\overline{l} = NI_0$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{B_f}{\mu}(2\pi r_0 - l_g)}_{\text{járn}} + \underbrace{\frac{B_f}{\mu_0} l_g}_{\text{geil}} = NI_0$$

$$\rightarrow \overline{B}_f = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 \mu N I_0}{\mu_0(2\pi r_0 - l_g) + \mu l_g}$$

$$\overline{H}_f = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 N I_0}{\mu_0(2\pi r_0 - l_g) + \mu l_g}$$

$$\overline{H}_g = \hat{a}_\phi \frac{\mu N I_0}{\mu_0(2\pi r_0 - l_g) + \mu l_g}$$

$$\frac{H_g}{H_f} = \frac{\mu}{\mu_0} \rightarrow$$ segulsviðið er miklu sterkara í geilinni

Um segulflæðið gildir hér

$$\Phi \simeq BS$$

$$\Phi = \frac{NI_0}{\frac{(2\pi r_0 - l_g)}{\mu S} + \frac{l_g}{\mu_0 S}} = \frac{V_m}{\mathcal{R}_f + \mathcal{R}_g}$$

þar sem

$$\mathcal{R}_f = \frac{l_f}{\mu S}, \quad l_f = 2\pi r_0 - l_g$$, Segulviðnám (reluctance)

Vídd $\mathcal{R}$ er (H^{-1})

$$\mathcal{R}_g = \frac{l_g}{\mu_0 S}$$

Φ í segulrásinni hefur sömu stöðu og I í rafrás, og μ hefur stöðu σ

Venjulega í járnseglandi efni tengjast $\overline{B}$ og $\overline{H}$ ólínulega (μ er ekki fasti....) því þarf að skoða þannig verkefni betur.

En hægt er að skrifa „Kirchhoffs"-reglur fyrir segulrásir

$$\boxed{\sum_j N_j I_j = \sum_k \mathcal{R}_k \Phi_k}$$

um lokaðan veg í segulrás er summa ístraumanna jöfn summu margfeldis segulflæðanna og segulviðnámanna

$$\boxed{\sum_j \Phi_j = 0}$$

jafngildir $\overline{\nabla}\cdot\overline{B} = 0$
B-flæðið er varðveitt

Seglandi efni

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

Mótseglandi $\mu_r \lesssim 1$, $\chi_m \lesssim 0$, (diamagnetic)

Meðseglandi $\mu_r \gtrsim 1$, $\chi_m \gtrsim 0$, (Paramagnetic)

Járnseglandi $\mu_r >> 1$, $\chi_m >> 1$, (Ferromagnetic)

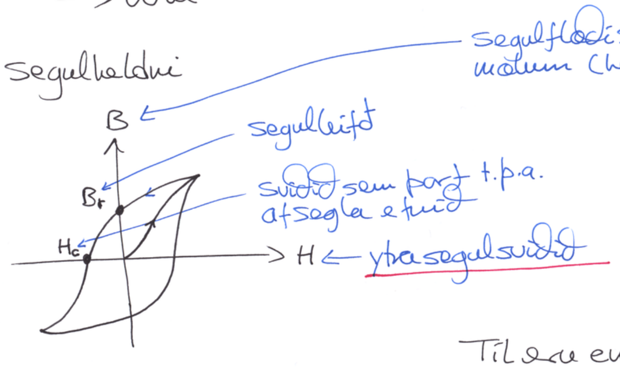
{ Seglun er stórsæ afleiðing skammtafræðinnar. Jafnvel mótseglun er ekki hægt að lýsa með sígildri aflfræði }

Öll efni eru mótseglandi, en önnur hrif geta verið sterkari og falið hana

---

{ Járnseglun er vegna sterkrar skiptavíxlverkunar milli rafeinda }
↳ Óðul . . . . .

Segulheldni



Til eru enn flóknari hættir seglandi efnis. . .

$\mu(H)$, $B = \mu(H)H$

$$\frac{\bar{B}}{\mu_0} = \bar{H} + \bar{M}$$

Jaðarskilyrði segulsviðs

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0 \longrightarrow \boxed{B_{1n} = B_{2n}}$$ við skilflöt

$$\oint_C \bar{H}\cdot d\bar{l} = I \longrightarrow \boxed{\hat{a}_{n2}\times(\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{J}_s}$$

↑ yfirborðsstraumur

$\bar{J}_s \neq 0$ er notaður einungis fyrir ofurleiðara og hugsaðan kjörleiðara með ofur góða leiðni ←

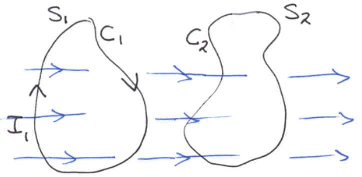
Gleymum ekki að við höfum lýst bol M með yfirborðsstraumi í stangarsegli

Ef $\bar{B}_1 = \mu_1\bar{H}_1$ og $\bar{B}_2 = \mu_2\bar{H}_2$ fæst

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

Span

Hugsum tvær straumlykkjur



I_1 leiðir til sviðs og flæðis í gegnum S_2

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \bar{B}\cdot d\bar{s}_2$$

Biot-Savart gefur að B_1 tengist I_1 línulega í tómarúmi

Setjum því

$$N_2\Phi_{12} = L_{12}I_1$$

Fastinn L_{12} er kallaður víxlspan. Oft er skilgreind flæðistengsl (flux linkage)

$$\Lambda_{12} = N_2\Phi_{12}$$

$$\rightarrow \Lambda_{12} = L_{12}I_1$$

og því

$$\boxed{L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1}}$$

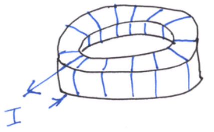
Í flóknara efni verður að notast við

$$\boxed{L_{12} = \frac{d\Lambda_{12}}{dI_1}}$$

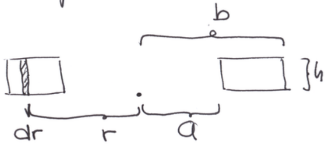
Í hverri rás er einnig sjálfspan

$$\boxed{L_{11} = \frac{d\Lambda_{11}}{dI_1}}$$

Dæmi



þversnið



$$\bar{B} = \hat{a}_\phi B_\phi$$

$$d\bar{l} = \hat{a}_\phi r d\phi$$

B er fasti fyrir fast r, en breytist með r

$$\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} = \int_0^{2\pi} B_\phi r d\phi = 2\pi r B_\phi$$

Nú gildir að

$$\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 NI$$

$$\rightarrow B_\phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

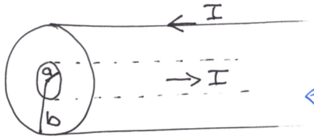
$$\Phi = \int_S \bar{B}\cdot d\bar{s} = \int_S \left(\hat{a}_\phi \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\right)\cdot\left(\hat{a}_\phi h dr\right)$$

$$= \frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \mu_0\frac{NIh}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Lambda = N\Phi = \mu_0\frac{N^2Ih}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\longrightarrow L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Dæmi Samása kapall



Innan innri leiðara $0 \leq r \leq a$

Reiknað áður

$$\bar{B}_1 = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2}$$

$$\rightarrow \bar{J} = \frac{I}{\pi a^2}\hat{a}_z$$

gert ráð fyrir jafnri straumdreifingu

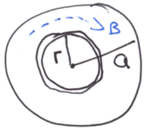
Milli leiðara $a \leq r \leq b$

$$\bar{B}_2 = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

samhverfan (sívalnings) leyfir aðeins $\hat{a}_\phi$-þátt fyrir segulsviðið

Flæðið

Í innri leiðara $0 \leq r \leq a$ hugsum við okkur þunnan hring með þykkt dr



flæðið inni í þessum hring á einingarlengd í z-stefnu er (milli r og r+dr)

$$d\Phi_1' = \frac{\mu_0 I r dr}{2\pi a^2}$$

Innan geislans r flýtur aðeins hluti straumsins

$$I\left(\frac{r}{a}\right)^2$$

því eru flæðitengslin

$$d\Lambda_1' = \frac{\mu_0 I r dr}{2\pi a^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2$$

og í heild fyrir innri leiðarann

$$\Lambda_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^4}\int_0^a r^3 dr = \frac{\mu_0 I}{8\pi}$$

$$\rightarrow \boxed{L_1 = \frac{\Lambda_1}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi}}$$

Sjálfspan eins leiðara óháð a!

Milli leiðara $a \le r \le b$

$$d\Phi_2' = \frac{\mu_0 I\, dr}{2\pi r}$$

$$\rightarrow \Lambda_2' = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\rightarrow L_2' = \frac{\Lambda_2}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\boxed{L' = L_1' + L_2' = \frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right\}}$$

Síðar verður spanið fyrir þetta kerfi reiknað út frá orkunni í segulflæðinu.

Segulorka

Ein straumlykkja, straumur aukinn frá $0 \rightarrow I_1$

Vitum að lykkjan vinnur á móti breytingunni með íspennu

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

Vinnan sem framkvæma þarf

$$W_1 = \int v_1 i_1\, dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1\, di_1$$

$$= \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

fyrir N-lykkjur fæst

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} L_{jk} I_j I_k$$

Athugum hvort hægt sé að tengja orkuna við segulflæðisviðið í stað straumsins um rásina

[Orkuna í þessu mætti hugsa í sviðinu eða hleðsluuppröðuninni]

Segulorka í sviði

Cheng sýnir að orkan í segulflæðisviði sé

$$W_m = \frac{1}{2}\int_{V'} \bar{H}\cdot\bar{B}\, dv'$$

og því sé segulorkuþéttleikinn

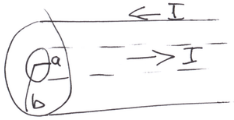
$$w_m = \frac{1}{2}\bar{H}\cdot\bar{B}$$

$$= \frac{B^2}{2\mu}$$

$$= \frac{1}{2}\mu H^2$$

Dæmi

Reiknum aftur L' fyrir samása kapal án þess að nota flæðistengslin Λ.



Í innri leiðaranum

$$W_{m1}' = \frac{1}{2\mu_0}\int_0^a B_{\phi 1}^2\, 2\pi r\, dr$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a^4}\int_0^a r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

---

milli leiðara

$$W_{m2}' = \frac{1}{2\mu_0}\int_a^b B_{\phi 2}^2\, 2\pi r\, dr$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

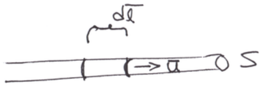
almennt gildir $W_m = \frac{1}{2} L I^2$

$$\rightarrow L' = \frac{2}{I^2}\left(W_{m1}' + W_{m2}'\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Eins og áður, en á miklu einfaldari hátt.

Kraftar og vægi milli straumleiðara



Lorentz krafturinn (segulhlutinn)

$$\bar{F}_m = q\,\bar{u}\times\bar{B}$$

verkar á eindir í leiðara

$$d\bar{F}_m = -neS|d\bar{l}|\,\bar{u}\times\bar{B}$$

$$= -neS|\bar{u}|\,d\bar{l}\times\bar{B}$$

n: þéttleiki einda

$d\bar{l}$ samsíða $\bar{u}$

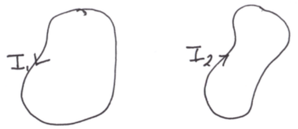
$$I = -neS|\bar{u}|$$

$$\rightarrow d\overline{F}_m = I\, d\overline{l} \times \overline{B}$$

Segulkrafturinn á lokaða rás C með straum í sviðinu B er

$$\overline{F}_m = I \oint_C d\overline{l} \times \overline{B}$$

Tvær lokaðar rásir



Kraftur á C_1 vegna segulsviðs frá C_2 er

$$\overline{F}_{21} = I_1 \oint_{C_1} d\overline{l}_1 \times \overline{B}_{21}$$

Þá er krafturinn milli rásanna

Biot-Savart

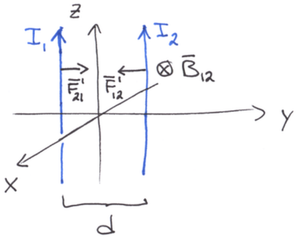
$$\overline{B}_{21} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\overline{l}_2 \times \hat{a}_{R21}}{R_{21}^2}$$

$$\overline{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\overline{l}_1 \times (d\overline{l}_2 \times \hat{a}_{R21})}{R_{21}^2}$$

Í bók er sýnt að $\overline{F}_{21} = -\overline{F}_{12}$ eins og verður að vera

---

Dæmi



Samsíða straumvírar í x-y-sléttu

Kraftur á vír 2 á lengdareiningu vegna segulflæðisviðs við vír 2 frá straum I_1 í vír 1

$$\overline{F}_{12}' = I_2(\hat{a}_z \times \overline{B}_{12})$$

Ampère reglan gefur

$$\overline{B}_{12} = -\hat{a}_x \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \longrightarrow \overline{F}_{12}' = -\hat{a}_y \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

Kraftur í átt að hinum vírnum

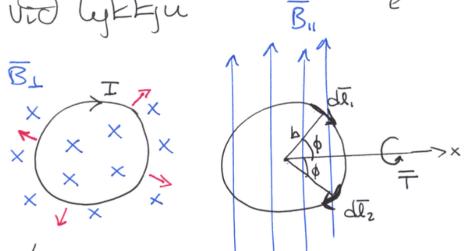
Samsíða straumar → aðdráttarkraftur

Andsamsíða str. → fráhrindikraftur

Lykkja í föstu sviði

$\overline{B} = \overline{B}_\perp + \overline{B}_\parallel$ miðað við lykkju

$\overline{B}_\parallel$ reynir að snúa lykkju



$\overline{B}_\perp$ þenur lykkjuna út eða ýtir saman

$$d\overline{T} = \hat{a}_x 2\, (dF)\, b \sin\phi$$

$$= 2\hat{a}_x (I dl\, B_\parallel \sin\phi)\, b \sin\phi$$

$$= a_x\, 2Ib^2 B_\parallel \sin^2\phi\, d\phi$$

Ef $dF = |d\overline{F}_1| = |d\overline{F}_2|$

$|d\overline{l}_1| = |d\overline{l}_2| = b\,d\phi$

$$\overline{T} = \int d\overline{T} = \hat{a}_x 2Ib^2 B_\parallel \int_0^\pi \sin^2\phi\, d\phi$$

$$= \hat{a}_x I (\pi b^2) B_\parallel$$

Ef við skilgreinum segul-tvískautsvægið

$$\overline{m} = \hat{a}_n I(\pi b^2) = \hat{a}_n I S$$

Þá fæst

$$\boxed{T = \overline{m} \times \overline{B}}$$

$$\left(\text{Því } \overline{m} \times (\overline{B}_\perp + \overline{B}_\parallel) = \overline{m} \times \overline{B}_\parallel\right)$$

gildir aðeins í föstu einsleitu sviði

Kraftar reiknaðir út frá orkuvarðveislu

Fast flæði

Kerfi rása. Hvikun einnar rásar um $d\overline{l}$ leiðir ekki til flæðisbreytingar → engin orka flytur til rásanna

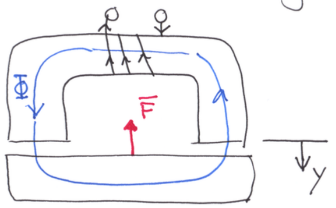
mekanísk vinna kerfisins

$$\overline{F}_\Phi \cdot d\overline{l} = -dW_m$$

$$= -(\overline{\nabla} W_m) \cdot d\overline{l}$$

minnkar orku þess

Dæmi — Rafsegull



aukin geil dy eykur orku kerfisins um dW_m (Φ er fasti)

$$dW_m = d(W_m)_{geil} = 2\left(\frac{B^2}{2\mu_0}S\,dy\right)$$

$$= \frac{\Phi^2}{\mu_0 S}dy$$

aðdráttarkraftur

$$\overline{F}_\Phi = \hat{a}_y (F_\Phi)_y = -\hat{a}_y \frac{\Phi^2}{\mu_0 S}$$

$$\left(\overline{F}_\Phi = -(\overline{\nabla} W_m)\cdot d\overline{l}\right)$$

---

fastir straumar

Í þessu tilfelli eru rásirnar tengdar við straumvaka sem vinna gegn íspennunni í kerfinu og leggja til orku.

$$dW_s = \sum_k I_k\, d\Phi_k$$

þessi orka er jöfn mekanísku vinnunni sem kerfið framkvæmir og viðbót í segulorku

$$dW_s = dW + dW_m$$

$$dW_m = \frac{1}{2}\sum_k I_k\, d\Phi_k = \frac{1}{2}dW_s$$

því fæst fyrir vinnu kerfis

$$dW = \overline{F}_I \cdot d\overline{l} = dW_m$$

$$= (\overline{\nabla} W_m)\cdot d\overline{l}$$

$$\rightarrow \boxed{\overline{F}_I = \overline{\nabla} W_m}$$

Endurreiknum seguldæmið

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

$$\Phi = \frac{NI}{\mathcal{R}_c + \frac{2y}{\mu_0 S}}$$

segulviðnám kjarna

geila

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N^2}{\mathcal{R}_c + \frac{2y}{\mu_0 S}}$$

$$\overline{F}_I = \overline{\nabla} W_m = \frac{1}{2}\overline{\nabla}(LI^2)$$

$$= \hat{a}_y \frac{I^2}{2}\frac{dL}{dy} = -\hat{a}_y \frac{1}{\mu_0 S}\left(\frac{NI}{\mathcal{R}_c + \frac{2y}{\mu_0 S}}\right)^2 = -\hat{a}_y \frac{\Phi^2}{\mu_0 S}$$

Sama svar og áður fyrir kraftinn!

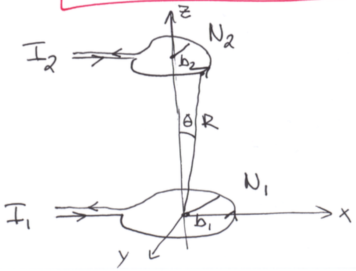
Kraftar frá víxlspani

Tvær lykkjur (spólur)

$$W_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + L_{12}I_1 I_2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2$$

fastur straumur

$$\boxed{\overline{F}_I = I_1 I_2 \overline{\nabla} L_{12}}$$



í spólu 2

$$\overline{A}_{12} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 N_1 I_1 b_1^2}{4R^2}\sin\theta$$

$$= \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 N_1 I_1 b_1^2}{4R^2}\left(\frac{b_2}{R}\right)$$

$$= \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 N_1 I_1 b_1^2 b_2}{4(z^2+b_2^2)^{3/2}}$$

$$\Phi_{12} = \oint_{C_2} \overline{A}_{12}\cdot d\overline{l}_2$$

$$= \int_0^{2\pi} A_{12}\, b_2\, d\phi$$

$$= \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 N_1 I_1 b_1^2 b_2^2 \pi}{2(z^2+b_2^2)^{3/2}}$$

$$L_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi b_1^2 b_2^2}{2(z^2 + b_2^2)^{3/2}}$$

$$\bar{F}_{12} = \hat{a}_z I_2 I_1 \frac{dL_{12}}{dz}\Big|_{z=d} = -\hat{a}_z I_1 I_2 \frac{3\mu_0 N_1 N_2 \pi b_1^2 b_2^2 d}{2(d^2 + b_2^2)^{5/2}}$$

$$\simeq -\hat{a}_z \frac{3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi d^4} \qquad \text{ef } d >> b$$

ef

$$m_1 = N_1 I_1 \pi b_1^2 \qquad m_2 = N_2 I_2 \pi b_2^2$$

Tímaháð svið og jöfnur Maxwells

Í rafstöðufræði var

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = 0$$

notuð t.þ.a finna rafmætti V þ.a.

$$\bar{E} = -\bar{\nabla} V$$

því almennt gildir

$$\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} V) = 0$$

tilraunir á tímaháðum sviðum hefur leitt til endurbótar á jöfnunni

$$\boxed{\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \bar{B}}$$

Rafsviðið er því ekki geymið þar sem segulflæði breytist með tíma. Þar er ekki til mættisfall fyrir $\bar{E}$

'A heildisformi fæst

$$\boxed{\oint_c \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\int_s \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s}} \qquad (*)$$

Almenn leið c og yfirborð s óháð leiðurum og rásum

Ef c er eftir rás má túlka

$$\oint_c \bar{E} \cdot d\bar{l} = V$$

sem íspennu rásarinnar vegna breytinga á segulflæðinu um s

$$\Phi = \int_s \bar{B} \cdot d\bar{s}$$

(*) verður þá

$$\boxed{V = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Lögmál Faradays

Íspennan í lokaðri rás (kyrri) er jöfn neikvæðri breytingu segulflæðisins um rásina

Lögmál Lenzs

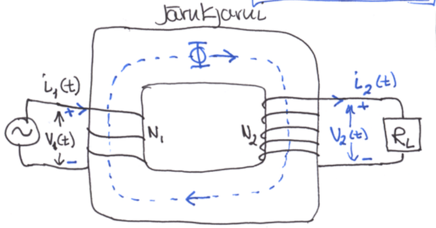
Íspennan skapar straum sem veldur segulsviði til þess að viðhalda ytra segulsviðinu

↑ neikvæða formerkið

Spennubreytir

Athugum einfaldan spennubreyti

Örvar og spennur eiga hér við visst augnablik í tíma



Breytingin á Φ í seinni spólunni veldur íspenni í henni samkvæmt lögmáli Faradays

'Áður höfðum við um segulrásir

$$\sum_j N_j I_j = \sum_k \mathcal{R}_k \Phi_k$$

Lögmál Lenzs segir okkur að íspennan í spólu 2 vinni móti segulflæðinu frá spólu 1

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \mathcal{R} \Phi$$

Heili einfaldi kjarninn getur

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}$$

Kjör spennubreytir

$\mu \to \infty$

$$\to \boxed{\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1}}$$

Faraday gefur

$$v_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

$$v_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

(Miðað við augnablikið [illegible] upp hér að framan)

$$\to \boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2}}$$

Álagsviðnámið R_L leiðir til virks álags

$$(R_1)_{eff} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{\left(\frac{N_1}{N_2}\right) v_2}{\left(\frac{N_2}{N_1}\right) i_2}$$

$$= \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_L$$

fyrir sínus AC-gjafa fæst fyrir samviðnámið

$$\boxed{(Z_1)_{eff} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L}$$

Raunspennir

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \frac{l}{\mu S} \Phi$$

$$\to \begin{cases} \Lambda_1 = N_1 \Phi = \frac{\mu S}{l} \left(N_1^2 i_1 - N_1 N_2 i_2 \right) \\ \Lambda_2 = N_2 \Phi = \frac{\mu S}{l} \left(N_1 N_2 i_1 - N_2^2 i_2 \right) \end{cases}$$

$$v_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} - L_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} = L_{12} \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}$$

með $L_1 = \frac{\mu S}{l} N_1^2$ $\quad L_{12} = \frac{\mu S}{l} N_1 N_2$

$L_2 = \frac{\mu S}{l} N_2^2$

Því sést að $\mu \to \infty$ áður er jafngilt $L_i \to \infty$

Ef ekkert flæði lekur

$$L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$$

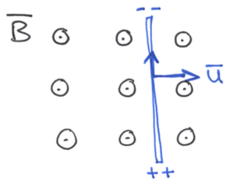
annars

$$L_{12} = k\sqrt{L_1 L_2}, \quad k < 1$$

tengistuðull

Viðnám . . . . . . – .

