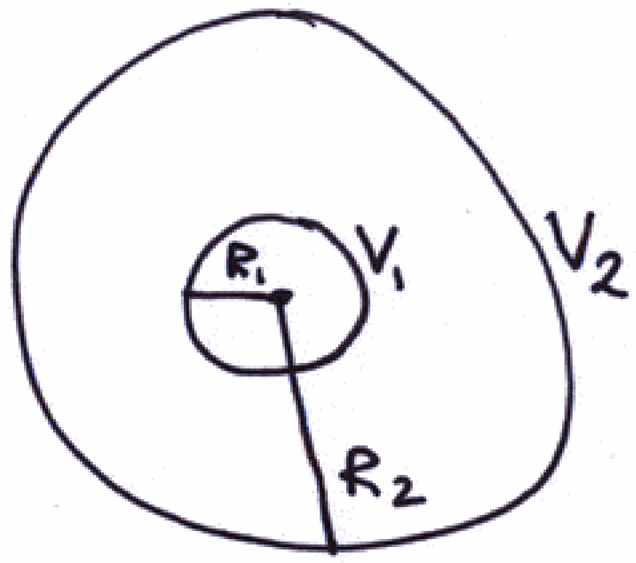
1 Sammiðja leiðandi kúlustelpjar



θ og φ - samhverfa gera mættið aðeins háð R

Val á mismunandi aðferðum.
Ég nota beina heildun

leita lausnar á bilinu $R_1 \leq R \leq R_2$, því er hvergi vandamál vegna $R = 0$

$$\nabla^2 V(R) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R}\right) = 0$$

leysum því

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dV}{dR}\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dV}{dR}\right) = 0$$

$$\rightarrow R^2\frac{dV}{dR} = C_1 \quad \text{eða} \quad \frac{dV}{dR} = \frac{C_1}{R^2}$$

$$\rightarrow \quad V(r) = -\frac{C_1}{R} + C_2$$

Nú þarf að uppfylla jaðarskilyrðin

$$V(R_1) = -\frac{C_1}{R_1} + C_2 = V_1$$

$$V(R_2) = -\frac{C_1}{R_2} + C_2 = V_2$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1} & 1 \\ -\frac{1}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} \quad , \quad C_2 = V_1 + \frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} \frac{1}{R_1}$$

$$= \frac{(V_1 - V_2) R_1 R_2}{R_1 - R_2} \quad , \quad = V_1 + \frac{(V_1 - V_2)}{R_1 - R_2} R_2 + V_1$$

Lausnin er því

$$V(R) = V_1 - \frac{(V_1 - V_2)}{(R_1 - R_2)}\left(\frac{R_1 R_2}{R} - R_2\right)$$