Leiðari á hreyfingu í föstu segulsviði



fastur hraði $\overline{u}$ $\to$ Kraftur á hleðslur innan stangar

$$\overline{F}_m = q \overline{u} \times \overline{B}$$

Rafeindir færast að öðrum endanum

og valda spennu milli enda

Án ytri rásar verða þessir kraftar í jafnvægi

hreyfispennan er

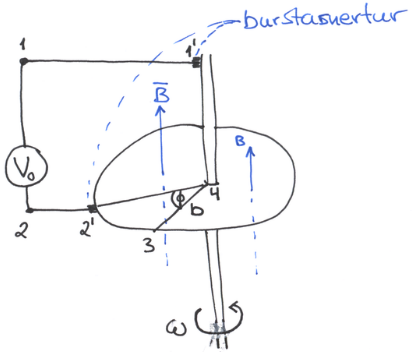
$$V'_{21} = \int_1^2 (\overline{u} \times \overline{B}) \cdot dl$$

fyrir lokaða rás fæst

$$V' = \oint_C (\overline{u} \times \overline{B}) \cdot d\overline{l}$$

hreyfispennan í rásinni

Dæmi Faraday skífa



$$\overline{B} = \hat{a}_z B_o$$

$$V_o = \oint (\overline{u} \times \overline{B}) \cdot d\overline{l}$$

$$= \int_3^4 \left\{ (\hat{a}_\phi r\omega) \times \hat{a}_z B_o \right\} \cdot (\hat{a}_r dr)$$

$$= \omega B_o \int_b^0 r\,dr = -\frac{\omega B_o b^2}{2}$$

Hér er í raun sama hvar radial leiðið er valið að vera $(3 \to 4)$

Hvernig tengjast þessar tvær aðferðir til að finna V?

q hreyfist með $\bar{u}$ á svæði með $\bar{E}$ og $\bar{B}$

Á q verkar Lorentz-Kraftur

$$\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{u} \times \bar{B})$$

Athugandi á q sér enga hreyfingu og álítur F á q vera vegna

$$\bar{E}' = \underbrace{\bar{E} + \bar{u} \times \bar{B}}$$

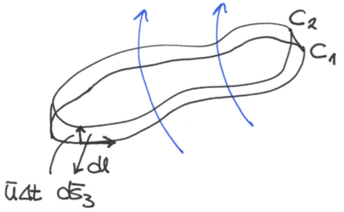
Því er íspennan í rás á hreyfingu vegna tveggja þátta

$$\boxed{\oint_C \bar{E}' \cdot d\bar{l} = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s} + \oint_C (\bar{u} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l}}$$

Almennt Lögmál Faradays

Athugum betur

Rás C hreyfist frá C_1 í t í C_2 á t+dt í $\bar{B}$



Milli C_1 og C_2 liggur flötur S_3

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\int_S \bar{B} \cdot d\bar{s}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left\{\int_{S_2} \bar{B}(t+\Delta t) \cdot d\bar{s}_2 - \int_{S_1} \bar{B}(t) \cdot ds_1\right\}$$

$$\bar{B}(t+\Delta t) = \bar{B}(t) + \frac{\partial}{\partial t}\bar{B}(t) \cdot \Delta t + \cdots$$

Því fæst

$$\frac{d}{dt}\int_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = \int_S \frac{\partial}{\partial t}\bar{B} \cdot d\bar{s}$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left\{\int_{S_2} \bar{B} \cdot d\bar{s}_2 - \int_{S_1} \bar{B} \cdot d\bar{s}_1 + \cdots\right\}$$

$\bar{B} = \bar{B}(t)$ hér

---

notum nú að $\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0$ og

div setningin kveður á um normal vigur út úr rúmmálinu

$$0 = \int_V \bar{\nabla} \cdot \bar{B}\, dv = \int_{S_2} \bar{B} \cdot d\bar{s}_2 - \int_{S_1} \bar{B} \cdot d\bar{s}_1 + \int_{S_3} \bar{B} \cdot d\bar{s}_3$$

$$d\bar{s}_3 = d\bar{l} \times \bar{u}\,\Delta t \quad , \quad \bar{B} \cdot (d\bar{l} \times \bar{u})\Delta t = d\bar{l} \cdot \bar{u} \times \bar{B}\ \Delta t$$

$$\rightarrow \int_{S_2} \bar{B} \cdot d\bar{s}_2 - \int_{S_1} \bar{B} \cdot d\bar{s}_1 = -\Delta t \oint_C (\bar{u} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l}$$

eða í heild

$$\frac{d}{dt}\int_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s} - \oint_C (\bar{u} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l}$$

$$\rightarrow \boxed{V' = -\frac{d}{dt}\int_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Lögmál Faradays gildir því bæði um rásir á hreyfingu eða kyrrstæðar

Skiptingin í hreyfi íspennu og íspennu er ekki einkvæm

Dæmi aftur skífa Faradays

Segulflæðið í gegnum sneiðina 2'342'

$$\Phi = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = B_0 \int_0^b r\,dr \int_0^{\omega t} d\phi = B_0(\omega t)\frac{b^2}{2}$$

$$\rightarrow V_0 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\omega B_0 b^2}{2}$$

Sama og áður

Stærð sneiðar skipti ekki máli hér!

Jöfnur Maxwells

Höfum tengt $\bar{E}$ og $\bar{B}$ með

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

Jafnan $\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J}$ uppfyllir ekki varðveislu hleðslu

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{H}) = 0 = \bar{\nabla} \cdot \bar{J}$$

En $\bar{\nabla} \cdot \bar{J} = 0$ gildir ekki almennt heldur

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \bar{\nabla} \cdot \bar{J} = 0$$

því er bætt við lið

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{H}) = 0 = \bar{\nabla} \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{H}) = \bar{\nabla} \cdot \left(\bar{J} + \frac{\partial}{\partial t}\bar{D}\right)$$

eða

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial}{\partial t}\bar{D}$$

Tilraunir sýna að nú erum við komin með fullkomið safn jafna

$$\boxed{\begin{aligned} &\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \qquad &&\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial}{\partial t}\bar{D} \\ &\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = \rho, &&\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \end{aligned}}$$

Jöfnur Maxwells

sem á heildisformi verða

$$\boxed{\begin{aligned} &\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad &&\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = I + \int_S \frac{\partial}{\partial t}\bar{D} \cdot d\bar{s} \\ &\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q &&\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0 \end{aligned}}$$

Mættisföll

Í segulstöðufræði var $\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0$ notað t.þ.a. finna vigurmætti $\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$

þessi jafna er óbreytt fyrir tímaháð svið

$\longrightarrow$ Höldum $\bar{A}$ þ.a. $\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$

Athugum í Lögmáli Faradays

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\bar{B}$$

$$\rightarrow \bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\nabla} \times \bar{A}) \rightarrow \bar{\nabla} \times \left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right) = 0$$

því er hægt að finna skalarmætti þ.a.

$$\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\bar{\nabla} V$$

Við veljum V þannig til þess að fyrir tímaóháð svið fáist aftur $\bar{E} = -\bar{\nabla} V$

því fæst

$$\boxed{\bar{E} = -\bar{\nabla} V - \frac{\partial}{\partial t}\bar{A}}$$

því er tímaháð $\bar{E}$ ekki einungis vegna hleðslu í gegnum $-\bar{\nabla} V$ heldur einnig vegna breytilegs segulflæðis í gegnum $-\frac{\partial}{\partial t}\bar{A}$

því er ólíklegt að jöfnurnar

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho}{R}\, dv' \quad \text{og} \quad \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\bar{J}}{R}\, dv'$$

haldi nema fyrir næstum tímaóháð svið

(þessi svið eru lausnir jöfnu Poissons, sem er óháð tíma)

Leitum því jafna fyrir $\bar{A}$ og V sem uppfylla jöfnur Maxwells

Byrjum með

$$\bar{\nabla}\times\bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial}{\partial t}\bar{D}$$

Notum fyrst $\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu}$ og $\bar{D} = \epsilon\bar{E}$

og gerum ráð fyrir einsleitu efni
μ og ε eru þá fastar

$$\longrightarrow \quad \bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu\bar{J} + \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\bar{E}$$

Síðan líka $\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A}$ og $\bar{E} = -\bar{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t}\bar{A}$

$$\longrightarrow \quad \bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{A} = \mu\bar{J} + \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\bar{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t}\bar{A}\right)$$

Notum

$$\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{A} = \bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}) - \nabla^2\bar{A}$$

og fáum

$$\boxed{\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}) - \nabla^2\bar{A} = \mu\bar{J} - \bar{\nabla}\left(\mu\epsilon\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A}} \quad (*)$$

Til þess að ákvarða vigur $\bar{A}$ þarf bæði að ákvarða $\bar{\nabla}\cdot\bar{A}$ og $\bar{\nabla}\times\bar{A}$ (Langs- og þverþátt $\bar{A}$)

Við höfum $\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A}$

Ákvörðum langsþáttinn sem

$$\boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{A} + \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}V = 0}$$

Kvarðafrelsi....
Lorentz kvarði
margir aðrir möguleikar til

þá verður (*)

$$① \quad \boxed{\nabla^2\bar{A} - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A} = -\mu\bar{J}}$$

Hliðruð bylgjujafna fyrir $\bar{A}$

Byrjum nú með

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho \quad \text{og} \quad \bar{D} = \epsilon\bar{E}$$

og

$$\bar{E} = -\bar{\nabla}V - \frac{\partial\bar{A}}{\partial t}$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho \;\rightarrow\; \epsilon\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \rho \;\rightarrow\; -\bar{\nabla}\cdot\epsilon\left(\bar{\nabla}V + \frac{\partial}{\partial t}\bar{A}\right) = \rho$$

$$\longrightarrow \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Notum nú Lorentz kvörðun $\bar{\nabla}\cdot\bar{A} = -\mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}V$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\nabla^2 V - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}V = -\frac{\rho}{\epsilon}}$$

②

Hliðruð bylgjujafna fyrir V

Hliðraðar bylgjujöfnur ①+② ákvarða $\bar{A}$ og V

Frá jöfnum Maxwells má finna jaðarskilyrðin

$$\boxed{\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} \\ \hat{a}_{n2}\times(\bar{H}_1 - \bar{H}_2) &= \bar{J}_s \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{a}_{n2}\cdot(\bar{D}_1 - \bar{D}_2) &= \rho_s \\ B_{1n} &= B_{2n} \end{aligned}}$$

Ekki óháð skilyrði

jafngildar

jafngildar

Tveir rafsvarar með

$\rho_s = 0, \quad \bar{J}_s = 0$

Ekkert orkutap

$$E_{1t} = E_{2t} \rightarrow \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

$$H_{1t} = H_{2t} \rightarrow \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$D_{1n} = D_{2n} \rightarrow \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

$$B_{1n} = B_{2n} \rightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

Rafsvari ①	Kjörleiðari ②
$E_{1t} = 0$	$E_{2t} = 0$
$\hat{a}_{n2} \times \bar{H}_1 = \bar{J}_s$	$H_{2t} = 0$
$\hat{a}_{n2} \cdot \bar{D}_1 = \rho_s$	$D_{2n} = 0$
$B_{1n} = 0$	$B_{2n} = 0$

Lausnir bylgjujafna

Veljum punkt hleðslu $\rho(t)\Delta v'$ í mitt kúluhnitakerfi.

utan miðju gildir

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R}\right) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

Rúmið er einsleitt, punkt hleðslan leiðir til kúlusamhverfu.

Engin átt er sérstæðari en önnur

með nýjum

$$V(R,t) = \frac{1}{R} U(R,t)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

Einvíð bylgjujafna

Almennu lausnirnar eru öll tvídiffranleg föll af $(t - R\sqrt{\mu\epsilon})$ eða $(t + R\sqrt{\mu\epsilon})$

Við sjáum rétt bráðum að eðlisfræðilega lausnin er

$$U(R,t) = f(t - R\sqrt{\mu\epsilon})$$

$$U(R+\Delta R, t+\Delta t) = f\left(t + \Delta t - (R+\Delta R)\sqrt{\mu\epsilon}\right) = f(t - R\sqrt{\epsilon\mu})$$

ef $\Delta t = \Delta R\sqrt{\mu\epsilon} = \Delta R / u$

$\rightarrow \Delta R = u \Delta t$

$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ er útbreiðsluhraði bylgjunnar

Þrívíða jafnan hefur lausnina

$$V(R,t) = \frac{1}{R} f\left(t - \frac{R}{u}\right)$$

Hefði punkt hleðslan verið óháð tíma hefði fengist lausn

$$\Delta V(R) = \frac{\rho \Delta v'}{4\pi\epsilon R}$$

Samanburður við lausn bylgjujöfnunar gefur því

$$\Delta f\left(t - \frac{R}{u}\right) = \frac{\rho\left(t - \frac{R}{u}\right)\Delta v'}{4\pi\epsilon}$$

og almennu lausnirnar eru

$$\boxed{\begin{aligned} V(R,t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'} \frac{\rho\left(t - \frac{R}{u}\right)}{R}\, dv' \\ \bar{A}(R,t) &= \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{\bar{J}\left(t - \frac{R}{u}\right)}{R}\, dv' \end{aligned}}$$

Seinkuðu lausnir bylgjujafnanna í einsleitu rúmi (bylgja berst út eftir breytingu uppsprettu) Við hentum óeðlisfræðilegu flýttu lausnunum

Aðeins um kvarða

Við útleiðslu á bylgjujöfnunum

$$\nabla^2\bar{A} - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A} = -\mu\bar{J}$$

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}V = -\frac{\varrho}{\epsilon}$$

notuðum við Lorentz-kvarðann

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{A} + \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}V = 0$$

Enn er þó frelsi eftir, því breytingin

$$\bar{A} \to \bar{A} + \bar{\nabla}\Lambda$$

$$V \to V - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda$$

með

$$\nabla^2\Lambda - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda = 0$$

breytir ekki Lorentz-kvarðanum

Eins hefðum við getað valið Coulomb-kvarðann í stað Lorentz-kvarðans

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{A} = 0$$

þá fengjust jöfnurnar

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2 V &= -\frac{\varrho}{\epsilon}\\ \nabla^2\bar{A} - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A} &= -\mu\bar{J} + \mu\epsilon\bar{\nabla}\frac{\partial V}{\partial t}\end{aligned}}$$

Poisson jafnan fyrir V!
Til viðbótar má finna að aðeins $\bar{J}_t$ skiptir máli í seinni jöfnunni.
og svið án seinkunar styttast út. Mikið notað. . .

Lotubundin svið í tíma

Maxwell jöfnurnar eru línulegar

→ Lotubundnar sveiflur í uppsprettum leiða til sviða með sömu lotu þegar stöðug ástönd eru stöðuð

→ fourier greining (raðir eða umformum) leyfir okkur að fjalla um almenna tímaþróun

tímahliðrunarsamhverfa

Notum fasora táknun.
Ef rafsvið er tímaháð með cos(ωt) þá verður notað

$$\bar{E}(\bar{x},t) = \Re\left[\bar{E}(\bar{x})e^{i\omega t}\right]$$

þ.s. $\bar{x} = (x,y,z)$ t.d.

því er greinilegt að $\frac{\partial}{\partial t}\bar{E}(\bar{x},t)$ mun verða táknað með $i\omega\bar{E}(\bar{x})$

þátturinn $e^{i\omega t}$ mun styttast út úr jöfnunum

Jöfnur Maxwells verða

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{\nabla}\times\bar{E} &= -i\omega\mu\bar{H}\\ \bar{\nabla}\times\bar{H} &= \bar{J} + i\omega\epsilon\bar{E}\\ \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{\varrho}{\epsilon}\ &,\quad \bar{\nabla}\cdot\bar{H} = 0\end{aligned}}$$

Bylgjujöfnurnar verða

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2 V + k^2 V &= -\frac{\varrho}{\epsilon}\\ \nabla^2\bar{A} + k^2\bar{A} &= -\mu\bar{J}\\ k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} &= \frac{\omega}{u}\end{aligned}}$$

Í einsleitu rúmi var lausnin áður

$$V(R,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'}\frac{\varrho(t-\frac{R}{u})}{R}dv'$$

Ef $\varrho(R,t) = \Re\left[\varrho(R)e^{i\omega t}\right]$

þá fæst fyrir seinkaða sviðið

$$\varrho(R,t-\tfrac{R}{u}) = \Re\left[\varrho(R)e^{i\omega(t-\frac{R}{u})}\right]$$

og þar sem $k = \frac{\omega}{u}$ fæst

$$\varrho(R,t-\tfrac{R}{u}) = \Re\left[\varrho(R)e^{i\omega t}e^{-ikR}\right]$$

því verða lausnirnar táknaðar með fasorum

$$\boxed{\begin{aligned}V(R) &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'}\frac{\varrho e^{-ikR}}{R}dv'\\ A(R) &= \frac{\mu}{4\pi\epsilon}\int_{V'}\frac{\bar{J}e^{-ikR}}{R}dv'\end{aligned}}$$

Hér er gott að muna að $R = |\bar{x}-\bar{x}'|$ þ.s. $\bar{x}$ er athugunar-punktur og $\bar{x}'$ er uppsprettu-punktur

Bylgjulengdin $\lambda = \frac{u}{f}$ getur verið mjög mism. m.v. R í okkar dæmum

$$k = \frac{2\pi f}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Almennt er

$$e^{-ikR} = 1 - ikR + \frac{k^2R^2}{2} + \cdots\cdot$$

því fæst ef $kR \ll 1$

$$e^{-ikR} \approx 1$$

að fasor-lausnirnar líkjast tímaóháðu lausnunum

Langbylgju nálgun . . . .
eða
Nær-lausn . . . .

Sviðum án uppspretta

má lýsa með

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = -i\omega\mu\bar{H}$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{H} = i\omega\epsilon\bar{E}$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0, \quad \underline{\bar{\nabla}\cdot\bar{H}} = 0$$

Athugum

$$\bar{E} = \frac{1}{i\omega\epsilon}\bar{\nabla}\times\bar{H}$$

notum í 1. jöfnunni

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = \frac{1}{i\omega\epsilon}\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{H}$$

$$= -i\omega\mu\bar{H}$$

Eða

$$\frac{1}{i\omega\epsilon}\left\{\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{H})-\nabla^2 H\right\} = -i\omega\mu\bar{H}$$

$$-\nabla^2 H = \omega^2\epsilon\mu\bar{H}$$

eða

$$\boxed{\nabla^2\bar{H} + k^2\bar{H} = 0}$$

því $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$

Á svipaðan hátt fæst

$$\boxed{\nabla^2\bar{E} + k^2\bar{E} = 0}$$

Óhliðraðar Helmholtz jöfnur fyrir vigursviðin $\bar{H}$ og $\bar{E}$

Skoðum aftur

$$\bar{\nabla}\times\bar{H} = \bar{J} + i\omega\epsilon\bar{E}$$

Ef einsleita efnið er leiðandi þá gildir

$$\bar{J} = \sigma\bar{E}$$

og jafnan verður

$$\bar{\nabla}\times\bar{H} = (\sigma + i\omega\epsilon)\bar{E}$$

$$= i\omega\left(\epsilon + \frac{\sigma}{i\omega}\right)\bar{E}$$

$$= i\omega\left(\epsilon - i\frac{\sigma}{\omega}\right)\bar{E}$$

$$= i\omega\,\epsilon_c\,\bar{E}$$

þar sem ϵ_c er tvinngildur rafsvörunarstuðull

$$\epsilon_c = \epsilon' - i\epsilon''$$

með

$$\epsilon' = \epsilon$$

$$\epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}$$

ϵ'' lýsir sveiflum úr fasa við uppsprettur. Úr fasa vegna viðnámskrafta, dofnunar...

orkutap
Taphornið δ_c er

$$\tan\delta_c = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \simeq \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$$

Góður leiðari

$$\sigma \gg \underline{\omega\epsilon}$$

Góður einangrari

$$\omega\epsilon \gg \sigma$$

því getur leiðari verið góður við lága tíðni en leiðnin versnar við hækkandi tíðni

Almennt eru ϵ' og ϵ'' líka föll af ω

lesa sjálf um rafsegulrófið í enda 7. kafla

Skoða λ-skala og orkuskala

$hf = \hbar\omega$ og bera saman við $k_BT \approx 25$ meV fyrir herbergishita

---

Flatar bylgjur

Á svæði án hleðslu eða strauma fæst

$$\nabla^2\bar{E} + k_0^2\bar{E} = 0$$

og samskonar fyrir $\bar{H}$.

k_0 er bylgjutalan í tómarúmi

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \frac{\omega}{c}$$

Í kartískum hnitum er jafnan

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2\right)E_x = 0$$

fyrir hnitið E_x

Hugsum okkur bylgju með einsleitu E_x á sléttum þvert á z

$$\longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}E_x = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}E_x = 0$$

og jafnan verður

$$\frac{d^2}{dz^2}E_x + k_0^2 E_x = 0$$

Lausnir

$$E_x(z) = \underset{\uparrow}{E_0^+}\, e^{-ik_0z} + \underset{\uparrow}{E_0^-}\, e^{ik_0z}$$

fastar, almennir

Athugum fasorinn

$$E_0^+ e^{-ik_0 z}$$

Hvað gefur hann í tíma

$$E_x^+(z,t) = \Re\left[E_x^+ e^{i(\omega t - k_0 z)}\right]$$

$$= E_0^+ \cos(\omega t - k_0 z)$$

Bylgja sem ferðast. Festum fasann

$$\omega t - k_0 z = \text{fastur fasi}$$

og köllum fasahraðann

$$u_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$$

k_0 tengist λ_0

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}}$$

Hinn fasorinn E_x^- gefur bylgju sem ferðast í $-z$-stefnu með sama fasahraða

Ef við þurfum aðeins bylgju í z-stefnu

$$E_0^- = 0$$

Með þessu rafsviði fylgir segulsvið

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -i\omega\mu_0 \bar{H}$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x^+(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -i\omega\mu_0\left(\hat{a}_x H_x^+ + \hat{a}_y H_y^+ + \hat{a}_z H_z^+\right)$$

$$\rightarrow H_x^+ = 0$$

$$H_y^+ = \frac{1}{-i\omega\mu_0} \frac{\partial E_x^+(z)}{\partial z}$$

$$H_z^+ = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial E_x^+(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(E_0^+ e^{-ik_0 z}\right)$$

$$= -ik_0 E_x^+(z)$$

$$\rightarrow H_y^+ = \frac{k_0}{\omega\mu_0} E_x^+(z)$$

$$= \frac{1}{\eta_0} E_x^+(z)$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \simeq 377\ \Omega$$

eigið samviðnám tómsins.