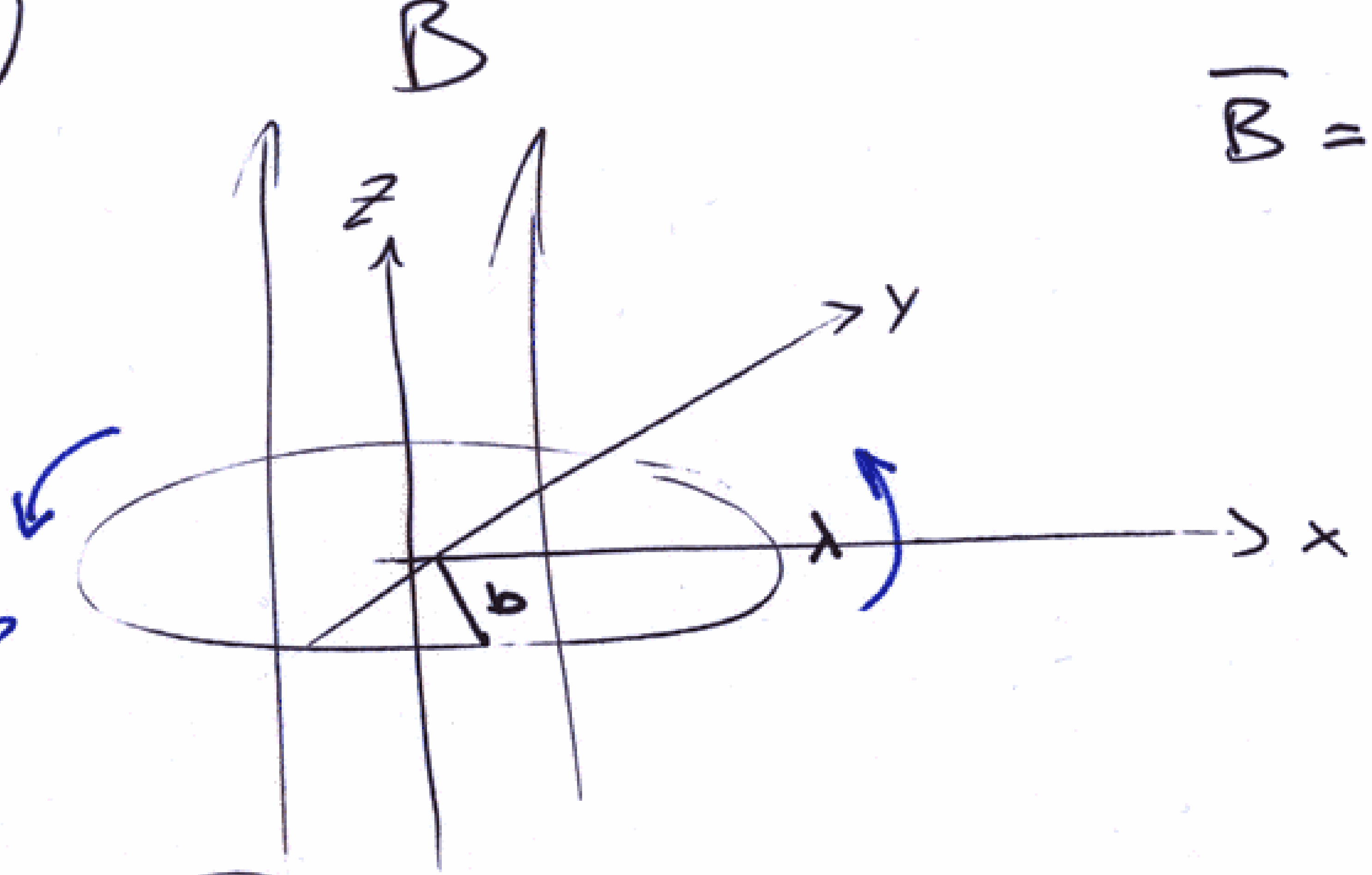
Sem greinilega gefur eftir sett jaðarskilyrði

$$V(R_1) = V_1$$
$$V(R_2) = V_2$$

og $$V(R) = -\frac{C_1}{R} + C_2$$

uppfyllir $\nabla^2 V = 0$ eins og bein innsetning sýnir

2



$\bar{B} = B\hat{z}$

Kyrrstætt, skyndilega er slökkt á $\bar{B}$

a) Hvað gerist samkvæmt

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

veldur tíma breyting B rafsviði sem liggur í hringi í kringum $\hat{z}$ (þ.e. í xy-sléttunni).

Rafsviðið verkar á hleðsluna og fær hjólið til að snúast.

Faraday-lögmálið má einnig skrifa sem

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = -\frac{d}{dt}\Phi_B$$

Lögmál Lenz segir að kerfið leitist við að viðhalda $\bar{B}$, það gerist með jákvæðum snúningi (andsælis séð ofan frá)

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\frac{d}{dt}\Phi_B = -\pi b^2 \frac{dB}{dt}$$

b)

Vægið á lengdarfrymið $d\bar{l}$ af hjólinu er

$$d\bar{\tau} = \bar{r}\times\bar{F} \qquad \text{í } \hat{z}\text{-stefnu hér}$$

$$|d\bar{\tau}| = d\tau = b\cdot E(\lambda dl)$$

$$\rightarrow \tau = b\lambda \oint \bar{E} d\bar{l} = b\lambda\left(-\pi b^2 \frac{dB}{dt}\right)$$