$\eta_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \bar{E}$ og $\bar{B}$ hafa sama fasa

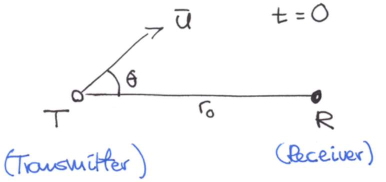
$$\bar{H}(z,t) = \hat{a}_y H_y^+(z,t)$$

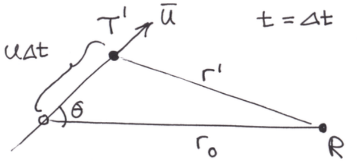
$$= \hat{a}_y \Re\left[H_y^+(z) e^{i\omega t}\right]$$

$$= \hat{a}_y \frac{E_0^+}{\eta_0} \cos(\omega t - k_0 z)$$

$\bar{E}$ og $\bar{H}$ eru hornrétt og líka á útbreiðslustefnuna $\hat{a}_z$

Dopplerhrif





Bylgja frá T klukkan $t=0$ kemur til R kl. $t_1 = \frac{r_0}{c}$

bylgja kl. $t=\Delta t$ frá T' kemur til R kl.

$$t_2 = \Delta t + \frac{r'}{c}$$

$$= \Delta t + \frac{1}{c}\sqrt{r_0^2 + (u\Delta t)^2 - 2r_0(u\Delta t)\cos\theta}$$

$$\approx \Delta t + \frac{r_0}{c}\left(1 - \frac{u\Delta t}{r_0}\cos\theta\right)$$

ef $r_0 >> u\Delta t$

Tímamunur merkjanna í R er

$$\Delta t' = t_2 - t_1 \simeq \Delta t + \frac{r_0}{c}\left(1 - \frac{u\Delta t}{r_0}\cos\theta\right) - \frac{r_0}{c}$$

$$= \Delta t\left(1 - \frac{u}{c}\cos\theta\right)$$

því er $\Delta t'$ mælt við hljóðnemann ekki sama og Δt mælt við uppsprettuna

Hljóðneminn heyrir tíðnina

$$f' = \frac{1}{\Delta t'} \simeq \frac{1}{\Delta t\left(1-\frac{u}{c}\cos\theta\right)}$$

$$= \frac{f}{\left(1-\frac{u}{c}\cos\theta\right)} \simeq f\left(1+\frac{u}{c}\cos\theta\right)$$

Ef $\left(\frac{u}{c}\right)^2 << 1$

$$\boxed{\text{Rauðvik , Blávik}}$$

Þverrafsegulbylgjur

Rafsegulbylgja í z-átt var með fasor

$$\bar{E}(z) = \bar{E}_0 e^{-ikz}$$

fyrir almenna stefnu fáum við

$$E(\bar{x}) = \bar{E}_0 e^{-ik_x x - ik_y y - ik_z z}$$

ef $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon$

eins og jafna Helmholtz krefst.

Skilgreinum bylgjuvigur

$$\bar{k} = \hat{a}_x k_x + \hat{a}_y k_y + \hat{a}_z k_z = k\hat{a}_n$$

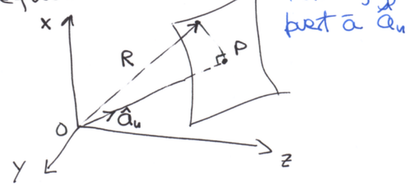
og geislavigur

$$\bar{R} = \hat{a}_x x + \hat{a}_y y + \hat{a}_z z$$

þá fæst

$$\bar{E}(\bar{R}) = \bar{E}_0 e^{-i\bar{k}\cdot\bar{R}} = \bar{E}_0 e^{-ik\hat{a}_n\cdot\bar{R}}$$

$\hat{a}_n$ er einingarvigur í útbreiðslustefnu



$$k_x = \bar{k}\cdot\hat{a}_x = k\underline{\hat{a}_n\cdot\hat{a}_x}$$

og samskonar fyrir y, z...

stefnukósínus fyrir $\hat{a}_n$

$$\hat{a}_n\cdot\bar{R} = \text{fasti} = |\overline{OP}|$$

er jafna sléttunnar þvert á $\hat{a}_n$, með fastan fasa og útslag

Engin hleðsla á útbreiðslusvæði

$\rightarrow \bar{\nabla}\cdot E = 0$

$\rightarrow \bar{E}_0 \cdot \bar{\nabla}\left(e^{-ik\hat{a}_n\cdot\bar{R}}\right) = 0$

$$\bar{\nabla}\left(e^{-ik\hat{a}_n\cdot\bar{R}}\right) = \left(\hat{a}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial y}\right) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$$= -i\left(\hat{a}_x k_x + \hat{a}_y k_y + \hat{a}_z k_z\right) e^{-i(k_x x + \cdots + k_z z)}$$

$$= -ik\hat{a}_n e^{-ik\hat{a}_n\cdot\bar{R}}$$

En

$\rightarrow -ik(\bar{E}_0\cdot\hat{a}_n) e^{-ik\hat{a}_n\cdot R} = 0$

sem verður aðeins með

$$\hat{a}_n\cdot\bar{E}_0 = 0$$

$\bar{E}_0$ er þvert á útbreiðslustefnu $\hat{a}_n$

Segulsviðið finnum við með

$$\bar{H} = \frac{1}{-i\omega\mu}\bar{\nabla}\times\bar{E}$$

$\rightarrow \boxed{\bar{H}(\bar{R}) = \frac{1}{\eta}\hat{a}_n \times \bar{E}(\bar{R})}$

með $\eta = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

eða

$$\boxed{\bar{H}(\bar{R}) = \frac{1}{\eta}(\hat{a}_n\times\bar{E}_0)e^{-ik\hat{a}_n\cdot\bar{R}}}$$

Svo eins og búast mátti við á svæði án ρ og J eru $\bar{E}$ og $\bar{H}$ hornrétt og líka á útbreiðslustefnuna $\hat{a}_n$

Skautun

Skoðum

$$\bar{E}(z) = \hat{a}_x E_1(z) + \hat{a}_y E_2(z)$$

$$= \hat{a}_x E_{10} e^{-ikz} - \hat{a}_y i E_{20} e^{-ikz}$$

Sett saman úr tveimur línulega skautuðum þáttum, annar er 90° á eftir hinum í fasa

Skoðum þessa bylgju í föstum tímapunkti

$$\bar{E}(z,t) = \Re e\left\{\left[\hat{a}_x E_1(z) + \hat{a}_y E_2(z)\right] e^{i\omega t}\right\}$$

$$= \hat{a}_x E_{10} \cos(\omega t - kz) + \hat{a}_y E_{20} \cos(\omega t - kz - \pi/2)$$

Skoðum stefnubreytingu $\bar{E}(z,t)$ þ. $z=0$ en tíminn líður

$$\bar{E}(0,t) = \hat{a}_x E_1(0,t) + \hat{a}_y E_2(0,t)$$

$$= \hat{a}_x E_{10} \cos\omega t + \hat{a}_y E_{20} \sin\omega t$$

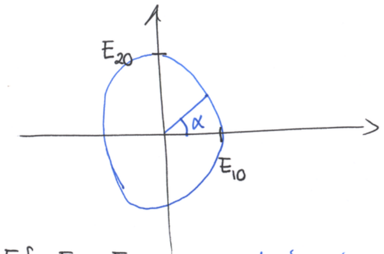
$$\rightarrow \cos\omega t = \frac{E_1(0,t)}{E_{10}} \qquad \sin\omega t = \frac{E_2(0,t)}{E_{20}} = \sqrt{1-\cos^2\omega t} = \sqrt{1-\left(\frac{E_1(0,t)}{E_{10}}\right)^2}$$

þ.a.

$$\left\{\frac{E_2(0,t)}{E_{20}}\right\}^2 + \left\{\frac{E_1(0,t)}{E_{10}}\right\}^2 = 1$$

Jafna sporbaugs (ellipsu)

ellipsuskautun



Ef $E_{20}=E_{10}$ ← hringskautun

$$\alpha = \arctan\left(\frac{E_2(0,t)}{E_1(0,t)}\right) =$$

$$\arctan(\tan\omega t) = \omega t$$

Hægri handar hring eða ellipsu skautun (jákvæð hringskautun)

Vinstri handar hringskautun fæst með $-\omega t$ snúningi

línuleg skautun $\bar{E}(z) = \hat{a}_x E_0 e^{-ikz}$

$$\bar{E}(z) = \bar{E}_{rc}(z) + \bar{E}_{lc}(z)$$

með

$$\bar{E}_{rc}(z) = \frac{E_0}{2}(\hat{a}_x - i\hat{a}_y)e^{-ikz}$$

$$\bar{E}_{lc}(z) = \frac{E_0}{2}(\hat{a}_x + i\hat{a}_y)e^{-ikz}$$

Flatarbylgjur í efni með orkutapi

$$\nabla^2\bar{E} + k_c^2\bar{E} = 0$$

$$k_c = \omega\sqrt{\mu\epsilon_c} \in \mathbb{C}$$

Venja að skilgreina

$$\gamma = ik_c = i\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

og ef

$$\epsilon_c = \epsilon - i\frac{\sigma}{\omega}$$

$$\rightarrow \gamma = \alpha + i\beta = i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1 + \frac{\sigma}{i\epsilon\omega}\right)^{1/2}$$

eða með $\epsilon_c = \epsilon' - i\epsilon''$ fæst

$$\gamma = \alpha + i\beta = i\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left(1 - i\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^{1/2}$$

α og β eru raun og þverhlutar γ

án taps er

$$\boxed{\begin{array}{l}\sigma = 0,\ \epsilon''=0,\ \epsilon=\epsilon' \\ \alpha = 0,\ \beta = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\end{array}}$$

Jafna Helmholtz er hér

$$\nabla^2\bar{E} - \gamma^2\bar{E} = 0$$

og fyrir slétta bylgju í z-stefnu línulega skautaða í x-átt

$$\bar{E} = \hat{a}_x E_x = \hat{a}_x E_0 e^{-\gamma z}$$

$$= \hat{a}_x E_0 e^{-\alpha z} e^{-i\beta z}$$

α, β eru báðar jákvæðar stærðir (kemur í ljós)

α : dofnunar fasti

β : fasa fasti

Rafsvari með litlu tapi

$$\epsilon' \gg \epsilon'' \text{ eða } \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$$

$$\gamma = \alpha + i\beta \simeq i\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left(1 - \frac{i\epsilon''}{2\epsilon'} + \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right)$$

$$\rightarrow \alpha \simeq \frac{\omega\epsilon''}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \leftarrow \text{línulegt m. } \omega$$

$$\beta \simeq \underbrace{\omega\sqrt{\mu\epsilon'}}_{\text{næstum}}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right]$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}\left(1 - i\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^{-1/2} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}\left(1 + i\frac{\epsilon''}{2\epsilon'}\right)$$

hlutfall E_x og H_y hér →

rafsviðið og segulsviðið eru ekki í fasa eins og í efni án taps

fasa hraðinn er núna

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon'}}\left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right]$$

← minnkaður fasahraði vegna taps

α-þáttur k_c berst ekki í efninu

Góður leiðari

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$$

$$\gamma = i\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left(1 + \frac{\sigma}{i\omega\epsilon}\right)^{1/2}$$

$$\approx i\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{\frac{\sigma}{i\omega\epsilon}}$$

$$= \sqrt{i}\sqrt{\omega\mu\sigma} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

$$\rightarrow \gamma = \alpha + i\beta \simeq (1+i)\sqrt{\pi f \mu\sigma}$$

$$\rightarrow \alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} \simeq \sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma}}$$

$$= (1+i)\sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} = (1+i)\frac{\alpha}{\sigma}$$

→ Segulsviðið er á eftir rafsviðinu í fasa um $\frac{\pi}{4}$

fasahraðinn

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \simeq \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

í réttu hlutfalli við $\sqrt{f}$ og $\frac{1}{\sqrt{\sigma}}$

---

fyrir góðan leiðara eins og kopar fæst að

$$u_p \approx 720 \text{ m/s}$$

fyrir $f = 3$ MHz

Dofnunin er líka sterk $\alpha = \beta$, bylgjan dofnar niður í e^{-1} → skilgreinir lengd

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

$$= \frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

Skindýpt

(ekki skinn....)

→ fyrir örbylgjur er skindýptin orðin lítil

Sjá töflu 8-1

Gull $\delta \approx 0{,}0025$ mm fyrir $f = 1$ GHz

Rafgas

Venjulega í heild óhlaðið

Rafeindir + jónir í efri loftlögum ← geislun sólar

Rafeindir í málmi, jónir kristallsins

. . . . . .

Einfalt líkan

Ímyndum okkur rafeind bundna samkv. lögmáli Hooks

$$-e\bar{E} = m\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = -m\omega^2\bar{x}$$

hnikun rafeindarinnar er

$$\bar{x} = \frac{e}{m\omega^2}\bar{E}$$

Tökum m. fasorum, ytra sviðið er lotubundið.

→ tilverður skautun

$$\bar{p} = -e\bar{x}$$

fyrir N rafeindir í einingarrúmáli fæst skautunarþátturinn

$$P = Np = -\frac{Ne^2}{m\omega^2}\bar{E}$$

því fæst

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$$

$$= \epsilon_0 \left(1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2 \epsilon_0}\right) \bar{E}$$

$$= \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \bar{E}$$

þar sem

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$$

er rafgastíðnin, náttúrulegur tíðniskali rafgass.

$$\epsilon_p = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

$$\gamma = i\omega\sqrt{\mu\epsilon_0}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

→ Ef $\omega < \omega_p$

→ $\gamma \in \Re$, engin bylgja berst. Dofnun

→ Ef $\omega > \omega_p$

γ hefur einungis þverhluta

Bylgja berst án dofnunar

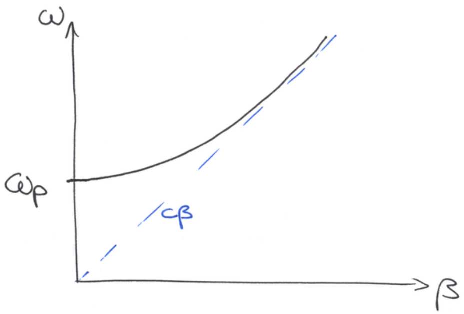
ω_p er þröskuldstíðni

Þegar $\epsilon_p = 0$ þarf hverfandi ytri truflun $\bar{D}$ til þess að koma af stað plasmasveiflum með tilheyrandi sveiflum í $\bar{E}$ (sem dofna ekki).

Rafgasherma

Betri útleiðsla sýnir að bæði eru til þver- og langbylgjur í rafgasinu. Í 3D hafa báðar sömu þröskuldstíðnina

Alltaf dofnun til staðar en hún getur verið lítil……



Hvað með plasma-rásir í stað rafrása ?

Grúpuhraði

Í taplausum miðli

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}$$

var fasahraðinn u_p fasti.

Fyrir efni með tapi er ϵ fall af ω og því ólíklegt að u_p sé fasti.

↓

Tvístrun (dispersion)

púls með bylgjum með mism. tíðni liðast í sundur með t

Hver bylgja hefur fasahraða og púlsinn hefur grúpuhraða

(fasahraði er nothæft hugtak fyrir merki með þröngt tíðnisvið.)

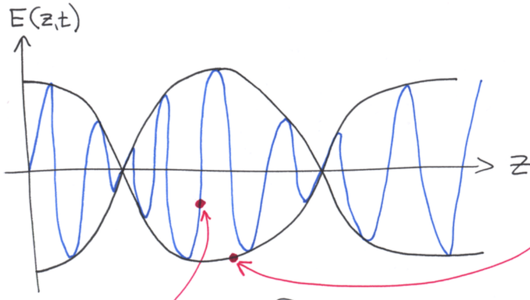
Skoðum tvær bylgjur með tíðni og fasastuðla

$\omega_0 + \Delta\omega, \quad \beta_0 + \Delta\beta$

$\omega_0 - \Delta\omega, \quad \beta_0 - \Delta\beta$

$$E(z,t) = E_0 \cos\left[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z\right] + E_0 \cos\left[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z\right]$$

$$= \underbrace{2E_0 \cos(t\Delta\omega - z\Delta\beta)}_{\text{útslagið}} \cos(\omega_0 t - \beta_0 z)$$



grúpuhraði $t\Delta\omega - z\Delta\beta = $fa

$$u_g = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\omega}\right)}$$

og almennari jafna er

$$\boxed{u_g = \frac{1}{\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)}}$$

fasahraði $\omega_0 t - \beta_0 z = $ fasti

→ $\boxed{u_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega_0}{\beta_0}}$

Skoðum fyrir rafgasbylgjuna

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon_0}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

$$= \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

fyrir $\omega > \omega_p$ berst bylgja með fasahraða

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

og grúpuhraða

$$u_g = \frac{1}{\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)} = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

Því er

$u_p \geq c$, $u_g \leq c$

og $\boxed{u_p u_g = c^2}$ hér.

Almennt má tengja u_g og u_p

$$u_p = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{u_p}\right) = \frac{1}{u_p} - \frac{\omega}{u_p^2}\frac{du_p}{d\omega}$$

$$\rightarrow u_g = \frac{u_p}{1 - \frac{\omega}{u_p}\underbrace{\frac{du_p}{d\omega}}_{\text{tvístrun}}}$$

Því sést:

Engin tvístrun

$$\frac{du_p}{d\omega} = 0 \rightarrow u_g = u_p$$

Venjuleg tvístrun

$$\frac{du_p}{d\omega} < 0 \rightarrow u_g < u_p$$

fasahraði minnkar með vaxandi tíðni

Afbrigðileg tvístrun

$$\frac{du_p}{d\omega} > 0 \rightarrow u_g > u_p$$

fasahraði vex með vaxandi tíðni

passar ekki við myndina af tveimur bylgjum lögðum saman hér að framan

→ afbrigðilegt

Orkuflæði

Við höfum tvær jöfnur Maxwells sem lýsa tíma breytingum

$$\bar\nabla \times \bar E = -\frac{\partial \bar B}{\partial t}$$

$$\bar\nabla \times \bar H = \bar J + \frac{\partial}{\partial t}\bar D$$

Ennfremur gildir um $\bar E \times \bar H$

$$\bar\nabla\cdot(\bar E \times \bar H) = \bar H\cdot(\bar\nabla\times E) - \bar E\cdot(\bar\nabla\times\bar H)$$

almenn vigurjafna

Notum, til þess að umskrifa

$$\bar\nabla\cdot(\bar E\times\bar H) = -\bar H\cdot\frac{\partial\bar B}{\partial t} - \bar E\cdot\frac{\partial\bar D}{\partial t} - \bar E\cdot\bar J$$

Tökum einfalt efni þar sem ϵ, μ og σ eru óháð t

$$\bar H\cdot\frac{\partial\bar B}{\partial t} = \bar H\cdot\frac{\partial(\mu\bar H)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial(\mu\bar H\cdot\bar H)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu H^2\right)$$

$$\bar E\cdot\frac{\partial\bar D}{\partial t} = \bar E\cdot\frac{\partial(\epsilon\bar E)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial(\epsilon\bar E\cdot\bar E)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\epsilon E^2\right)$$

Eins er $\bar E\cdot\bar J = \bar E\cdot(\sigma\bar E) = \sigma E^2$

Því fæst

$$\bar\nabla\cdot(\bar E\times\bar H) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right) - \sigma E^2$$

Heildum yfir rúmið V og breytum fyrsta liðnum í flatarheildi

$$\oint_S(\bar E\times\bar H)\cdot d\bar s = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right)dv - \int_V \sigma E^2 dv$$

Skilgreinum $\boxed{\bar{\mathcal{P}} = \bar E\times\bar H}$ vigur Poyntings

og notum

$$W_e = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\epsilon\bar E\cdot\bar E^*$$ orkuþéttleiki rafsviðs

$$W_m = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\mu\bar H\cdot\bar H^*$$ —||— segulsviðs

skoðum betur næst

$$P_\sigma = \sigma E^2 = \overset{2}{J}/\sigma = \sigma \overline{E}\cdot\overline{E}^* = \overline{J}\cdot\overline{J}^*/\sigma$$

afl þétt-
leiki v. viðnáms

þá verður jafnan

$$\boxed{-\oint_S \overline{\mathcal{P}}\cdot d\overline{s} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V (w_e + w_m)dv + \int_V P_\sigma dv}$$

Heildaraflið sem flæðir inn í V um S
leiðir til aukningar á geymdri segul og rafortku
og aflsins sem eyðist í viðnámi innan V

$\overline{\mathcal{P}}$ er vigur sem sýnir flæði afl þéttleika

Dæmi

Langur leiðandi vír ber straum I (d.c.)

$$\overline{J} = \hat{a}_z \frac{I}{\pi b^2}, \quad \overline{E} = \frac{\overline{J}}{\sigma} = \hat{a}_z \frac{I}{\sigma\pi b^2}$$

Við yfirborð vírsins er

$$\overline{H} = \hat{a}_\phi \frac{I}{2\pi b}$$

því er Poyntingvigurinn á yfirborðinu

$$\overline{\mathcal{P}} = \overline{E}\times\overline{H} = (\hat{a}_z \times \hat{a}_\phi)\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3}$$

$$= -\hat{a}_r \frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3}$$

inní vírinn

---

heildum yfir yfirborðið

„lengd" vírs

$$-\oint_S \overline{\mathcal{P}}\cdot d\overline{s} = -\oint_S \mathcal{P}\cdot\hat{a}_r ds = \left(\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3}\right) 2\pi b l$$

$$= I^2\left(\frac{l}{\sigma\pi b^2}\right) = I^2 R$$

flæði afls inn
í vírinn

$$R = \frac{l}{\sigma S}$$

Orkan sem eyðist
vegna viðnáms vírs

Athugum fasora betur

fyrir rafsviðið höfðum við
fasorinn

$$\overline{E}(z) = \hat{a}_x E_x(z) = \hat{a}_x E_0 e^{-(\alpha+i\beta)z}$$

sem gefur tímaháða sviðið

$$\overline{E}(z) = \Re e\left[\overline{E}(z)e^{i\omega t}\right]$$

$$= \hat{a}_x E_0 e^{-\alpha z}\Re e\left[e^{i(\omega t-\beta z)}\right]$$

$$= \hat{a}_x E_0 e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)$$

fyrir segulsviðið
fæst

$$\overline{H}(z) = \hat{a}_y \overline{H}_y(z)$$

$$= \hat{a}_y \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z} e^{-i(\beta z+\theta_\eta)}$$

með $\eta = |\eta| e^{i\theta_\eta}$

og því er

$$\overline{H}(z,t) = \Re e\left[\overline{H}(z)e^{i\omega t}\right]$$

$$= \hat{a}_y \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta)$$

②

Vinnureglur okkar fyrir fasora eru í lagi fyrir jöfnur með línulegum liðum.

Hvað með Poynting?

Skoðum vinstri og hægri hlið ójöfnunnar

$$\Re e\left[\bar{E}(z)e^{i\omega t}\right]\times\Re e\left[\bar{H}(z)e^{i\omega t}\right]$$

$$\neq \Re e\left[\bar{E}(z)\times\bar{H}(z)e^{i\omega t}\right]$$

Vinstri

Notum

$$\Re e(\bar{A})\times\Re e(\bar{B})=\frac{1}{2}(\bar{A}+\bar{A}^*)\times\frac{1}{2}(\bar{B}+\bar{B}^*)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{(\bar{A}\times\bar{B}^*+\bar{A}^*\times B)+(\bar{A}\times\bar{B}+\bar{A}^*\times\bar{B}^*)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\Re e\left(\bar{A}\times\bar{B}^*+\bar{A}\times\bar{B}\right)$$

t. þ. a. fá

$$\bar{\mathcal{P}}(z,t)=\bar{E}(z,t)\times\bar{H}(z,t)$$

$$=\Re e\left[\bar{E}(z)e^{i\omega t}\right]\times\Re e\left[\bar{H}(z)e^{i\omega t}\right]$$

$$=\hat{a}_z\frac{E_o^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z}\cos(\omega t-\beta z)\cos(\omega t-\beta z-\theta_\eta)$$

$$=\hat{a}_z\frac{E_o^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z}\left\{\cos\theta_\eta+\cos(2\omega t+2\beta z-\theta_\eta)\right\}$$

En hægri hliðin er

$$\Re e\left[\bar{E}(z)\times\bar{H}(z)e^{i\omega t}\right]$$

$$=\hat{a}_z\frac{E_o^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z}\cos(\omega t-2\beta z-\theta_\eta)$$

Venjulega er meiri áhugi á meðaltali $\bar{\mathcal{P}}$

$$\bar{\mathcal{P}}_{av}(z)=\frac{1}{T}\int_0^T\bar{\mathcal{P}}(z,t)dt$$

$$=\hat{a}_z\frac{E_o^2}{2|\eta|}e^{-2\alpha z}\cos\theta_\eta$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

③

Vinstri hliðin gaf

$$\mathcal{P}(z,t)=\Re e\left[\bar{E}(z)e^{i\omega t}\right]\times\Re e\left[\bar{H}(z)e^{i\omega t}\right]$$

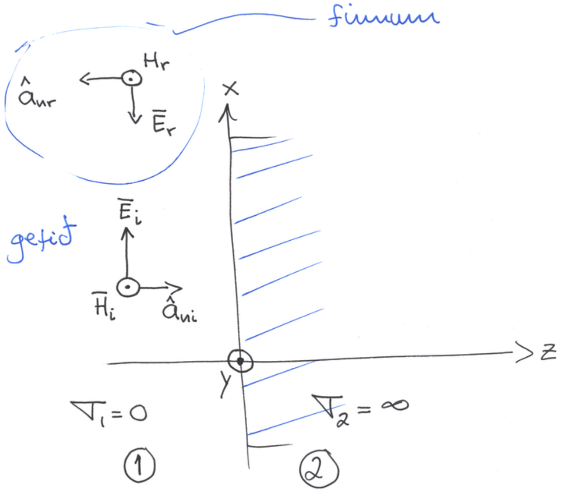
$$=\frac{1}{2}\Re e\left[\bar{E}(z)\times\bar{H}^*(z)+\underbrace{\bar{E}(z)\times\bar{H}(z)e^{2i\omega t}}\right]$$

meðaltalið yfir T gerir þetta að engu

$$\boxed{\bar{\mathcal{P}}_{av}=\frac{1}{2}\Re e\left(\bar{E}\times\bar{H}^*\right)}$$

④

Þverbylgja fellur hornrétt á góðan leiðara



Gefin innbylgja

$$\bar{E}_i(z)=\hat{a}_x E_{io}e^{-i\beta_1 z}$$

$$\bar{H}_i(z)=\hat{a}_y\frac{E_{io}}{\eta_1}e^{-i\beta_1 z}$$

Vigur Poynting fyrir innbylgjuna í ① er

$$\bar{\mathcal{P}}_i(z)=\bar{E}_i(z)\times\bar{H}_i(z)$$

er í $\hat{a}_z$-átt

⑤

í ② eru $\bar{E}_2=0$, $\bar{H}_2=0$

Engin bylgja berst inn í ②

Búumst við speglaðri bylgju

$$\bar{E}_r(z)=\hat{a}_x E_{ro}e^{+i\beta_1 z}$$

Heildarrafsviðið í ① er

$$\bar{E}_1(z)=\bar{E}_i(z)+\bar{E}_r(z)$$

$$=\hat{a}_x\left(E_{io}e^{-i\beta_1 z}+E_{ro}e^{+i\beta_1 z}\right)$$

Þáttur $\bar{E}_1$ samsíða leiðara er samfelldur

$$\bar{E}_1(0)=\hat{a}_x(E_{io}+E_{ro})$$

$$=\bar{E}_2(0)=0$$

$\hookrightarrow E_{ro}=-E_{io}$

Rafsviðið í ① er því

$$\bar{E}_1(z)=\hat{a}_x E_{io}\left(e^{-i\beta_1 z}-e^{+i\beta_1 z}\right)$$

$$=-\hat{a}_x i2E_{io}\sin(\beta_1 z)$$

fyrir segulsviðið

$$\bar{H}_r(z) = \frac{1}{\eta_1}\hat{a}_{nr}\times\bar{E}_r(z)$$

$$= \frac{1}{\eta_1}(-\hat{a}_z)\times\bar{E}_r(z)$$

$$= -\hat{a}_y\frac{1}{\eta_1}E_{ro}e^{+i\beta_1 z}$$

$$= \hat{a}_y\frac{E_{io}}{\eta_1}e^{+i\beta_1 z}$$

Heildar segulsviðið í ① er því

$$\bar{H}_1(z) = \bar{H}_i(z) + \bar{H}_r(z) = \hat{a}_y 2\frac{E_{io}}{\eta_1}\cos(\beta_1 z)$$

$\bar{E}_1(z)$ og $\bar{H}_1(z)$ bera með sér að í ① er ekkert meðalflæði afls

fyrir tímaháðu sviðin fæst

$$\bar{E}_1(z,t) = \Re e\left[\bar{E}_1(z)e^{i\omega t}\right]$$

$$= \hat{a}_x 2E_{io}\sin(\beta_1 z)\sin\omega t$$

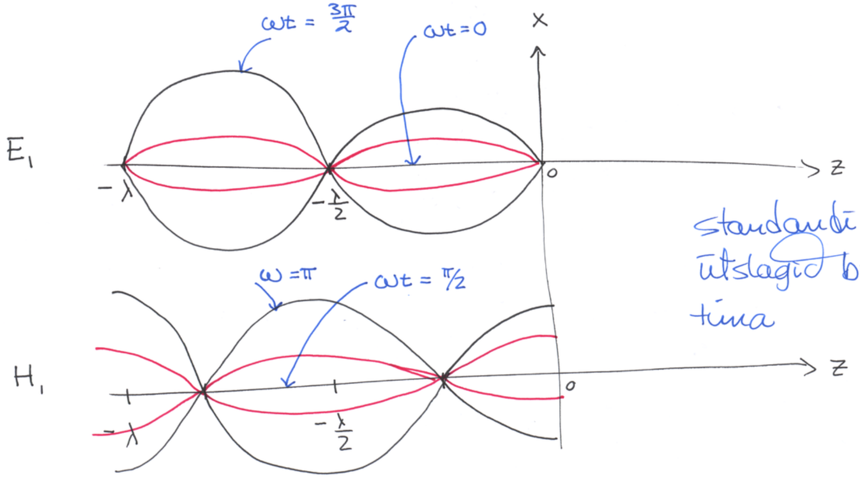
og

$$\bar{H}_1(z,t) =$$

$$\hat{a}_y 2\frac{E_{io}}{\eta_1}\cos(\beta_1 z)\cos\omega t$$

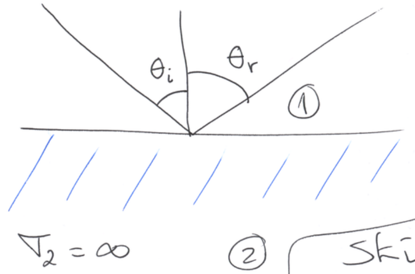
$E_1(z,t) = 0$ þ. $\beta_1 z = -n\pi$, $z = -n\frac{\lambda}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$H_1(z,t) = 0$ þ. $\beta_1 z = -(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $z = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$, $n = 0, 1, 2, \dots$



standandi bylgjur, útslagið breytist með tíma

Þverbylgja fellur á leiðara undir horni



Þverbylgja fellur á leiðara

$\bar{k}_i$ útbreiðslubylgjuvigur rafsegulbylgju sem fellur á leiðara og normal þverill yfirborðs leiðarans

Skilgeina innfallsflöt bylgjunnar

Rafsegulfræðin er línuleg því getum við fjallað sér um tilfellið þ. E liggur í þessari sléttu, eða er þvert á hana

---

Ástæðan fyrir því að fjalla um þessi tilfelli sér er að í fyrra tilfellinu er $\bar{H}$ samhliða skilfletinum en í hinu er $\bar{E}$ samhliða honum

↑

Mismunandi jaðarskilyrði fyrir $\bar{E}$ og $\bar{H}$

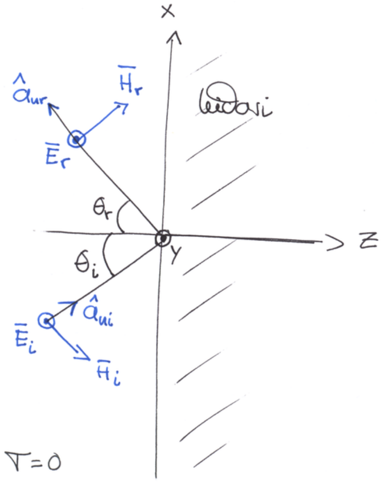
Síðan verður líka fjallað um skilfleti tóms og rafsvara

①

Speglun í leiðandi yfirborði

Endanlegt innfallshorn

Lárétt skautun – E-skautun



Innbylgja með

$$\hat{a}_{ui} = \hat{a}_x \sin\theta_i + \hat{a}_z \cos\theta_i$$

θ_i : Innfallshorn

$$\overline{E}_i(x,z) = \hat{a}_y E_{io} e^{-i\beta_1 \hat{a}_{ui}\cdot\overline{R}}$$

$$= \hat{a}_y E_{io} e^{-i\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

$$\overline{H}_i(x,z) = \frac{1}{\eta_1}\left[\hat{a}_{ui}\times\overline{E}_i(x,z)\right]$$

$$= \frac{E_{io}}{\eta}(-\hat{a}_x\cos\theta_i + \hat{a}_z\sin\theta_i)$$
$$\cdot e^{-i\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

②

Speglaða bylgjan

$$\hat{a}_{ur} = \hat{a}_x\sin\theta_r - \hat{a}_z\cos\theta_r$$

θ_r: speglunarhorn

því er speglaða rafsviðið

$$\overline{E}_r(x,z) = \hat{a}_y E_{ro} e^{-i\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

Í yfirborðinu verður heildar-rafsviðið að hverfa

$$\overline{E}_1(x,0) = \overline{E}_i(x,0) + \overline{E}_r(x,0)$$
$$= \hat{a}_y\left(E_{io}e^{-i\beta_1 x\sin\theta_i} + E_{ro}e^{-i\beta_1 x\sin\theta_r}\right) = 0$$

Gengur aðeins fyrir öll x ef

$$E_{ro} = -E_{io}$$

$$\rightarrow \theta_r = \theta_i$$

Lögmál Snells fyrir speglun

③

því er speglaða segulsviðið

$$\overline{H}_r(x,z) = \frac{1}{\eta_1}\left[\hat{a}_{ur}\times\overline{E}_r(x,z)\right]$$

$$= \frac{E_{io}}{\eta_1}(-\hat{a}_x\cos\theta_i - \hat{a}_z\sin\theta_i)$$
$$\cdot e^{-i\beta_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)}$$

Heildarsviðin eru

$$\overline{E}_1(x,z) = \overline{E}_i(x,z) + \overline{E}_r(x,z)$$
$$= -\hat{a}_y E_{io} 2i\sin(\beta_1 z\cos\theta_i)e^{-i\beta_1 x\sin\theta_i}$$

$$\overline{H}_1(x,z) = -2\frac{E_{io}}{\eta_1}\left[\hat{a}_x\cos\theta_i\cos(\beta_1 z\cos\theta_i) + \hat{a}_z i\sin\theta_i\sin(\beta_1 z\cos\theta_i)\right]$$
$$\cdot e^{-i\beta_1 x\sin\theta_i}$$

* Standbylgja í z-átt
Enginn meðal orku flutningur í z-átt

* Bylgja berst í x-átt samsíða yfirborðinu

$$u_{1x} = \frac{\omega}{\beta_{1x}} = \frac{\omega}{\beta_1\sin\theta_i} = \frac{u_1}{\sin\theta_i}$$

$$\lambda_{1x} = \frac{\lambda_1}{\sin\theta_i}$$

④

* Bylgjan í x-átt er misleit slétt bylgja þar sem hún er háð z-hniti

* $\overline{E}_1 = 0$ fyrir öll x þegar $\sin(\beta_1 z\cos\theta_i) = 0$

$$\longrightarrow \text{Ef } \beta_1 z\cos\theta_i = \frac{2\pi}{\lambda_1}z\cos\theta_i = -m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

því myndi flatur leiðari í $z = \dfrac{m\lambda_1}{2\cos\theta_i}$ engu breyta um bylgjurnar milli þessara tveggja leiðara

↳ er TE þverrafsviðs bylgja í bylgjuleiðara

↑ $E_{1x} = 0$

* ← Víxlmynstur milli inn og út bylgju

Við skoðum ekki speglun þröngs geisla, heldur flatar bylgju á „stóran" flöt.

Vigur Poyntings liggur líka í x-átt.

yfirborðsstraumur

$$H_1(x,0) = -\frac{E_{io}}{\eta_1}(\hat{a}_x 2\cos\theta_i)e^{-i\beta_1 x\sin\theta_i}$$

Innan leiðara hverfa $\overline{E}_2$ og $\overline{H}_2$

→ því er stökk í $\overline{H}$ sem tengist yfirborðsstraumi

$$\overline{J}_s(x) = \hat{a}_{n2} \times \overline{H}_1(x,0)$$

$$= (-\hat{a}_z) \times (-\hat{a}_x)\frac{E_{io}}{\eta_1}(2\cos\theta_i)e^{-i\beta_1 x\sin\theta_i}$$

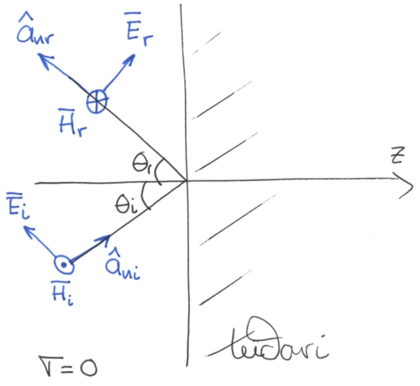
$$= \hat{a}_y \frac{E_{io}}{\eta_1}(2\cos\theta_i)e^{-i\beta_1 x\sin\theta_i}$$

$$\overline{J}_s(x,t) = \hat{a}_y \frac{E_{io}}{\eta_1} 2\cos\theta_i \cos\left\{\omega\left(t - \frac{x}{u_1}\sin\theta_i\right)\right]$$

þessi straumur veldur speglaðu bylgjunni og steyttir út bylgjuna sem hefði farið inn í leiðarann

Samsíða skautun

Hornrétt skautun, H-skautun



$$\overline{E}_i(x,z) = E_{io}(\hat{a}_x\cos\theta_i - \hat{a}_z\sin\theta_i) \cdot e^{-i\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

$$\overline{H}_i(x,z) = \hat{a}_y\frac{E_{io}}{\eta_1}e^{-i\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

og speglaðu bylgjurnar

$$\overline{E}_r(x,z) = E_{ro}(\hat{a}_x\cos\theta_r + \hat{a}_z\sin\theta_r)e^{-i\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

$$\overline{H}_r(x,z) = -\hat{a}_y\frac{E_{ro}}{\eta_1}e^{-i\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

Í $z=0$ verður þáttur heildarrafsviðsins samsíða leiðaranum að hverfa

$$(E_{io}\cos\theta_i)e^{-i\beta_1 x\sin\theta_i} + (E_{ro}\cos\theta_r)e^{-i\beta_1 x\sin\theta_r} = 0$$

$$\longrightarrow \quad E_{ro} = -E_{io}, \quad \theta_r = \theta_i$$

Heildarsviðið verður

$$\overline{E}_1(x,z) = -2E_{io}\left\{\hat{a}_x i\cos\theta_i\sin(\beta_1 z\cos\theta_i) + \hat{a}_z\sin\theta_i\cos(\beta_1 z\cos\theta_i)\right\} \cdot e^{-i\beta_1 x\sin\theta_i}$$

og

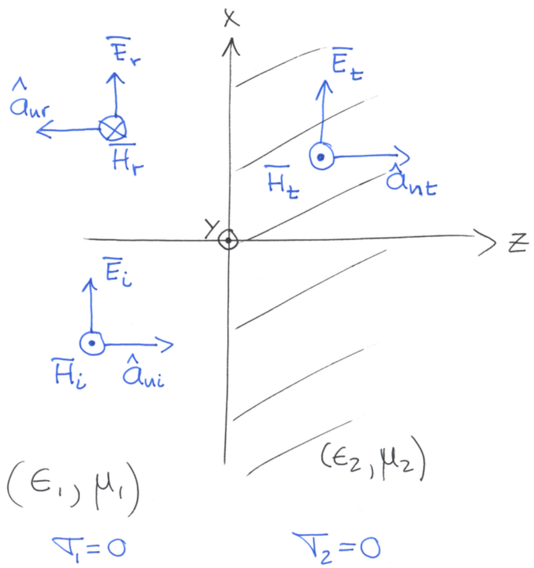
$$\overline{H}_1(x,z) = \hat{a}_y 2\frac{E_{io}}{\eta_1}\cos(\beta_1 z\cos\theta_i)e^{-i\beta_1 x\sin\theta_i}$$

* Aftur misleit slétt bylgja í x-átt

* TM - bylgja, $H_{1x} = 0$

þunnur leiðari í $z = -\frac{m\lambda_1}{2\cos\theta_i}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ breytir engu

Lóðrétt bylgja á skilflöt tveggja rafsvara



Veljum innbylgju

$$\overline{E}_i(z) = \hat{a}_x E_{io}e^{-i\beta_1 z}$$

$$\overline{H}_i(z) = \hat{a}_y\frac{E_{io}}{\eta_1}e^{-i\beta_1 z}$$

Speglaða bylgju

$$\overline{E}_r(z) = \hat{a}_x E_{ro}e^{+i\beta_1 z}$$

$$\overline{H}_r(z) = (-\hat{a}_z) \times \frac{1}{\eta_1}\overline{E}_r(z)$$

$$= -\hat{a}_y\frac{E_{ro}}{\eta_1}e^{i\beta_1 z}$$

Framferðarbylgja

$$\bar{E}_t(z) = \hat{a}_x E_{t0} e^{-i\beta_2 z}$$

$$\bar{H}_t(z) = \hat{a}_z \times \frac{1}{\eta_2} \bar{E}_t(z)$$

$$= \hat{a}_y \frac{E_{t0}}{\eta_2} e^{-i\beta_2 z}$$

Tvær óþekktar stærðir

E_{r0} og E_{t0}

Við stilflöt rafsvara verða $\bar{E}_{\parallel}$ og $\bar{H}_{\parallel}$ að vera samfelld

$$\bar{E}_i(0) + \bar{E}_r(0) = \bar{E}_t(0)$$

$$\longrightarrow E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}$$

$$\bar{H}_i(0) + \bar{H}_r(0) = \bar{H}_t(0)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\eta_1}(E_{i0} - E_{r0}) = \frac{E_{t0}}{\eta_2}$$

Lausn gefur

$$E_{r0} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_{i0}$$

$$E_{t0} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{i0}$$

$$\boxed{\eta_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_i}}}$$

Venja er að skilgreina speglunar og framferðar stuðla

$$\boxed{\begin{aligned}\Gamma &= \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \\ \tau &= \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}\end{aligned}}$$

↑ Hér má sjá muninn þegar borið er saman við straumtafaði

Γ getur haft bæði formerki

Í kerfi með tapi verða þessir stuðlar tvinntölur → fasamunur

Greinilega gildir

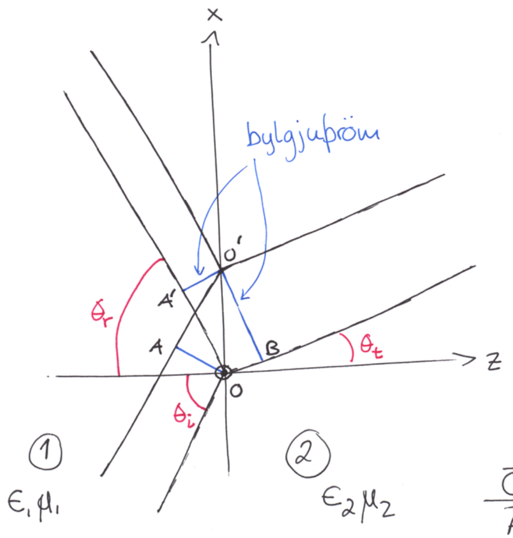
$$\boxed{1 + \Gamma = \tau}$$

E ② væri kjörleiðari $\eta_2 = 0$

fæst $\Gamma = -1$, $\tau = 0$

$E_{r0} = -E_{i0}$, $E_{t0} = 0$

Innfall undir horni á stilfleti rafsvara



Sami fasahraði í ①

$$\hookrightarrow \overline{OA'} = \overline{AO'}$$

$$\overline{OO'} \sin\theta_r = \overline{OO'} \sin\theta_i$$

$$\longrightarrow \boxed{\theta_r = \theta_i}$$

speglunarlögmál Snells

Einnig verður að gilda

$$\frac{\overline{OB}}{u_{p2}} = \frac{\overline{AO'}}{u_{p1}}$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{AO'}} = \frac{u_{p2}}{u_{p1}} = \frac{\overline{OO'} \sin\theta_t}{\overline{OO'} \sin\theta_i}$$

Því fæst

$$\boxed{\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{u_{p2}}{u_{p1}} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}}$$

þar sem brotstuðlarnir hafa verið skilgreindir sem

$$n_i = c/u_{pi}$$

→ Lögmál Snells fyrir bylgjubrot

Nú var $u_{pi} = \frac{1}{\sqrt{\mu_i \epsilon_i}}$

Því fæst

$$\boxed{\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\eta_2}{\eta_1}}$$

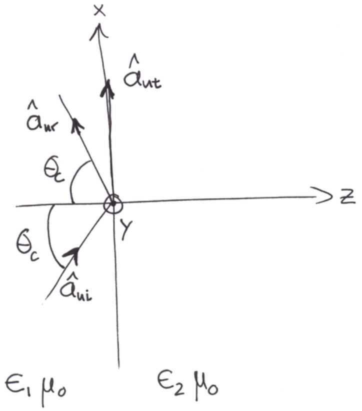
fyrir efni með $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

Ef í viðbót $\epsilon_{r1} = 1$, $n_1 = 1$ fæst

$$\boxed{\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} = \frac{1}{n_2}}$$

Alspeglun

Setjum $\epsilon_1 > \epsilon_2$



$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}$$

Þá kemur að því fyrir stórt $\theta_i = \theta_c$ að $\theta_t = \frac{\pi}{2}$

$$\sin\theta_c = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

Fyrir enn stærri θ_i fer enginn geisli inn í ② lengur

$$\boxed{\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}$$

Í ② gildir

$$\hat{a}_{nt} = \hat{a}_x \sin\theta_t + \hat{a}_z \cos\theta_t$$

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} > 1$$

$\sin\theta_i > \sin\theta_c = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$

$$\rightarrow \underbrace{\sin\theta_t}_{\text{rauntala}} = \underbrace{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin\theta_i}_{\text{rauntala}} > 1$$

En engin rauntölulausn fyrir θ_t

$$\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t} = \pm i \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\sin^2\theta_i - 1}$$

Báðir $\bar{E}_t$ og $\bar{H}_t$ hafa liðinn

$$e^{-i\beta_2 \hat{a}_{nt}\cdot\bar{R}} = e^{-i\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

Þegar $\theta_i > \theta_c$ fæst

$$e^{-\alpha_2 z} e^{-i\beta_{2x} x}$$

með

$$\alpha_2 = \beta_2 \sqrt{\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)\sin^2\theta_i - 1}$$

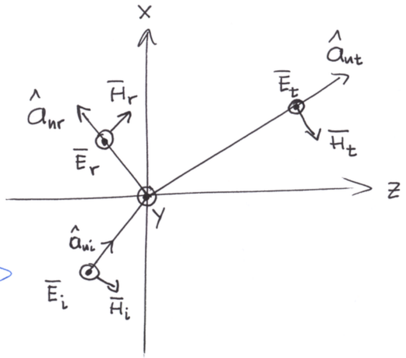
$$\beta_{2x} = \beta_2 \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin\theta_i$$