sem er <u>heildarvægið á hjólið.</u>

c) Heildar hverfiþunginn sem hjólið fær við

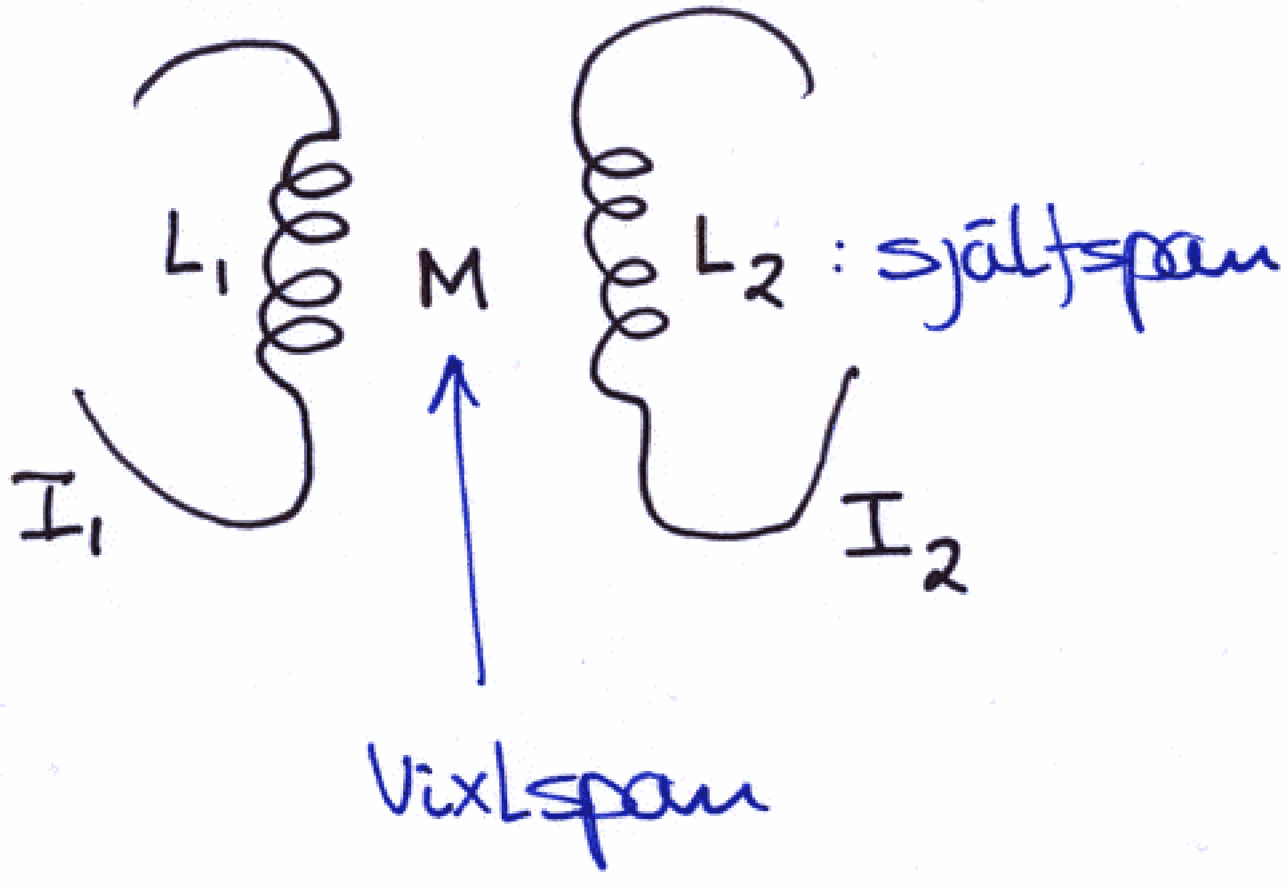
$$\Delta L = \int \tau \, dt = -\lambda \pi b^3 \int_B^0 dB' = \lambda \pi b^3 B$$

Sem er óháð því hvernig B breyttist með tíma!

d) Hvaðan kom hverfiþunginn?

Kerfið er ekki lokað, við höfum ekki sagt hvernig $\overline{B}$ var breytt, og við höfum ekki fjallað vel um það hvernig rafsegulsvið ber hverfiþunga.