Yfirborðsbylgja (föst í x-yfirborði) og dofnandi í z-átt

$\boxed{\text{Evanescent}}$

Þverskautun

þvert á innfallssléttu



Inn

$$\bar{E}_i(x,z) = \hat{a}_y E_{i0} e^{-i\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

$$\bar{H}_i(x,z) = \frac{E_{i0}}{\eta_1}(-\hat{a}_x\cos\theta_i + \hat{a}_z\sin\theta_i) \cdot e^{-i\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

Speglað

$$\bar{E}_r(x,z) = \hat{a}_y E_{r0} e^{-i\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

$$\bar{H}_r(x,z) = \frac{E_{r0}}{\eta_1}(\hat{a}_x\cos\theta_r + \hat{a}_z\sin\theta_r) \cdot e^{-i\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

Áfram

$$\bar{E}_t(x,z) = \hat{a}_y E_{t0} e^{-i\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

$$\bar{H}_t(x,z) = \frac{E_{t0}}{\eta_2}(-\hat{a}_x\cos\theta_t + \hat{a}_z\sin\theta_t) e^{-i\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

Fjórar óþekktar stærðir

$E_{r0}, E_{t0}, \theta_r, \theta_t$

Þættir $\bar{E}$ og $\bar{H}$ samsíða skilfletinum í $z=0$ eru samfelldir

$$E_{iy}(x,0) + E_{ry}(x,0) = E_{ty}(x,0)$$

$$\Downarrow$$

$$E_{i0} e^{-i\beta_1 x\sin\theta_i} + E_{r0} e^{-i\beta_1 x\sin\theta_r} = E_{t0} e^{-i\beta_2 x\sin\theta_t}$$

$$H_{ix}(x,0) + H_{rx}(x,0) = H_{tx}(x,0)$$

$$\frac{1}{\eta_1}\left(-E_{i0}\cos\theta_i e^{-i\beta_1 x\sin\theta_i} + E_{r0}\cos\theta_r e^{-i\beta_1 x\sin\theta_r}\right) = -\frac{E_{t0}}{\eta_2}\cos\theta_t e^{-i\beta_2 x\sin\theta_t}$$

Verður að halda fyrir öll x → fasar verða að passa saman

$$\beta_1 x\sin\theta_i = \beta_1 x\sin\theta_r = \beta_2 x\sin\theta_t$$

↳ Lögmál Snells

$$\boxed{\theta_r = \theta_i \qquad \frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}}$$

þá verða jöfnurnar

$$E_{io} + E_{ro} = E_{to}$$

$$\frac{1}{\eta_1}(E_{io} - E_{ro})\cos\theta_i = \frac{E_{to}}{\eta_2}\cos\theta_t$$

sem gefa

$$\Gamma_\perp = \frac{E_{ro}}{E_{io}} = \frac{\frac{\eta_2}{\cos\theta_t} - \frac{\eta_1}{\cos\theta_i}}{\frac{\eta_2}{\cos\theta_t} + \frac{\eta_1}{\cos\theta_i}}$$

$$\tau_\perp = \frac{E_{to}}{E_{io}} = \frac{2\frac{\eta_2}{\cos\theta_t}}{\frac{\eta_2}{\cos\theta_t} + \frac{\eta_1}{\cos\theta_i}}$$

Og eins og búast mátti við

$$\boxed{1 + \Gamma_\perp = \tau_\perp}$$

Héðan má sjá fyrir jöfnur með hornrétt-innfall þ. $\theta_t = 0$, $\theta_i = 0$

Ef ② er kjörleiðari verður $\eta_2 = 0$

$\Gamma_\perp = -1$, $\tau_\perp = 0$

engin framför

þegar

$$\Gamma_\perp = \frac{\frac{\eta_2}{\cos\theta_t} - \frac{\eta_1}{\cos\theta_i}}{\frac{\eta_2}{\cos\theta_t} + \frac{\eta_1}{\cos\theta_i}}$$

er skoðað má spyrja hvort til sé $\theta_i = \theta_{B\perp}$ (með η_1 og η_2) þ.a. $\Gamma_\perp = 0$

engin speglun

þá þyrfti að gilda

$$\eta_2 \cos\theta_{B\perp} = \eta_1 \cos\theta_t$$

Snell gefur

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \sin^2\theta_t} = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i}$$

$$\eta_2^2 \cos^2\theta_{B\perp} = \eta_1^2\left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i\right)$$

$$\eta_2^2\left(1 - \sin^2\theta_{B\perp}\right) = \eta_1^2\left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i\right)$$

$$\eta_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_i}}$$

Án taps

$\beta_i = \frac{\omega}{\sqrt{\mu_i\epsilon_i}}$, $\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$

því fæst

$$\boxed{\sin^2\theta_{B\perp} = \frac{1 - \frac{\mu_1\epsilon_2}{\mu_2\epsilon_1}}{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2}}$$

Brewster hornið fyrir enga speglun fyrir þverskautun

fyrir efni með $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$
(engin segulvirkni)
er hornið ekki til

fyrir samsíða skautun

fást jöfnurnar

$$\Gamma_\parallel = \frac{E_{ro}}{E_{io}} = \frac{\eta_2\cos\theta_t - \eta_1\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i}$$

$$\tau_\parallel = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i}$$

Og

$$\boxed{1 + \Gamma_\parallel = \tau_\parallel\left(\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\right)}$$

Sem er annars form en áður nema fyrir $\theta_i = \theta_t = 0$

* Ef ② er kjörleiðari fæst $\eta_2 = 0$ og aftur

$\Gamma_\parallel = -1$, $\tau_\parallel = 0$

* Almennt er $|\Gamma_\perp|^2 > |\Gamma_\parallel|^2$ sem fall af θ_i, nema fyrir $\theta_i = 0$

Slembi-skautun bylgna sem falla á flöt undir horni leiðir til meira endurkasts þverskautaðs ljóss. ($\bar{E}$ liggur í sama fleti og skilflöturinn)

leitum af $\theta_{B\parallel}$ (Brewster horni fyrir samsíða skautun)

$$\eta_2\cos\theta_t = \eta_1\cos\theta_{B\parallel}$$

Sem gefur núna

$$\boxed{\sin^2\theta_{B\parallel} = \frac{1 - \frac{\mu_2\epsilon_1}{\mu_1\epsilon_2}}{1 - \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2}}$$

samanborið við

$$\boxed{\sin^2\theta_{B\perp} = \frac{1 - \frac{\mu_1\epsilon_2}{\mu_2\epsilon_1}}{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2}}$$

nú er alltaf til lausn f. $\mu_1 = \mu_2$

$$\sin\theta_{B\parallel} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)}}$$

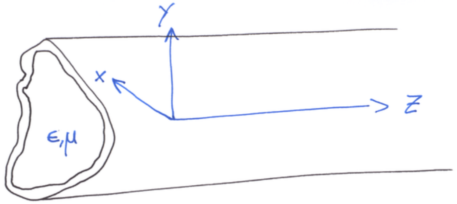
Vegna munsins á

$\theta_{B\perp}$ og $\theta_{B\parallel}$

er hægt að aðgreina skautunarstefnur.

Því er oft talað um skautunarhorn

Bylgjuleiðarar



liggur í z-átt með fastan þverskurð

Bylgja berst í z-stefnu með bylgjufasta $\gamma = \alpha + i\beta = (ik_c)$

Því búumst við við þætti

$$e^{-\gamma z + i\omega t} = e^{-\alpha z + i(\omega t - \beta z)}$$

í sviðunum

Tímaháða rafsviðið er því

$$(*)\quad \overline{E}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\overline{E}^0(x,y)\, e^{i\omega t - \gamma z}\right]$$

bara x og y

Engar hleðslur og straumar í leiðarahólinu

$$\downarrow$$

$$(\nabla^2 + k^2)\overline{E} = 0$$

$$(\nabla^2 + k^2)\overline{H} = 0$$

með $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$

Vegna útlits $\overline{E}$ og $\overline{H}$ (*)

$$\nabla^2 \overline{E} = (\nabla_{xy}^2 + \nabla_z^2)\overline{E}$$

$$= \left(\nabla_{xy}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\overline{E}$$

$$= (\nabla_{xy}^2 + \gamma^2)\overline{E}$$

Helmholtz jöfnurnar verða því

$$\left\{\nabla_{xy}^2 + (\gamma^2 + k^2)\right\}\overline{E} = 0$$

$$\left\{\nabla_{xy}^2 + (\gamma^2 + k^2)\right\}\overline{H} = 0$$

En $\overline{E}$ og $\overline{H}$ tengjast líka í gegnum jöfnur Maxwells

$$\overline{\nabla} \times \overline{E} = -i\omega\mu\overline{H}$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{H} = i\omega\epsilon\overline{E}$$

$$\downarrow$$

$$H_x^0 = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial H_z^0}{\partial x} - i\omega\epsilon\frac{\partial E_z^0}{\partial y}\right)$$

$$H_y^0 = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial H_z^0}{\partial y} + i\omega\epsilon\frac{\partial E_z^0}{\partial x}\right) \qquad (**)$$

$$E_x^0 = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial E_z^0}{\partial x} + i\omega\mu\frac{\partial H_z^0}{\partial y}\right)$$

$$E_y^0 = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial E_z^0}{\partial y} - i\omega\mu\frac{\partial H_z^0}{\partial x}\right)$$

$$h^2 = \gamma^2 + k^2$$

---

* Því nægir að leysa jöfnur Helmholtz fyrir E_z^0 og H_z^0 síðan ákvarðast hinir þættirnir frá jöfnum Maxwells (**)

Flokkum bylgjur

TEM: $E_z, H_z = 0$

TM: $H_z = 0$

TE: $E_z = 0$

TEM

$E_z = 0$ og $H_z = 0$

(**) → aðeins mögulegar lausnir ef $\gamma_{TEM}^2 + k^2 = 0$

$$\rightarrow \gamma_{TEM} = ik = i\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

$$\rightarrow u_{p(TEM)} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

fasahraði TEM-bylgju er óháður ω

Jöfnur Maxwells gefa

$$Z_{TEM} = \frac{E_x^0}{H_y^0} = \frac{\gamma_{TEM}}{i\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta$$

$$\overline{H} = \frac{1}{Z_{TEM}}\hat{a}_z \times \overline{E}$$

samviðnám

Ampère Maxwell lögmálið

krefst þess að línuheildi $\overline{H}$ um lokuðu sviðslínurnar í xy-sléttunni sé jafnt straumnum og færslustraumnum í gegnum þær í z-átt

Ekki til hér í holinu

→ $\boxed{\text{TEM-bylgja er ekki til í holinu}}$

TM-bylgjur

$$H_z = 0$$

→ nægir að reikna E_z

$$\left(\nabla_{xy}^2 + h^2\right)E_z^0 = 0 \quad ①$$

Maxwell jöfnurnar fyrir hina þættina má einfalda sem

$$\boxed{(E_T^0)_{TM} = -\frac{\gamma}{h^2}\overline{\nabla}_T E_z^0}$$

með

$$\overline{\nabla}_T E_z^0 = \left(\hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y}\right)E_z^0$$

og $\boxed{\overline{H} = \frac{1}{Z_{TM}}(\hat{a}_z \times \overline{E})}$

ef $\boxed{Z_{TM} = \frac{E_x^0}{H_y^0} = -\frac{E_y^0}{H_x^0} = \frac{\gamma}{i\omega\epsilon}}$

Hér er ① eigingildisjafna fyrir E_z^0 og h^2 eru strjál eigingildi sem við finnum þegar jafnan ① er leyst fyrir það þverskurðarform sem við höfum áhuga á

þegar eigingildin eru fundin má reikna

$$\gamma = \sqrt{h^2 - k^2} = \sqrt{h^2 - \omega^2\mu\epsilon}$$

Til er þröskuldstíðni

$$\omega_c = \frac{h}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

eða $\boxed{f_c = \frac{h}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}}$

þegar $\gamma = 0$

$$\gamma = h\sqrt{1 - \frac{\omega^2\mu\epsilon}{h^2}} = h\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$$

$f < f_c$

→ $\gamma \in \mathbb{R}$

burðarþátturinn er

$$e^{-\gamma z} = e^{-\alpha z}$$

Engin bylgja berst

→ Dofnunarástand

$$\gamma = \alpha = h\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$$

→ f_c er þröskuldstíðni

$f > f_c$

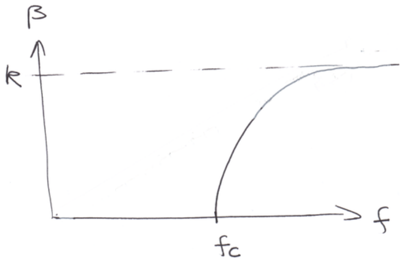
$$\gamma = i\beta = ik\sqrt{1 - \left(\frac{h}{k}\right)^2}$$

$$= ik\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

því $k^2 = \omega^2\mu\epsilon$

Bylgja berst með

$$\beta = k\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$



Bylgjulengd í leiðara

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{k}\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} > \lambda$$

því $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{u}{f}$

og $u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$

Með þröskulds bylgjulengdinni

$$\lambda_c = \frac{u}{f_c}$$

má fá

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2}$$

Grúpuhraði

$$u_g = \frac{1}{d\beta/d\omega} = u\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda_g}u < u$$

Fasahraði

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{u}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda_g}{\lambda}u > u$$

↳ $\boxed{u_g u_p = u^2}$

Bylgjur tvístrast í þessum leiðara

$$Z_{TM} = \frac{\gamma}{i\omega\epsilon}$$

$$= \eta\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

En fyrir $f < f_c$

fékkst

$$Z_{TM} = -i\frac{h}{\omega\epsilon}\sqrt{1-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$$

TE-bylgjur

$$E_z = 0$$

Nú er eigingildisjafnan

$$\boxed{\nabla_{xy}^2 H_z + h^2 H_z = 0}$$

Maxwell gevur

$$\boxed{(H_T^0)_{TE} = -\frac{\gamma}{h^2}\overline{\nabla}_T H_z^0}$$

og

$$\boxed{\overline{E} = -Z_{TE}(\hat{a}_z \times \overline{H})}$$

við

$$\boxed{Z_{TE} = \frac{i\omega\mu}{\gamma}}$$

---

fyrir $f > f_c$

fæst aftur

$$\gamma = ik\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = i\beta$$

bylgjuloysn við

$$Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}}$$

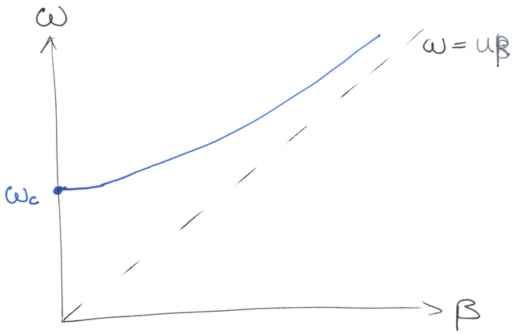
fyrir $f < f_c$

$$\gamma = \alpha = h\sqrt{1-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$$

Dofnunarloysn við

$$Z_{TE} = i\frac{\omega\mu}{h\sqrt{1-(f/f_c)^2}}$$

Tvístur í f



$$\beta = k\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{u^2}$$

$$\hookrightarrow \omega^2 = \omega_c^2 + \beta^2 u^2$$

$$\omega = \sqrt{\omega_c^2 + \beta^2 u^2}$$

TM bylgjur millum samsíða leiðara

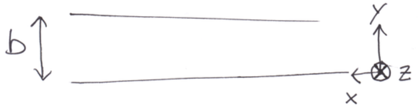
$$H_z = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + h^2\right)E_z^0(y) = 0$$

Jaðarstilyrði

$$E_z^0(0) = 0, \quad E_z(b) = 0$$

einslætt Kervi í x-ætt



$$\rightarrow E_z^0(y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Maxwell gevur

$$H_x^0(y) = \frac{i\omega\epsilon}{h} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$E_y^0(y) = -\frac{\gamma}{h} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \qquad h = \frac{n\pi}{b}$$

við þröskuldstíðni

$$f_c = \frac{n}{2b\sqrt{\mu\epsilon}}$$

TM_0 er TEM háttur ($f_c = 0$) og ríkjandi háttur

$\nearrow$ lægsti þröskuldur

TE-bylgjur millum samsíða plátna

$E_z = 0$, x-samhverva (forsla)

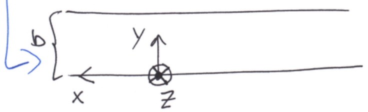
$$\hookrightarrow \left(\frac{d^2}{dy^2} + h^2\right)H_z^0(y) = 0$$

$$H_z(y,z) = H_z^0(y)e^{-\gamma z}$$

$E_x = 0$ á plátunum

Maxwell gav

$$E_x^0 = -\frac{i\omega\mu}{h^2}\frac{\partial H_z^0}{\partial y}$$



$$\rightarrow \frac{dH_z^0(y)}{dy} = 0 \quad \text{fyrir } y = 0, b$$

$$H_z^0(y) = B_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Aðrir þættir eru (Maxwell)

$$H_y^0(y) = \frac{\gamma}{h} B_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$E_x^0(y) = \frac{i\omega\mu}{h} B_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon}$$

↑ Eins og fyrir TM

②

Orkuflutnings hraði

Vegna þröskulda í tíðni er ekki víst að grúpuhraði sé vel skilgreindur fyrir bylgjuleiðara

→ orkuflutnings hraði

$$u_{en} = \frac{(P_z)_{ave}}{W'_{ave}}$$

með

$$(P_z)_{ave} = \int_S \overline{\mathcal{S}}_{ave} \cdot d\overline{s}$$

Meðaltalsafl í þversniði S

og

$$W'_{ave} = \int_S \left[(w_e)_{ave} + (w_m)_{ave}\right] ds$$

meðal orkan geymd í lengdareiningu leiðara

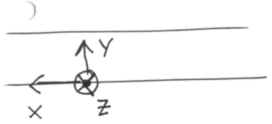
↑ Einingar eru þá réttar fyrir u_{en}

Meðaltal m.t.t. tíma

③

Dæmi

Reiknum u_{en} fyrir TM_n



$$E_z^0(y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$H_x^0(y) = \frac{i\omega\epsilon}{h} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$E_y^0(y) = -\frac{\gamma}{h} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad \gamma = i\beta$$

$$\overline{\mathcal{S}}_{ave} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\overline{E} \times \overline{H}^*\right)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(-\hat{a}_z E_y^0 H_x^{0*} + \hat{a}_y E_z^0 H_x^{0*}\right)$$

$$\rightarrow \overline{\mathcal{S}}_{ave} \cdot \hat{a}_z = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(E_y^0 H_x^{0*}\right)$$

$$= \frac{\omega\epsilon\beta}{2h^2} A_n^2 \cos^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$(P_z)_{ave} = \int_0^b \overline{\mathcal{S}} \cdot \hat{a}_z \, dy$$

$$= \frac{\omega\epsilon\beta b}{4h^2} A_n^2$$

á einingarbreidd leiðara (x-stefna)

④

$$(w_e)_{ave} = \frac{\epsilon}{4} \operatorname{Re}\left(\overline{E} \cdot \overline{E}^*\right)$$

$$(w_m)_{ave} = \frac{\mu}{4} \operatorname{Re}\left(\overline{H} \cdot \overline{H}^*\right)$$

$$(w_e)_{ave} = \frac{\epsilon}{4} A_n^2 \left\{\sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \frac{\beta^2}{h^2} \cos^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\right\}$$

$$\rightarrow \int_0^b (w_e)_{ave} \, dy = \frac{\epsilon b}{8} A_n^2 \left\{1 + \frac{\beta^2}{h^2}\right\}$$

$$= \frac{\epsilon b}{8h^2} A_n^2 \left\{h^2 + \beta^2\right\} = \frac{\epsilon b}{8h^2} k^2 A_n^2$$

og eins fyrir segulsviðið

$$\int_0^b (w_m)_{ave} \, dy = \frac{\epsilon b}{8h^2} k^2 A_n^2$$

Því fæst

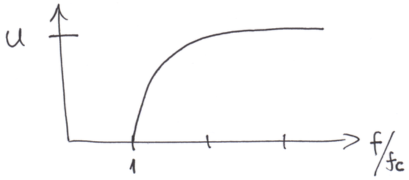
$$u_{en} = \frac{\frac{\omega\epsilon\beta b}{4h^2} A_n^2}{\frac{\epsilon b}{4h^2} k^2 A_n^2} = \frac{\omega\beta}{k^2}$$

$$= \frac{\omega}{k} \cdot \frac{\beta}{k}$$

$$= \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} \cdot \frac{k\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}{k}$$

$$= u\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$= u_g$$



⑤

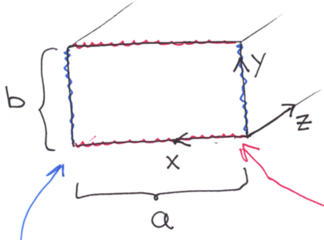
Rétthyrndur bylgjuleiðari

TM-bylgjur $H_z = 0$

$$E_z(x,y,z) = E_z^0(x,y) e^{-\gamma z}$$

með

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + h^2\right) E_z^0(x,y) = 0$$



Lögumm leitir aðgreiningu breytistærða

$$E_z^0(x,y) = X(x) Y(y)$$

þá fæst

$$\left.\begin{aligned} X''(x) + k_x^2 X(x) &= 0 \\ Y''(y) + k_y^2 Y(y) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

með $k_y^2 + k_x^2 = h^2$

jaðargildi

$E_z^0(0,y) = 0$ $E_z^0(x,0) = 0$

$E_z^0(a,y) = 0$ $E_z^0(x,b) = 0$

Einu lausnirnar fyrir X og Y verða

$$\sin k_x x \,,\quad \sin k_y y$$

með

$$k_x = \frac{m\pi}{a}\,,\quad m = 1, 2, 3, \cdots$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b}\,,\quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$\rightarrow \boxed{E_z^0(x,y) = E_0 \sin(k_x x)\sin(k_y y)}$$

og

$$\boxed{h^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$$\gamma = i\beta = i\sqrt{k^2 - h^2}$$

$$= i\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

Til viðbótar fæst

$$E_x^0(x,y) = -\frac{\gamma}{h^2} k_x E_0 \cos(k_x x)\sin(k_y y)$$

$$E_y^0(x,y) = -\frac{\gamma}{h^2} k_y E_0 \sin(k_x x)\cos(k_y y)$$

$$H_x^0(x,y) = \frac{i\omega\epsilon}{h^2} k_y E_0 \sin(k_x x)\cos(k_y y)$$

$$H_y^0(x,y) = -\frac{i\omega\epsilon}{h^2} k_x E_0 \cos(k_x x)\sin(k_y y)$$

$$(f_c)_{mn} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

$$(\lambda_c)_{mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

Lesa sjálf um TE í rétthyrndum leiðara

Þar kemur í ljós að TE_{10} er ríkjandi háttur í rétthyrndum leiðurum ef $a > b$

Hringlaga bylgjustokkar

Hnitakerfið er sívalningshnit

$$\overline{E} = \overline{E}_T + \hat{a}_z E_z$$

$$\overline{H} = \overline{H}_T + \hat{a}_z H_z$$

↑ þverþættir

TEM-bylgjur eru ekki til í þeim

→ TE og TM-bylgjur

$$\nabla_{r\phi}^2 E_z^0 + (\gamma^2 + k^2) E_z^0 = 0$$

$$E_z = E_z^0 e^{-\gamma z}$$

$$E_z(r,\phi,z) = E_z^0(r,\phi) e^{-\gamma z}$$

Lausnin er

$$\boxed{E_z^0(r,\phi) = C_n J_n(hr)\cos(n\phi)}$$

Bessel fall

$$(E_T^0)_{TM} = \hat{a}_r E_r^0 + \hat{a}_\phi E_\phi^0 = -\frac{\gamma}{h^2}\overline{\nabla}_T E_z^0$$

$$= -\frac{\gamma}{h^2}\left(\hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\phi \frac{\partial}{r\partial\phi}\right) E_z^0$$

$$\rightarrow E_r^0 = -\frac{i\beta}{h} C_n J_n'(hr)\cos(n\phi)$$

$$E_\phi^0 = \frac{i\beta n}{h^2 r} C_n J_n(hr)\sin(n\phi)$$

$$H_r^0 = -\frac{i\omega\epsilon n}{h^2 r} C_n J_n(hr)\sin(n\phi)$$

$$H_\phi^0 = -\frac{i\omega\epsilon}{h} C_n J_n'(hr)\cos(n\phi)$$

$$H_z^0 = 0$$

Eigingildi TM háttanna finnast frá

$$\boxed{J_n(ha) = 0}$$

því $E_z^0(a,\phi) = 0$

Gildin á mögulegum „h" ákvarðast frá núllstöðum J_n

Lægsta núllstöðin er fyrir J_0 → TM_{01}-háttur er lægstur hér

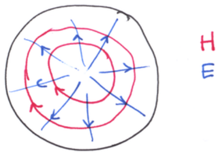
---

Lesa sjálf um TE-bylgjur í sívalningsbylgjustokki

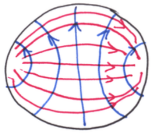
Þar kemur í ljós að $J_n'(ha) = 0$ hefur lægstu rót fyrir $n=1$

→ TE_{11} er lægsti hátturinn

og er ríkjandi háttur í hringlaga leiðurum



TM_{01}



TE_{11}

Bessel föll

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)u = 0$$

Lausnir eru líka til fyrir raungild ν og jafnvel tvinngild.

hefur lausnir

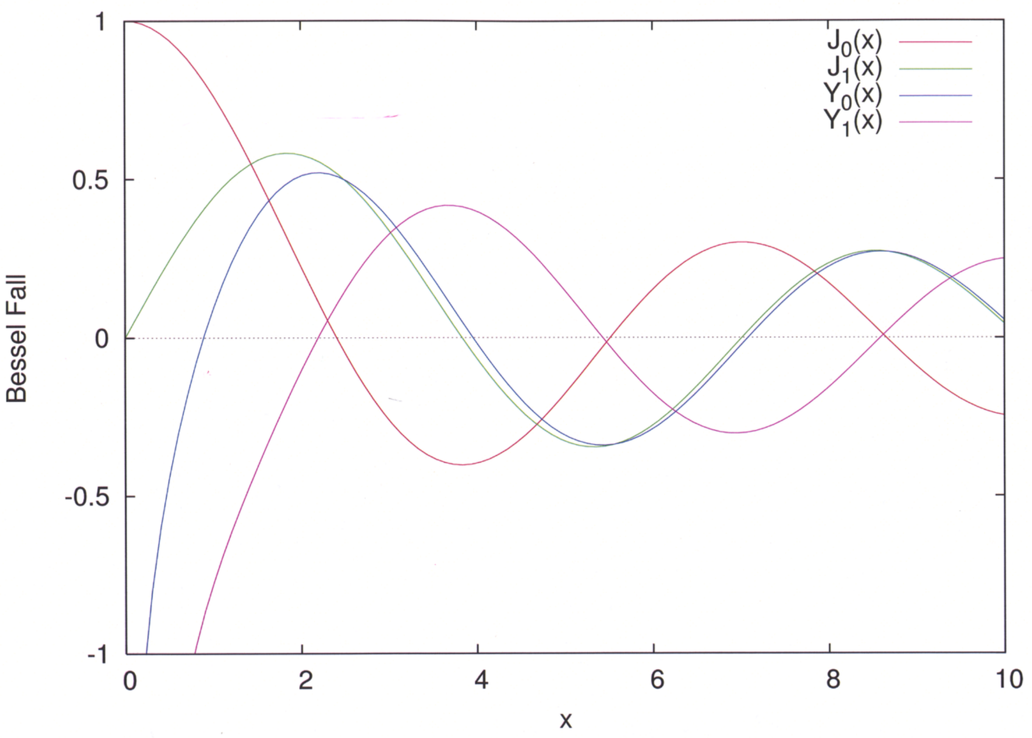
$$u = A_n J_n(z) + B Y_n(z)$$

← sérstöðup. í z=0

fyrir $\nu = n = 0, 1, 2, \ldots$

$$J_n'(z) = \frac{1}{2}\left\{J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)\right\} \quad n = 1, 2, \ldots \quad J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z}J_n(z)$$

$$J_0'(z) = -J_1(z)$$



Geislun og loftnet

Leiðarar með tímaháðum straumum og hleðslum mynda rafsegulsvið.

fyrir lokubundnar uppsprettur höfum við leitt út (í fasoratáknum)

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{\bar{J}e^{-ikR}}{R}\,dv'$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'} \rho\frac{e^{-ikR}}{R}\,dv'$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

frá $\bar{A}$ og V má síðan finna

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu}\bar{\nabla}\times\bar{A}$$

$$\bar{E} = -\bar{\nabla}V - i\omega\bar{A}$$

flæðir orka út í óendanleikann?

Við þurfum að skoða lausnirnar nærri og fjærri uppsprettum til þess að finna hvort rafsegulsvið berist frá þeim

Gefum okkur $\bar{J}$ og/eða ρ og reiknum $\bar{A}$ og/eða V. Fyrsta nálgun því $\bar{A}$ og $\bar{V}$ verka líka á $\bar{J}$ og ρ. þarf að leysast sjálfsamkvæmt

---

$\bar{A}$ og V tengjast í gegnum Lorentz skilyrðin og ρ og $\bar{J}$ í gegnum samfelldnijöfnuna

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{J} = -i\omega\rho$$

Eins tengjast $\bar{E}$ og $\bar{H}$

$$\bar{E} = \frac{1}{i\omega\epsilon}\bar{\nabla}\times\bar{H}$$

Við veljum

① Reiknum $\bar{A} \leftarrow \bar{J}$

② $\bar{A} \to \bar{H}$

③ $\bar{H} \to \bar{E}$

Einnig má reyna

① $\bar{A} \leftarrow \bar{J}$ $\quad V \leftarrow \rho$

② $\bar{A}, V \to \bar{E}$

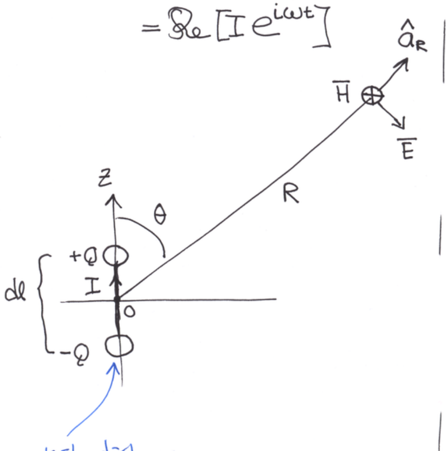
③ $\bar{A} \to \bar{H}$ (eða $\bar{E} \to \bar{H}$)

fyrri leiðin er einfaldari í flestum tilfellum.

Raftvískaut

Ef straumurinn er

$$i(t) = I\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left[I e^{i\omega t}\right]$$



kúla diskur
Rýndar álag

Hleðsla getur safnast á endunum

$$i(t) = \pm \frac{dq(t)}{dt}$$

$$q(t) = \mathrm{Re}\left[Q e^{i\omega t}\right]$$

fyrir fasorana fæst þá

$$I = \pm i\omega Q$$

eða

$$Q = \pm \frac{I}{i\omega}$$

Leiðir til tvískautvægis

$$\overline{p} = \hat{a}_z Q\, dl$$

↑ fasoratáknum

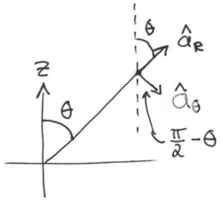
Tvískaut Hertz

$$\overline{A} = \hat{a}_z \frac{\mu_0 I dl}{4\pi}\left(\frac{e^{-i\beta R}}{R}\right)$$

þar sem $\beta = k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Viljum nota kúluhnit

$$\hat{a}_z = \hat{a}_R \cos\theta - \hat{a}_\theta \sin\theta$$



$$A_R = A_z \cos\theta = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi}\left(\frac{e^{-i\beta R}}{R}\right)\cos\theta$$

$$A_\theta = -A_z \sin\theta = -\frac{\mu_0 I dl}{4\pi}\left(\frac{e^{-i\beta R}}{R}\right)\sin\theta$$

$$A_\phi = 0$$

$\overline{A}$ er ekki fall af ϕ því fæst

$$\overline{H} = \frac{1}{\mu_0}\overline{\nabla}\times\overline{A} = \hat{a}_\phi \frac{1}{\mu_0 R}\left\{\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta) - \frac{\partial A_R}{\partial \theta}\right\}$$

$$= -\hat{a}_\phi \frac{I dl}{4\pi}\beta^2 \sin\theta\left\{\frac{1}{i\beta R} + \frac{1}{(i\beta R)^2}\right\} e^{-i\beta R}$$

---

og fyrir rafsviðið

$$\overline{E} = \frac{1}{i\omega\epsilon_0}\overline{\nabla}\times\overline{H}$$

$$= \frac{1}{i\omega\epsilon_0}\left\{\hat{a}_R \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(H_\phi \sin\theta) - \hat{a}_\theta \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RH_\phi)\right\}$$

$$\rightarrow \begin{cases} E_R = -\frac{I dl}{4\pi}\eta_0 \beta^2 2\cos\theta\left\{\frac{1}{(i\beta R)^2} + \frac{1}{(i\beta R)^3}\right\} e^{-i\beta R} \\ E_\theta = -\frac{I dl}{4\pi}\eta_0 \beta^2 \sin\theta\left\{\frac{1}{i\beta R} + \frac{1}{(i\beta R)^2} + \frac{1}{(i\beta R)^3}\right\} e^{-i\beta R} \\ E_\phi = 0 \end{cases}$$

Nærsvið

$$\beta R = \frac{2\pi R}{\lambda} \ll 1$$

$$\rightarrow H_\phi \rightarrow \frac{I dl}{4\pi R^2}\sin\theta$$

sama formlega útlit og fyrir segulstöðusviðið
(við erum þó hér með fasora)

því $e^{-i\beta R} \rightarrow 1$

fyrir rafsviðið fæst

$$E_R = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} 2\cos\theta$$

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3}\sin\theta$$

Aftur sama útlit og fyrir rafstöðusvið tvískauts

Fjarsvið

$$\beta R = 2\pi R/\lambda >> 1 \qquad \left(R >> \frac{\lambda}{2\pi} \right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} H_\phi &\longrightarrow i\,\frac{I\,dl}{4\pi}\left(\frac{e^{-i\beta R}}{R}\right)\beta \sin\theta \\ E_\theta &\longrightarrow i\,\frac{I\,dl}{4\pi}\left(\frac{e^{-i\beta R}}{R}\right)\eta_0 \beta \sin\theta \end{aligned}}$$

Misleit kúlubylgja á leið út frá tvípól
Á smáum fleti hefur hún eiginleika sléttrar bylgju í tómarúmi

Sviðin eru í tímafasa, $\frac{E_\theta}{H_\phi} = \eta_0$

$\frac{1}{R}$-lægðum liðir til þess að orkuflæðið í gegnum kúluflöt með geisla $R \to \infty$ hverfur ekki

Hér sést ekkert eftir að nærsviðs eiginleikunum

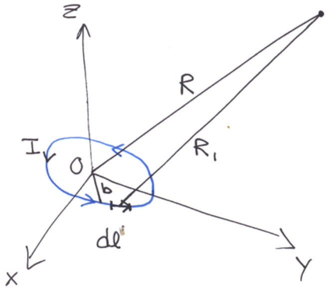
Segultvískaut

$$i(t) = I\cos(\omega t)$$

$\downarrow$

Segultvískautsvægi

$$\overline{m} = \hat{a}_z I \pi b^2 = \hat{a}_z m$$



$$\overline{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{e^{-i\beta R_1}}{R_1} d\overline{l}'$$

Nálgun fyrir smáan hring

$$e^{-i\beta R_1} = e^{-i\beta R - i\beta(R_1 - R)}$$

$$\approx e^{-i\beta R}\left\{1 - i\beta(R_1 - R) + \cdots\right\}$$

$$\overline{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} e^{-i\beta R}\left[(1+i\beta R)\oint \frac{d\overline{l}'}{R_1} - i\beta \underbrace{\oint d\overline{l}'}_{=0}\right]$$

því fæst

$$\overline{A} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 m}{4\pi R^2}(1 + i\beta R)e^{-i\beta R}\sin\theta$$

og því

$$E_\phi = \frac{i\omega\mu_0 m}{4\pi}\beta^2 \sin\theta \left\{\frac{1}{i\beta R} + \frac{1}{(i\beta R)^2}\right\} e^{-i\beta R}$$

$$H_R = -\frac{i\omega\mu_0 m}{4\pi\eta_0}\beta^2 2\cos\theta \left\{\frac{1}{(i\beta R)^2} + \frac{1}{(i\beta R)^3}\right\} e^{-i\beta R}$$

$$H_\theta = -\frac{i\omega\mu_0 m}{4\pi\eta_0}\beta^2 \sin\theta \left\{\frac{1}{i\beta R} + \frac{1}{(i\beta R)^2} + \frac{1}{(i\beta R)^3}\right\} e^{-i\beta R}$$

Tvískautin eru lík

$$E_e \leftrightarrow \eta_0 H_m \qquad \text{Ef} \qquad I\,dl \leftrightarrow i\beta m$$

$$H_e \leftrightarrow -\frac{E_m}{\eta_0}$$

fjarsviðin eru

$$E_\phi = \frac{\omega\mu_0 m}{4\pi}\left(\frac{e^{-i\beta R}}{R}\right)\beta\sin\theta$$

$$H_\theta = -\frac{\omega\mu_0 m}{4\pi\eta_0}\left(\frac{e^{-i\beta R}}{R}\right)\beta\sin\theta$$

Því gildir allt áður sagt hér líka

Tvískautin geisla rafsegulsviði

Geislunar mynstur - stikar

Hertz-tvískauts geislun fjarsvið

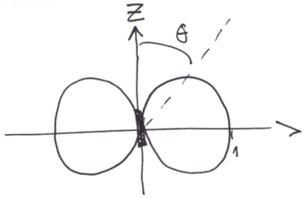
$$E_\theta \sim_{\rho_0} \frac{e^{-i\beta R}}{R} \sin\theta$$

$$H_\phi \sim \frac{e^{-i\beta R}}{R} \sin\theta$$

$E_\theta \sim H_\phi$, óháð ϕ

(E-plane): gefið R

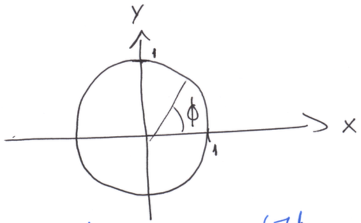
normað $|E_\theta| = |\sin\theta|$



Lítil geislun í z-átt samsíða tvískautsvægi $\bar{p}$

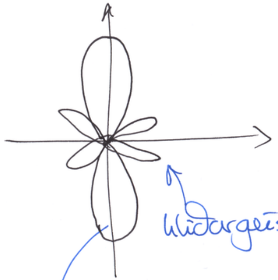
(H-plane): Gefið R , $\theta = \pi/2$

$E_\theta \sim |\sin\theta| = 1$



Jöfn geislun í x-y-sléttu

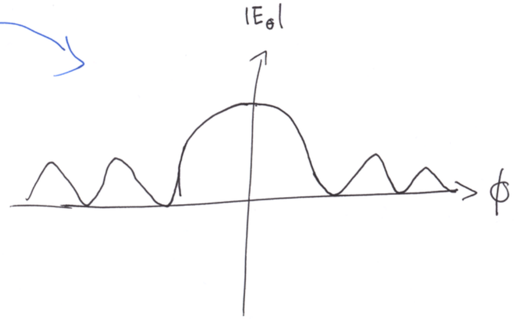
Sum loftnet geta hoft mynstur í x-y-sléttu



hliðargeisli

Aðalgeisli

Önnur leið til skoðunar



Þá má skoða geislabreidd og styrk hliðargeisla

Geislunarstyrkur, U

Er mældur í W/sr — rúmhorn , heil kúla er 4π (sr)

$$U = R^2 \mathcal{P}_{ave}$$

og heildarafl geislað

$$P_r = \oint \mathcal{P}_{ave} \cdot d\bar{s} = \oint U \, d\Omega$$

$$(d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi)$$

Stefnumögnun er mæld með

$$\boxed{G_D(\theta,\phi) = 4\pi \frac{U(\theta,\phi)}{P_r}}$$

$$= \frac{4\pi U(\Omega)}{\oint U d\Omega}$$

Max Stefnumögnunin er áttun (directivity)

$$\boxed{D = \frac{4\pi U_{max}}{P_r}}$$

Geislað aflið

sem má skrifa sem

$$D = \frac{4\pi |E_{max}|^2}{\int |E(\Omega)|^2 d\Omega}$$

Í loftnetinu og umhverfinu (jörðinni) verður alltaf óæskt afltap P_ℓ

Heildar inn-aflið er því $P_i = P_r + P_\ell$

og aflmögnun loftnets er

$$\boxed{G_P = \frac{4\pi U_{max}}{P_i}}$$

Geislunarnýtni er skilgreind

$$\boxed{\eta_r = \frac{G_P}{D} = \frac{P_r}{P_i}}$$

Geislunarviðnám er gildi þess óæska viðnáms sem eyðir jafnmiklu afli í hita og loftnetið í geislun P_r

⇓

hátt geislunarviðnám er hagkvæmt

Könnum þessa stika með dæmi

Hertz-tvískaut

$$H_\phi = i\frac{Idl}{4\pi}\left(\frac{e^{-i\beta R}}{R}\right)\beta\sin\theta$$

$$E_\theta = i\frac{Idl}{4\pi}\left(\frac{e^{-i\beta R}}{R}\right)\eta_0\beta\sin\theta$$

$$\mathcal{S}_{ave} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,|\bar{E}\times\bar{H}^*| = \frac{1}{2}|E_\theta||H_\phi|$$

$$U = R^2\mathcal{S}_{ave} = \frac{(Idl)^2}{32\pi^2}\eta_0\beta^2\sin^2\theta$$

$$P_r = \oint U(\Omega)d\Omega = 2\pi\int_0^\pi U(\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$P_r = 2\pi\frac{(Idl)^2}{32\pi^2}\eta_0\beta^2\underbrace{\int_0^\pi \sin^3\theta\cdot d\theta}$$

$$\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right)\Big|_0^\pi$$

$$= -\frac{1}{3} + 1$$

$$-\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$P_r = \frac{(Idl)^2}{12\pi}\eta_0\beta^2$$

$$G_D(\Omega) = \frac{U(\Omega)\,4\pi}{P_r}$$

$$= \frac{(Idl)^2\eta_0\beta^2\sin^2\theta\;12\pi}{8\pi\;(Idl)^2\eta_0\beta^2}$$

$$= \frac{3}{2}\sin^2\theta$$

$$G_D(\Omega) = \frac{3}{2}\sin^2\theta$$

Mest geislun í x-y-sléttu og engin í pól áttirnar tvær $\pm\hat{z}$

$$D = G_D\left(\frac{\pi}{2},\phi\right) = 1.5$$

$$P_r = \frac{(Idl)^2}{12\pi}\eta_0\beta^2$$

notum (8-14) með

$$\eta_0 \simeq 120\pi$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$P_r = \frac{I^2}{2}\left\{80\pi^2\left(\frac{dl}{\lambda}\right)^2\right]$$

til þess að finna geislunarviðnám notum við

$$P_r = \frac{1}{2}I^2R_r$$

$$\rightarrow \boxed{R_r = 80\pi\left(\frac{dl}{\lambda}\right)^2}$$

Hér þarf að muna að svarið okkar er aðeins rétt reiknað fyrir $dl \ll \lambda$

↓

fæst lágt gildi fyrir R_r

Skoðum vírbút með leiðni σ geisla a, lengd d sem Hertz-tvískaut

Ómskt tap $P_\ell = \frac{1}{2}I^2R_\ell$

R_ℓ verður að tengja við yfirborðsviðnám R_s

$$R_\ell = R_s\left(\frac{d}{2\pi a}\right) \quad \text{þ.s.} \quad R_s = \sqrt{\frac{\pi f\mu_0}{\sigma}}$$

← frá flutningslínunum sem við höfum sleppt

$$\eta_r = \frac{P_r}{P_r+P_\ell} = \frac{R_r}{R_r+R_\ell} = \frac{1}{1+\left(\frac{R_\ell}{R_r}\right)}$$

$$\rightarrow \eta_r = \frac{1}{1+\frac{R_s}{160\pi^3}\left(\frac{\lambda}{a}\right)\left(\frac{\lambda}{d}\right)}$$

Ef nú $a = 1{,}8\,\text{mm}$, $d = 2\text{m}$, $f = 1.5\,\text{MHz}$

$\sigma = 5.8\cdot 10^7\ \text{S/m}$ fyrir kopar fæst $\lambda = 200\,\text{m}$

og $\eta_r = 0.58 \rightarrow$ 58% nýtni

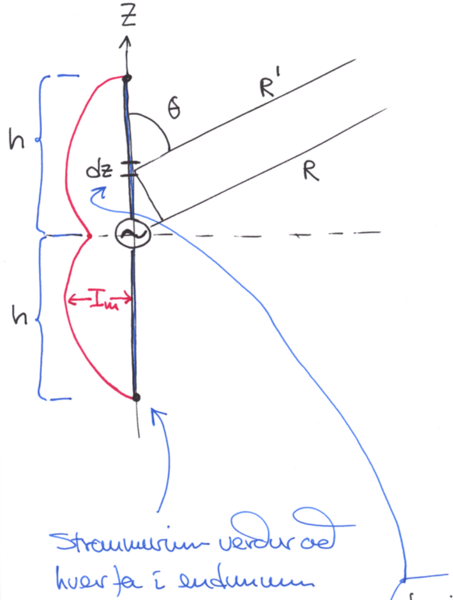
Jafnan

$$\eta_r = \frac{1}{1+\frac{R_s}{160\pi^3}\left(\frac{\lambda}{a}\right)\left(\frac{\lambda}{d}\right)}$$

sýnir að lág gildi fyrir $\left(\frac{a}{\lambda}\right)$ og $\left(\frac{d}{\lambda}\right)$ lækka nýtnina (En jöfnurnar gilda aðeins í þessu markgildi)

Því þurfum við að skoða loftnet með lengd sambærilega við bylgjulengdina λ

Grönn lína



Straumurinn verður að hverfa í endunum

Sleppum því að ákvarða strauminn sjálfsamkvæmt og gerum ráð fyrir

$$I(z) = I_m \operatorname{Sin}\{\beta(h-|z|)\}$$

$$= \begin{cases} I_m \operatorname{Sin}\{\beta(h-z)\} & z>0 \\ I_m \operatorname{Sin}\{\beta(h+z)\} & z<0 \end{cases}$$

Við látum okkur nægja að kanna fjær-sviðin

$$dE_\theta = \eta_0 dH_\phi = i\frac{Idz}{4\pi}\left(\frac{e^{-i\beta R'}}{R'}\right)\eta_0\beta \operatorname{Sin}\theta$$

fyrir litla bút loftnetsins dz

Mjög fjarri loftnetinu $R \gg h$

$$R' = (R^2+z^2-2Rz\operatorname{Cos}\theta)^{1/2} \simeq R - z\operatorname{Cos}\theta\,, \quad \frac{1}{R}\sim\frac{1}{R'}$$

$$E_\theta = \eta_0 H_\phi = i\,\frac{I_m\eta_0\beta\operatorname{Sin}\theta}{4\pi R}\,e^{-i\beta R}\int_{-h}^{h}\operatorname{Sin}\{\beta(h-|z|)\}\,e^{i\beta z\operatorname{Cos}\theta}dz$$

$$= i\,\frac{60I_m}{R}\,e^{-i\beta R}\,F(\theta)$$

með

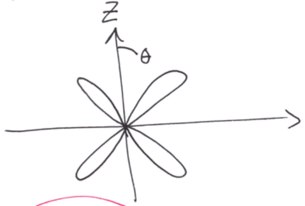
$$F(\theta) = \frac{\operatorname{Cos}\{\beta h\operatorname{Cos}\theta\}-\operatorname{Cos}(\beta h)}{\operatorname{Sin}\theta} \leftarrow$$

lengd loftnetsins skiptir öllu máli hér

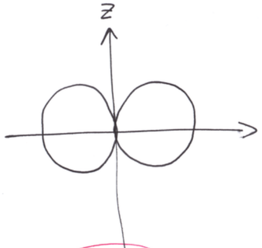
E-plane mynsturfallið fyrir þetta loftnet

---

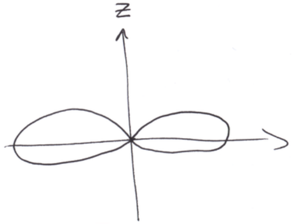
fyrir $2h = 2\lambda$ er engin geislun í $\pi/2$



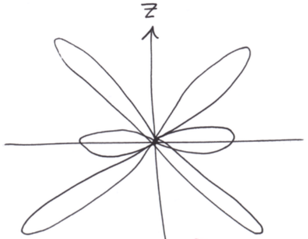
$2h = 2\lambda$



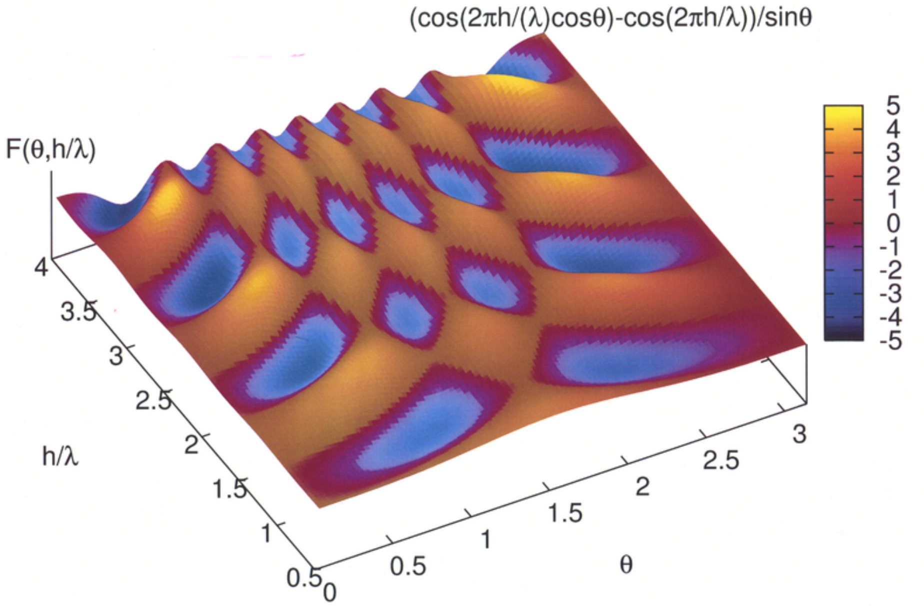
$2h = \frac{1}{2}\lambda$

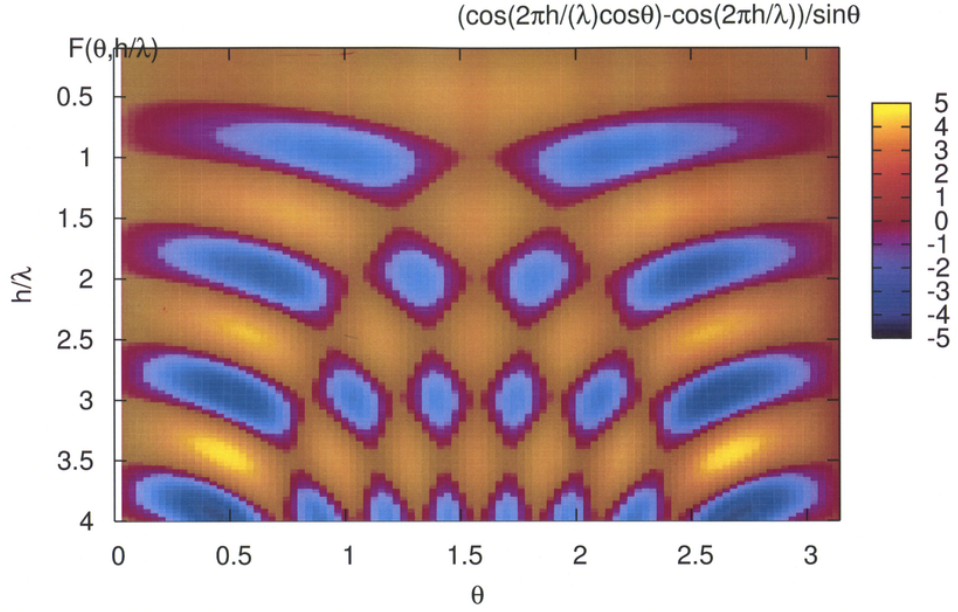


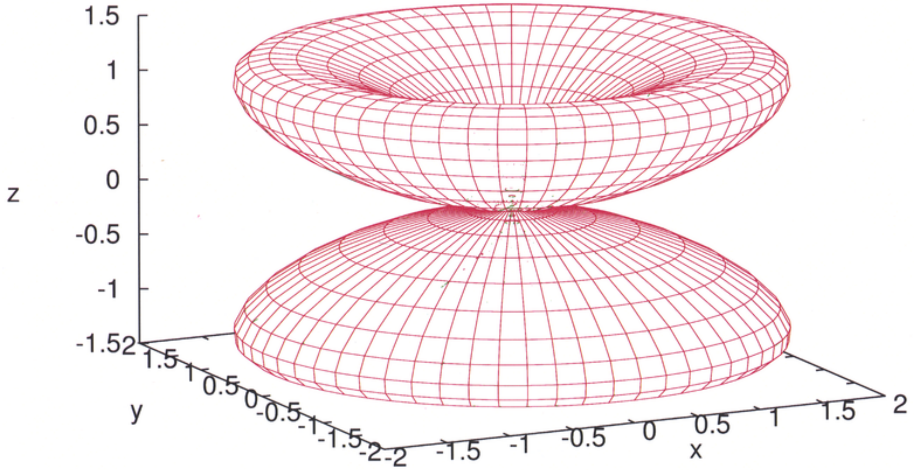
$2h = \lambda$

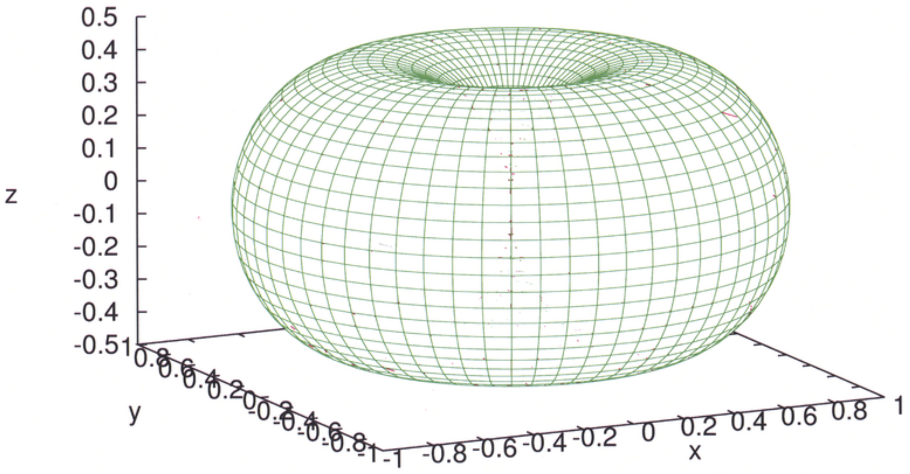


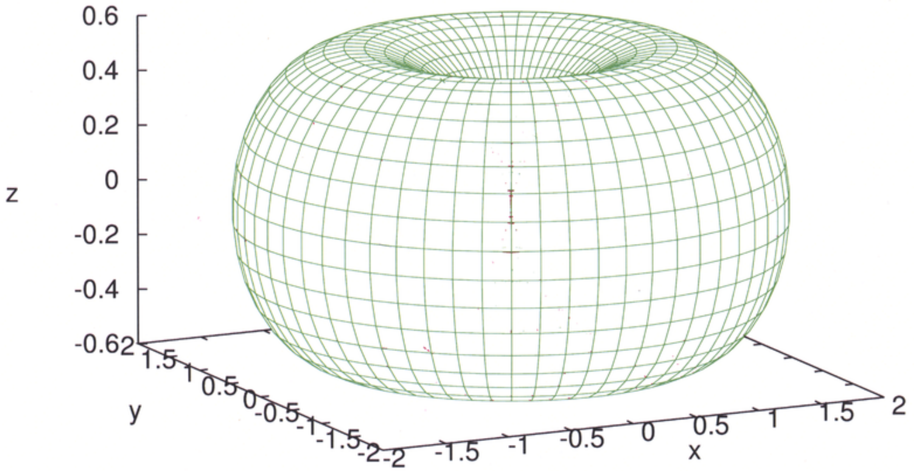
$2h = \frac{3}{2}\lambda$

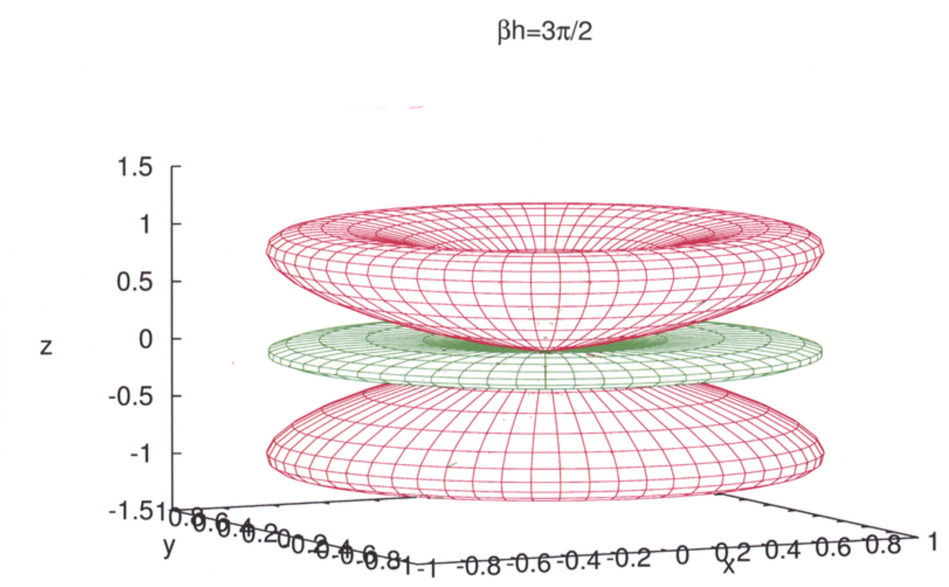





βh=2π


βh=π/2


βh=π



---

①

Rafsegulgeislun

Við höfum skoðað geislun frá loftnetum

En viljum nú nálgast lýsingu á geislun einda á hreyfingu

Þetta fyrsta skref er tekið fyrir gildi á öllum viðkomandi stikum sem ekki krefjast beint afstæðiskenningar.

fyrir geislunar mættin höfðum við

$$V(R,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'} \frac{\rho(t-R/u)}{R}\,dv'$$

$$\bar{A}(R,t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{\bar{J}(t-R/u)}{R}\,dv'$$

Hér að gæta sín á merking R utan og innan heildis

↓

Endurritum jöfnurnar sem

---

②

$$V(\bar{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int d\bar{r}' \, \frac{\rho\left(\bar{r}', t - \frac{|\bar{r}-\bar{r}'|}{u}\right)}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$$

3d-rúmheildi

$$A(\bar{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int d\bar{r}' \, \frac{\bar{J}\left(\bar{r}', t - \frac{|\bar{r}-\bar{r}'|}{u}\right)}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$$

Ef uppsprettan hefur lengdarstala a þá viljum við skoða geislunina fjarri henni þ.s. $r >> a$

Þar gildir

$$|\bar{r}-\bar{r}'| = \sqrt{r^2 - 2\bar{r}\cdot\bar{r}' + (r')^2} = r - \hat{n}\cdot\bar{r}' + \ldots\ldots$$

Þar sem

$$\hat{n} = \frac{\bar{r}}{r}$$

er einingarvigurinn í átt athuganda

---

③

Aðfellu form mættanna fyrir $r >> a$ er þá

$$V(\bar{r},t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon r}\int d\bar{r}' \, \rho\left(\bar{r}', t - \frac{r}{u} + \frac{\hat{n}\cdot\bar{r}'}{u}\right)$$

$$A(\bar{r},t) \approx \frac{\mu}{4\pi r}\int d\bar{r}' \, \bar{J}\left(\bar{r}', t - \frac{r}{u} + \frac{\hat{n}\cdot\bar{r}'}{u}\right)$$

Geislunartíminn $t' \approx t - \underbrace{\frac{r}{u}}_{\text{burðartími til Athuganda}} + \underbrace{\frac{1}{u}\hat{n}\cdot\bar{r}'}_{\text{burðartími um uppsprettu}} = t_r$

Nú getum við metið sviðin

$$\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A} \quad \text{og} \quad \bar{E} = -\bar{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t}\bar{A}$$

og notum nálgunina

$$\bar\nabla\left\{\frac{1}{r}f\left(t-\frac{r}{u}+\frac{\hat n\cdot\bar r'}{u}\right)\right\} = -\frac{\hat n}{r^2}f(t_r)-\left\{\frac{\hat n}{u}+\frac{\hat n\times(\hat n\times\bar r')}{ur}\right\}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{r}f(t_r)\right\}$$

$$t-\frac{r}{u}+\frac{\hat n\cdot\bar r'}{u} = t-\frac{r}{u}+\frac{\bar r\cdot\bar r'}{ru}$$

$$\bar\nabla\left(\frac{\bar r\cdot\bar r'}{r}\right) = \bar\nabla\left(\frac{\bar r}{r}\cdot\bar r'\right) = (\bar r'\cdot\bar\nabla)\frac{\bar r}{r}+\bar r'\times\left(\bar\nabla\times\frac{\bar r}{r}\right)$$

$$= (\bar r'\cdot\bar\nabla)\hat n+\bar r'\times\left\{\bar\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\times\hat r+\underbrace{\frac{1}{r}\bar\nabla\times\bar r}_{=0}\right\} = (\bar r'\cdot\bar\nabla)\hat n+\bar r'\times\underbrace{(-\hat u\times\hat u)}_{=0}\frac{1}{r}$$

$$= \frac{1}{r}\left(\bar r'-\hat n(\bar r'\cdot\hat n)\right) = -\frac{1}{r}\hat n\times(\hat u\times\bar r')$$

$$= -\frac{n}{u}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{r}f(t_r)\right\}+O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

því fæst fyrir sviðin (ef $r \gg a$)

$$\bar B(r,t) \simeq -\frac{\mu}{4\pi}\hat n\times\frac{1}{r}\int d\bar r'\,\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}\bar J(\bar r',t_r)$$

$$\bar E(r,t) \simeq \frac{\hat n}{u}\frac{1}{4\pi\varepsilon r}\int d\bar r'\,\frac{\partial}{\partial t}\rho(\bar r',t_r)-\frac{\mu}{4\pi r}\int d\bar r'\,\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}\bar J(\bar r',t_r)$$

Notum samfelldnijöfnuna

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\bar r',t_r) = -\bar\nabla'\cdot\bar J(\bar r',t_r)+\frac{\hat n}{u}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\bar J(\bar r',t_r)$$

$\bar\nabla'$ verkar líka á t_r með

$$\bar\nabla' t_r = \frac{\hat n}{u}$$

$$\int d\bar r'\,\bar\nabla'\cdot\bar J = 0$$

fyrir takmarkaða kerfið

notum síðan fyrir almennan vigur $\bar F$

$$\hat n(\hat u\cdot\bar F)-\bar F = \hat n\times(\hat u\times\bar F)$$

Til þess að fá

$$\bar E(\bar r,t) = u\hat n\times\left\{\frac{\mu}{4\pi}\hat n\times\frac{1}{r}\int d\bar r'\,\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}\bar J(\bar r',t_r)\right\}$$

$$= -u\hat n\times\bar B(\bar r,t) \qquad \left(\bar B = \frac{1}{u}\hat n\times\bar E\right)$$

Sviðin eru hornrétt og $E^2 = B^2u^2$

Orkuflæðið á flatar og tíma einingu er !

$$\bar S = \frac{1}{\mu}\bar E\times\bar B$$

$$S = \bar E\times\bar H$$
$$= \frac{1}{\mu}\bar E\times\bar B$$

því er flæðið burt frá uppsprettu

$$\hat n\cdot\bar S = \frac{1}{\mu}(\hat n\times\bar E)\cdot\bar B = \frac{uB^2}{\mu} = \frac{\mu}{(4\pi r)^2u}\left\{\hat n\times\int d\bar r'\,\frac{\partial}{\partial t}\bar J(\bar r',t_r)\right\}^2$$

Við höfum meiri áhuga á geisluninni inn í rúmhornið

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$

það er óháð fjarlægð frá uppsprettu

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu}{(4\pi)^2u}\left\{\hat n\times\int d\bar r'\,\frac{\partial}{\partial t}\bar J(\bar r',t_r)\right\}^2 \qquad (*)$$

og heildaraflið er

$$P = \int d\Omega\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)$$

þetta endanlega orkuflæði í mikilli fjarlægð er vegna $\frac{1}{r}$-hegðunar sviðanna (fjarsviðanna)

↑ sameiginleg öllum geislunarsviðum

Geislun frá hraðaðri eind

⑧

Eind með hleðslu e, og hraða $|\bar v| << u$ (c)

Straumþéttleikinn er

staðsetning eindar á tíma t'

$$\bar J(\bar r',t') = e\bar v(t')\,\delta(\bar r'-\bar R(t'))$$

þá er seinkaði tíminn

$$t_r = t - \frac{r}{u} + \frac{1}{u}\hat n\cdot\bar R(t') \simeq t - \frac{r}{u} \equiv t_e$$

$\frac{v}{u} << 1$

$$\int d\bar r' \frac{\partial}{\partial t}\bar J(\bar r',t_r) \approx \frac{d}{dt}\int d\bar r'\, \bar J(\bar r',t_e) = e\frac{d\bar v}{dt_e}(t_e)$$

sem sýnir að eindin geislar þegar henni er hraðað

$|\bar R(t')|$ er takmarkað af $v\cdot\tau$ þ.s. τ er náttúrulegur tími á skala fyrir kerfið

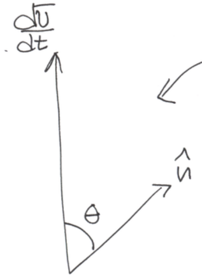
---

⑨

Notum þessa niðurstöðu í (*) t.þ.a. kanna hvernig geislunin dreifist

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} \simeq \frac{(\mu e)^2}{(4\pi)^2 u\mu}\left(\hat n\times\frac{d\bar v}{dt}\right)^2} = \left(\frac{\mu e}{4\pi}\right)^2\frac{1}{\mu u}\underbrace{\left\{\left(\frac{d\bar v}{dt}\right)^2 - \left(\hat n\cdot\frac{d\bar v}{dt}\right)^2\right\}}_{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2(1-\cos^2\theta)}$$

$$\boxed{= \left(\frac{\mu e}{4\pi}\right)^2\frac{1}{u\mu}\left(\frac{d\bar v(t_e)}{dt_e}\right)^2\sin^2\theta}$$



θ er hornið milli hröðunarinnar og geislunarstefnunnar

Engin geislun í átt hröðunar

---

⑩

Notum $\int\frac{d\Omega}{4\pi}\sin^2\theta = \frac{2}{3}$

til að fá jöfnu Larmors fyrir heildar geislunar afli eindar

$$\boxed{P = \frac{2}{3}\frac{\mu e^2}{4\pi u}\left(\frac{d\bar v}{dt}\right)^2}$$ þ. $v << u$

$$\boxed{P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon u^3}\left(\frac{d\bar v}{dt}\right)^2}$$ $u^2 = \frac{1}{\epsilon\mu}$

þegar tillit er tekið til afstæðiskenningar beinist geislunin „fram á við" með vaxandi hraða eindarinnar.

---

①

Dotum

- * Við höfum reiknað geislun frá loftneti með því að gefa okkur straumdreifingu í því ← Geislunin verkar á straumdreifinguna. Við höfðum engar áhyggjur hvort orku flæði breyti straumdreifingu.
- * Við reiknum geislun frá hraðari eind ← eindin tapar orku og geislun hennar breytist eins og hröðunin

Getum við farið lengra í lýsingunni?
Er hægt að reikna þessi fyrirbæri sjálf-samkvæmt?

Svarið er já og nei!

- * Klassísk eðlisfræði ← CED
- * skammtafræði ← QED

Getum lýst vissum fyrirbærum, en rekumst á vandamál nærri „skammta-skala"

óhemju góð lýsing á dofnun í einföldu atómkerfi

Tengistuðull $\alpha = 1/137$ milli efnis og rafsegulsviðs er veikur

↓

Truflanareikningur

En viss vandamál erfast yfir til skammtafræðinnar

Mat á kvörðum

Eind með hleðslu e fær hröðun a á tímabili T

$$\to E_{rad} \sim \frac{e^2a^2}{6\pi\epsilon c^3}T$$

er geislaða orka frá henni.

Geislunaráhrif á eindina eru lítilvæg ef

$$E_{rad} \ll E_0$$

þar sem E_0 er mat á orku eindarinnar

Skoðum tvenns konar kerfi

Eind kyrr í upphafi

Eftir hröðunina $E_0 \sim m(aT)^2$

Ef

$$\frac{e^2a^2T}{6\pi\epsilon c^3} \ll ma^2T^2$$

þá eru áhrif geislunarinnar lítilvæg, eða

$$T \gg \frac{e^2}{6\pi\epsilon mc^3}$$

Skilgreinum náttúrulegan tímaskala

$$\tau = \frac{e^2}{6\pi\epsilon mc^3}$$

Ef $T \gg \tau$ þá eru áhrif geislunar lítil

léttust eind → langur τ

fyrir rafeind fæst

$$\tau = 6.26\cdot 10^{-24}\ \mathrm{s}$$

á því bili fer ljós $\sim 10^{-15}$ m!

Hreyfing eindar „lotubundin"

$$E_0 \sim m\omega_0^2 d^2$$

$$\to a \sim \omega_0^2 d, \quad T \sim \frac{1}{\omega_0}$$

$$E_{rad} \sim \frac{e^2\omega_0^4 d^2}{6\pi\epsilon c^3}\frac{1}{\omega_0} \ll m\omega_0^2 d^2 \sim E_0$$

$$\to \omega_0\tau \ll 1$$

Því gildir: Ef ekki verður mikil breyting á hreyfingu eindar á τ þá eru áhrif geislunar lítil á hreyfingu eindar

---

Hreyfijöfnur

Sígild eind

→ hreyfilýsing

$$m\dot{\bar{v}} = \bar{F}_{ext}$$

bætum við gagnkrafti geislunar

$$m\dot{\bar{v}} = \bar{F}_{ext} + \bar{F}_{rad}$$

$\bar{F}_{rad}$ verður að uppfylla

- * $\bar{F}_{rad} = 0$ ef $\dot{\bar{v}} = 0$
- * $\bar{F}_{rad} \sim e^2$ og formerki hleðslu getur ekki skipt máli
- * $\bar{F}_{rad}$ verður að innihalda τ, eini mikilvægi stikinn
- * Við þekkjum F_{rad} ekki fyrirfram því $\bar{a}$ er óþekkt.

Lotubundið kerfi

Reiknum $\bar{F}_{rad}$ m.þ.a. krefjast að vinna þessa krafts á tímabilinu $t_1 < t < t_2$ sé jöfn neikvæðri orkunni geislaðri í burtu

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_{rad} \cdot \bar{v}\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3} \dot{\bar{v}} \cdot \dot{\bar{v}}\, dt$$

$$= \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\bar{v}} \cdot \bar{v}\, dt - \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3} (\dot{\bar{v}} \cdot \bar{v}) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

fyrir lotubundið kerfi gæti $(\dot{\bar{v}} \cdot \bar{v}) = 0$ fyrir t_1 og t_2

$$\longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left(\bar{F}_{rad} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3} \ddot{\bar{v}} \right) \cdot \bar{v}\, dt = 0$$

Abraham-Lorentz hreyfijafnan

$$\longrightarrow \bar{F}_{rad} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3} \ddot{\bar{v}} = m\tau \ddot{\bar{v}}$$

og hreyfijafnan væri

$$\boxed{m(\dot{\bar{v}} - \tau \ddot{\bar{v}}) = \bar{F}_{ext}}$$

← mjög óvenjuleg tegund jöfnu

Skoðum lausnina þegar $\bar{F}_{ext} = 0$

$$\dot{\bar{v}}(t) = \begin{cases} 0 \\ \bar{a} e^{t/\tau} \end{cases}$$

þar sem $\bar{a}$ er hröðunin í $t=0$

Aðeins fyrri lausnin er eðlisfræðileg!

Umbreytum jöfnunni í heildisjöfnu með þeim upphafs-skilyrðum

Setjum $\dot{\bar{v}}(t) = e^{t/\tau} \bar{u}(t)$

þá gefur AL-jafnan $m\dot{\bar{u}} = -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \bar{F}_{ext}(t)$

$$\longrightarrow m\bar{u}(t) = -\frac{1}{\tau} \int_{C_1}^{t} dt'\, e^{-t'/\tau} \bar{F}_{ext}(t')$$

$$\longrightarrow m\dot{\bar{v}}(t) = \frac{e^{t/\tau}}{\tau} \int_{t}^{C_1} e^{-t'/\tau} \bar{F}_{ext}(t')\, dt'$$

C þarf að ákvarðast þ.a. út komi $m\dot{\bar{v}} = \bar{F}(t)$ þegar $e^2 \to 0$ það fæst þegar $C_1 \to \infty$

$$m\dot{\bar{v}}(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t}^{\infty} dt'\, e^{-(t'-t)/\tau} \bar{F}_{ext}(t')\, dt'$$

Breytuskipti $s = \frac{1}{\tau}(t'-t)$ gefa

$$m\dot{\bar{v}}(t) = \int_0^\infty e^{-s} \bar{F}_{ext}(t+\tau s)\, ds \qquad (**)$$

heildisafleiðujafna sést betur síðar

Gerum Taylor liðun

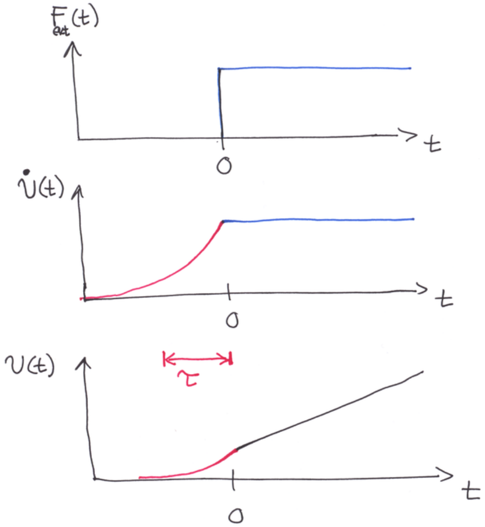
$$\bar{F}(t+\tau s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tau s)^n}{n!} \frac{d^n \bar{F}(t)}{dt^n}$$

Innsetning í (**) gefur

$$m\dot{\bar{v}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \frac{d^n \bar{F}(t)}{dt^n}$$

Markgildið $\tau \to 0$ skilur aðeins eftir $n=0$ liðinn og jöfnuna fyrir hreyfingu óhlaðinnar eindar Hinir liðir eru leiðréttingar vegna geislunar

Jafnan inniheldur óstaðbundin hrif for hröðun



Skoðum þessa jöfnu fyrir sveifil

$$k = m\omega_0^2$$

(**) verður þá

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \int_0^\infty e^{-s} x(t+\tau s)\,ds}$$

Greinilega heildis-afleiðujafna

Giskum á lausn

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t}$$

Innsetning gefur

$$x_0 e^{-\alpha t}\left\{\alpha^2 + \omega_0^2 \int_0^\infty e^{-(1+\alpha\tau)s} ds\right\} = 0$$

→ $\mathrm{Re}(1+\alpha\tau) > 0$, þá verður α að uppfylla

tekur í burtu vaxandi lausn og annars er heildið ekki til.

$$\tau\alpha^3 + \alpha^2 + \omega_0^2 = 0$$

Setjum $\omega_0\tau << 1$

$$\alpha = \frac{\Gamma}{2} \pm i(\omega_0 + \Delta\omega)$$

$$\Gamma = \omega_0^2\tau$$ ← dofnunartími (meðalævi)

$$\Delta\omega = -\frac{5}{8}\omega_0^3\tau^2$$ ← tíðni hliðrun

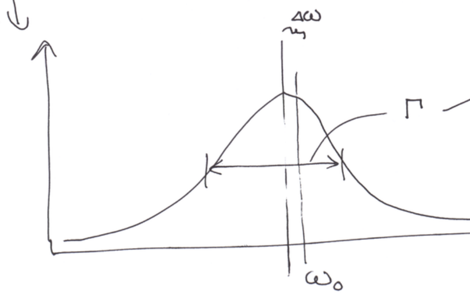
---

Geislunin verður „púls" með lengd $\frac{c}{\Gamma}$

$$E(\omega) \sim \int_0^\infty dt\, e^{-\alpha t} e^{i\omega t} = \frac{1}{\alpha - i\omega}$$

Geislaða orkan á tíðnieiningu er

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega} = I_0 \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega-\omega_0-\Delta\omega)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$



línubreidd

$$\Delta\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega_0^2}\Gamma$$

$$= 2\pi c\tau$$

universal sígild kerfi

Skammtaljósfræði

Takið eftir hvernig línubreidd og meðalævi eru reiknuð í skammtafræði

- * Wigner Weißkopf
- * Heitler-Ma . . . . . .

W. Heitler : „The Quantum theory of Radiation" (Dover)

IV-16 V-17,18

Dreifing

Dreifing (og bognun)

Margs konar aðferðafræði
fyrir mismunandi
hlutföll bylgjulengdar
λ og stærð árekstrarhlutar a

Skalar og vigur bognunar
lýsingar

Er árekstrarmiðjan hlaðin
eind eða breyting í ε og μ?

Eða flökt í þéttleika ρ eða
flökt í μ og ε .....

fjölskauta liðanir

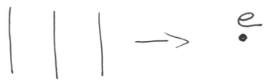
Hlutbylgjuliðun

Greenfalla framsetning

Skoðum mjög einföld
líkön hér.

Thomson dreifing

Ein hleðsla e með
massa m



Inn kemur flöt rafsegulbylgja
Rafsviðið hraðar eindinni

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = e\bar{E} \qquad \left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$$

Hraðaða eindin geislar
„dreifðri" bylgju með

afli

$$P_{sc} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3}(\dot{\bar{v}})^2 = \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3}\left(\frac{e}{m}\bar{E}\right)^2 = \frac{e^4}{6\pi\epsilon m^2c^3}\bar{E}^2$$

Þetta dreifða afl verður
að bera saman við
inn-aflið

$$|\bar{S}| = \frac{1}{\mu}|\bar{E}\times\bar{B}| = \frac{1}{\mu c}|\bar{E}|^2$$

Hlutfallið gefur
árekstrarþversniðið

$$\sigma = \frac{P_{sc}}{|\bar{S}|} = \frac{1}{6\pi\epsilon^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon mc^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}r_e^2 = \sigma_{Thompson}$$

þar sem r_0 er sígildi
„geisli" rafeindarinnar

$\rightarrow r_e = 2.8179\cdot 10^{-15}$ m

En hvernig dreifist geislunin
í mismunandi áttir?

um það bil sá geisli sem rafeindin
hefði ef massi hennar samsvarar
rafstöðuorku eindar með
fastan hleðsluþéttleika.

$$r_e = \alpha^2 a_0$$

þar sem a_0 er geisli Bohrs
og $\alpha \approx \frac{1}{137}$ er fínstrúktúrfastinn.

Horndreifing

Áður höfðum við fundið

$$\frac{dP_{sc}}{d\Omega} = \frac{\mu e^2}{(4\pi)^2 c}(\hat{n}\times\dot{\bar{v}})^2$$

$$= \frac{\mu e^4}{(4\pi)^2 m^2 c}(\hat{n}\times\bar{E})^2$$

$$= \frac{\mu e^4}{(4\pi)^2 m^2 c}E^2\left\{1-(\hat{n}\cdot\hat{\epsilon})^2\right\}$$

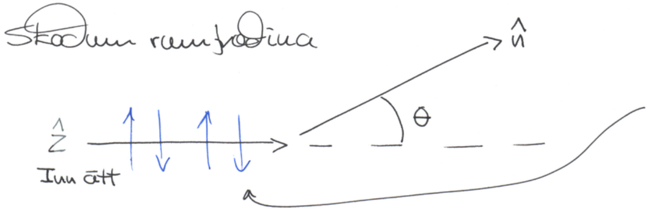
$\hat{n}$ frá markinu (eindinni)
í átt að athuganda

$\hat{\epsilon}$ er einingarvigur í
átt $\bar{E}$

Hluti $\bar{E}$ samsíða $\hat{n}$
er $(\hat{n}\cdot\hat{\epsilon})\hat{n}E$

→ hluti $\bar{E}$ þvert á $\hat{n}$
er $\bar{E} - (\hat{n}\cdot\hat{\epsilon})\hat{n}E$

Skoðum rúmfræðina



Ef $\bar{E}$ liggur í
dreifisléttu

⑤

Ef $\hat{\epsilon}$ er hornrétt á dreifisléttu

$$\rightarrow \hat{n}\cdot\hat{\epsilon} = 0$$

Ef $\hat{\epsilon}$ liggur í dreifisléttu

$$\rightarrow \hat{n}\cdot\hat{\epsilon} = \sin\theta$$

Engin dreifing hér ef $\theta = \pi/2$, endurspeglar það sem sást áður:

Engin geislun í átt hröðunar

$$\rightarrow 1-(\hat{n}\cdot\hat{\epsilon})^2 = \begin{cases} 1, & \text{ef } \hat{\epsilon} \perp \text{dreifisl.} \\ \cos^2\theta, & \text{ef } \hat{\epsilon} \parallel \text{dreifisl.} \end{cases}$$

Ef inngeislun er óskautuð þá fæst meðaltal þessara tveggja möguleika

$$1-(\hat{n}\cdot\hat{\epsilon})^2 \rightarrow \frac{1+\cos^2\theta}{2}$$

⑥

Afleiðu þversniðið (þversniðið) er

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{dP_{sc}}{d\Omega}}{|\bar{S}|}$$

$$= \frac{\mu e^4}{(4\pi)^2 m^2 c} E^2\left(\frac{1+\cos^2\theta}{2}\right)\frac{\mu c}{E^2} =$$

$$= \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon m c^2}\right)^2 \frac{1+\cos^2\theta}{2}$$

fyrir óskautaða inngeislun

og heildar Thompson þversniðið fæst aftur með heildun á þessari jöfnu yfir allt rúmhornið

⑦

Dreifing af bundinni rafeind

Rafeind, bundinni, er lýst sem dofnandi hreintóna sveifli

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt} + m\omega_0^2\bar{r} + m\gamma\frac{d\bar{r}}{dt} = e\bar{E}$$

Inn rafsvið bylgju er

$$\bar{E}(t) = \Re\, \bar{E}e^{-i\omega t} = \frac{1}{2}\left(\bar{E}e^{-i\omega t} + \bar{E}^* e^{i\omega t}\right)$$

færslu rafeindarinnar er þá lýst með

$$\bar{r}(t) = \frac{e}{m}\Re\left\{\frac{\bar{E}e^{-i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}\right\}$$

lausn á

⑧

því inniheldur

$$P_{sc} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3}(\ddot{\bar{r}})^2$$

$$\ddot{\bar{r}} = -\frac{e}{m}\Re\left\{\frac{\omega^2 E e^{-i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}\right\}$$

fyrir meðalgildið á almennri stærð

$$A(t) = \Re\, A e^{-i\omega t}$$

af öðru veldinu fæst

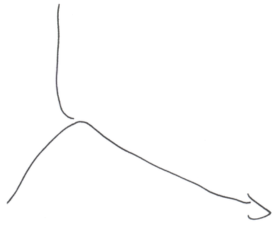
$$\{A^2(t)\}_{ave} = \frac{1}{2}|A|^2$$

$$\rightarrow \{P_{sc}\}_{ave} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3}\frac{1}{2}\frac{e^2\omega^4}{m^2}\frac{|E|^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}$$

Meðal innflæðið er

$$|S|_{ave} = \frac{1}{2\mu c}|\bar{E}|^2$$

$$\sigma = \frac{\{P_{sc}\}_{ave}}{\{|\bar{S}|\}_{ave}}$$



$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}$$

fyrir frjálsa eind $\omega_0=0,\ \gamma=0$ fæst

$$\sigma \to \sigma_{Thampson}$$

þegar $\omega \gg \omega_0, \gamma$

$$\sigma \to \sigma_{Thampson}$$

há tíðni umbylgju bundna eindin getur ekki fylgt henni í hreyfingum

þá yfirgnæfir tíma-skali bylgjunnar tímaskala kerfisins (eindarinnar)

þegar $\omega \ll \omega_0$

$$\sigma \to \sigma_{Thompson}\cdot\frac{\omega^4}{\omega_0^4}$$

Hér dreifast hæstu tíðnir mest. Ein af ástæðunum fyrir bláum himni

Rayleigh-dreifing

Hermudreifing $\omega=\omega_0$

$$\sigma \to \sigma_{Thompson}\,\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}$$

Getur orðið mjög stór fyrir litla deyfingu

Þá þarf líka að kanna aðrar frelsisgráður kerfisins sem taka við orku

---

Lítil rafsvarandi kúla

Áður höfum við litið á geislunarjöfnu Larmors

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3}\left(\frac{d\bar v}{dt}\right)^2$$

og fyrir litla rafsvarandi kúlu (eða annan hlut) með tvípólsvægi

$$\bar d(t) = \int d\bar r\ \bar r\, \rho(\bar r t)$$

fæst

$$P \simeq \frac{1}{6\pi\epsilon c^3}(\ddot{\bar d})^2$$

og einnig

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx \frac{\mu}{(4\pi)^2 c}(\hat n\times\ddot{\bar d})$$

í báðum tilfellum fyrir $\frac{v}{c}\ll 1$

fyrir meðalgildin fæst því (í tímalotubundnu sviði)

$$\{P_{rad}\}_{ave} = \frac{\omega^4}{6\pi\epsilon c^3}\{(\bar d)^2\}_{ave}$$

Við notuðum venjulega $\bar p$ fyrir tvístautsvægið

Fyrir rafsvarandi kúlu með geisla a í ytra rafsviði fæst (var í dæmi)

$$\bar d = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}a^3\bar E$$

þessi jafna er rétt fyrir tímaháð svið ef $\bar E$ breytist hægt á skala kúlunnar a, þ.e. ef

$$\frac{\lambda}{2\pi} \gg a$$

$$\{P_{rad}\}_{ave} = \frac{1}{6\pi\epsilon}\frac{\omega^4}{c^3}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}a^3\right)^2\{\bar E^2\}_{ave}$$

heildar árekstrarþversniðið er því

$$\boxed{\sigma = \frac{8\pi}{3}\frac{1}{\bar\lambda^4}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}a^3\right)^2}$$

$$\bar\lambda = \frac{\lambda}{2\pi},\qquad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

Hér var aftur eins og í síðasta fyrirlestri notað

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP/d\Omega}{|\bar S|}\qquad \{A^2\}_{ave} = \frac{1}{2}|A|^2$$

$$\sigma = \int\frac{d\sigma}{d\Omega}\,d\Omega$$

Aftur sést hér að

σ vex með ω^4

↑ langbylgjudreifing

Larmor jafnan hefur því verið notuð til þess að meta dreifingu í fjölda til fella

↑

nokkuð snjallt

Aðferð Schwingers

Við höfum aðeins skoðað dreifingu og geislun í tvískauts nálgun

Sígild dreifing, orkustig rafeindanna í markinu hafa ekki komið við sögu

Engin bognun skoðuð

Vigureiginleikar rafsegulsviðsins hafa lítið komið við sögu

Hvernig breytast $\bar{E}$ og $\bar{B}$?

Aðeins flóknari aðferð

Maxwellsjöfnur án ρ og $\bar{J}$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0 \qquad \bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = 0 \qquad \bar{\nabla}\times\bar{H} = \frac{\partial\bar{D}}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla^2\bar{D} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\bar{D}}{\partial t^2} = -\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times(\bar{D}-\epsilon_0\bar{E}) + \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\bar{\nabla}\times(\bar{B}-\mu_0\bar{H}) \quad (*)$$

nákvæm jafna þar sem ϵ_0 og μ_0 geta verið háð staðarhniti $\bar{r}$, á einhverju takmörkuðu svæði gildir því

$$\bar{D} \neq \epsilon_0\bar{E} \quad \text{og} \quad \bar{B} \neq \mu_0\bar{H}$$

árekstrar svæði

Hægri hliðin á (*) er því hverfandi nema á takmörkuðu svæði. Fyrir fasora fæst

$$(\nabla^2 + k^2)\bar{D} = \underline{-\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times(\bar{D}-\epsilon_0\bar{E}) - i\epsilon_0\omega\bar{\nabla}\times(\bar{B}-\mu_0\bar{H})}$$

og $k^2 = \mu_0\epsilon_0\omega^2$

Á því svæði þekkjum við hægri hliðina

Lausnin er þá

$$\bar{D} = \bar{D}^{(0)} + \frac{1}{4\pi}\int d\bar{x}'\,\frac{e^{ik|\bar{x}-\bar{x}'|}}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\left\{\begin{array}{l}\bar{\nabla}'\times\bar{\nabla}'\times(\bar{D}-\epsilon_0\bar{E}) \\ +i\epsilon_0\omega\bar{\nabla}'\times(\bar{B}-\mu_0\bar{H})\end{array}\right\}$$

Innbylgja í heildisjöfnunni

↑ gefin → reikna $\bar{D}$

Viljum fjarsvið

$$\bar{D} \to \bar{D}^{(0)} + \bar{A}_{sc}\frac{e^{\overbrace{ikr}^{\text{Kúlubylgja út}}}}{r}$$

$$\bar{A}_{sc} = \frac{1}{4\pi}\int d\bar{x}'\,e^{-ik\hat{n}\cdot\bar{x}'}\left\{\begin{array}{l}\bar{\nabla}'\times\bar{\nabla}'\times(\bar{D}-\epsilon_0\bar{E}) \\ +i\epsilon_0\omega\bar{\nabla}'\times(\bar{B}-\mu_0\bar{H})\end{array}\right\}$$

$$= \frac{k^2}{4\pi}\int d\bar{x}'\,e^{-ik\hat{n}\cdot\bar{x}'}\left\{\begin{array}{l}[\hat{n}\times(\bar{D}-\epsilon_0\bar{E})]\times\hat{n} \\ -\frac{\epsilon_0\omega}{k}\hat{n}\times(\bar{B}-\mu_0\bar{H})\end{array}\right\}$$

Segultvískaut

Raftvískaut

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\bar{\epsilon}^{*}\cdot\bar{A}_{sc}|^2}{|\bar{D}^{(0)}|^2}$$

$\bar{\epsilon}$ er skautunarvigur dreifða geislans

Nú er oft gert ráð fyrir því að

$$\bar{D}(\bar{x}) = \{\epsilon_0 + \delta\epsilon(\bar{x})\}\bar{E}(\bar{x})$$

$$\bar{B}(\bar{x}) = \{\mu_0 + \delta\mu(\bar{x})\}\bar{H}(\bar{x})$$

þar sem $\delta\epsilon$ og $\delta\mu$ eru smá saman borið við ϵ_0 og μ_0

Nálgun línulegrar svörunar + Born

Í heildinni er notað

$$\bar{D} - \epsilon_0\bar{E} = \delta\epsilon(x)\bar{E} \simeq \frac{\delta\epsilon(\bar{x})}{\epsilon_0}\bar{D}^{(0)}$$

$$\bar{B} - \mu_0\bar{H} = \delta\mu(x)\bar{H} \simeq \frac{\delta\mu(\bar{x})}{\mu_0}\bar{B}^{(0)}$$

Gefið

$$\bar{D}^{(0)}(\bar{x}) = \hat{\epsilon}_0 D_0 e^{ik\hat{n}_0\cdot\bar{x}}$$

$$\bar{B}^{(0)}(\bar{x}) = \eta_0 \hat{n}_0 \times \bar{D}^{(0)}(\bar{x})$$

1. Born nálgun

$$\frac{\bar{\epsilon}^*\cdot\bar{A}_{sc}^{(1)}}{D_0} = \frac{k^2}{4\pi}\int d\bar{x}\, e^{i\bar{q}\cdot\bar{x}}\left\{\bar{\epsilon}^*\cdot\bar{\epsilon}_0\frac{\delta\epsilon(\bar{x})}{\epsilon_0} + (\hat{n}\times\hat{\epsilon}^*)\cdot(\hat{n}_0\times\hat{\epsilon}_0)\frac{\delta\mu(\bar{x})}{\mu_0}\right\}$$

$$\bar{q} = k(\hat{n}_0 - \hat{n})$$

$$= k^2\frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0}(\bar{\epsilon}^*\cdot\bar{\epsilon}_0)\left\{\frac{\sin(qa) - qa\cos(qa)}{q^3}\right\}$$

Ef kúla með $\delta\epsilon$ fasta innan geisla a

$$\lim_{q\to 0}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Born} = k^4 a^6\left|\frac{\delta\epsilon}{3\epsilon_0}\right|^2|\bar{\epsilon}^*\cdot\bar{\epsilon}_0|^2$$

---

sem við höfðum með aðeins annari táknum fyrir Rayleigh dreifingu af rafsvarandi kúlu í langbylgjunálgun

á engan hátt einföld. . . .

Hér endum við þegar dreifingin er rétt að flækjast og verða athyglisverð

Hvað gerist fyrir styttri bylgjulengdir og flóknari lögun?

tengist líka efniseiginleikum