3



Um orkuna í rásinni gildir

$$W = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

(sjá (6-161) í bók)

a)

$$W = I_2^2\left\{\frac{1}{2}L_1\left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2 + \frac{1}{2}L_2 + M\left(\frac{I_1}{I_2}\right)\right\}$$

$$= I_2^2\left\{\frac{1}{2}L_1 x^2 + \frac{1}{2}L_2 + Mx\right\}, \quad \text{með} \quad x = \frac{I_1}{I_2}$$

hugsum okkur nú að breyta hlutfallinu $x = \frac{I_1}{I_2}$
þ.a. I_2 sé fast en I_1 sé breytt

$$\frac{dW}{dx} = I_2^2 \left\{ L_1 x + M \right\} = 0 \longrightarrow x = -\frac{M}{L_1}$$ gefur útgildi fyrir W

$$\frac{d^2W}{dx^2} = I_2^2 L_1 > 0 \longrightarrow \boxed{x = \frac{I_1}{I_2} = -\frac{M}{L_1}}$$

gefur lággildi fyrir W

b) Athugum

$$W^{min} = I_2^2 \left\{ \frac{1}{2} L_1 \left(\frac{M}{L_1}\right)^2 + \frac{1}{2} L_2 - M \frac{M}{L_1} \right\} = I_2^2 \left\{ -\frac{M^2}{2L_1} + \frac{L_2}{2} \right\}$$

Nú verður $W^{min} \geq 0$

$$\boxed{M \leq \sqrt{L_1 L_2}}$$

Almennt í svona rásum

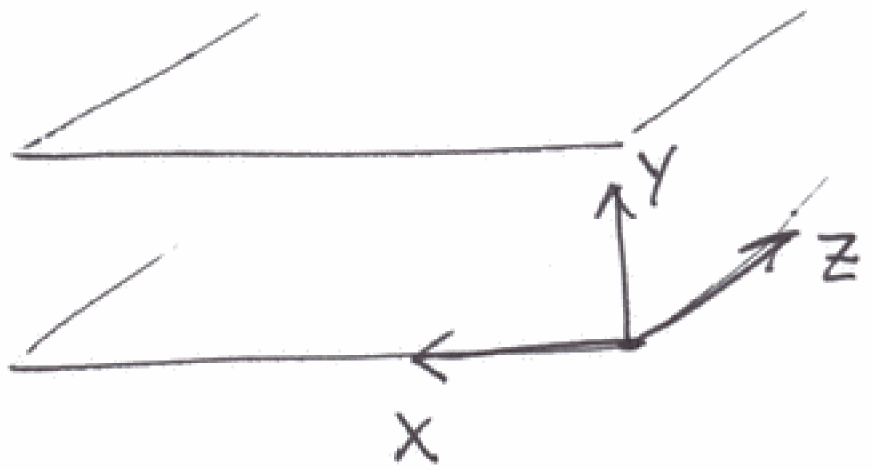
P10-7

u_{EN} fyrir TE_n í taplausum stokki milli samsíða plata

$\gamma = i\beta$

Bera saman við Ex. 10-6 fyrir TM_n

sviðin eru gefin í (10-83, 85)



$$H_z^0(y) = B_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$H_y^0(y) = \frac{\gamma}{h} B_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$E_x^0(y) = \frac{i\omega\mu}{h} B_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\overline{\mathcal{P}}_{ave} = \frac{1}{2}\mathcal{Re}\left(\overline{E}\times\overline{H}^*\right) = \frac{1}{2}\mathcal{Re}\left(\hat{a}_z E_x^0 H_y^{0*} - \hat{a}_y E_x H_z^{0*}\right)$$

$$\overline{\mathcal{P}}_{ave} \cdot \hat{a}_z = \frac{1}{2} \mathcal{Re}\left(E_x^0 H_y^{0*}\right) = \frac{\omega\mu\beta}{2h^2} B_n^2 \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$(P_z)_{ave} = \int_0^b \overline{\mathcal{P}}_{ave} \cdot \hat{a}_z \, dy = \frac{\omega\mu\beta b}{4h^2} B_n^2$$ á lengdareiningu í x-átt

Orkuþéttleiki

$$(w_e)_{ave} = \frac{\epsilon}{4} \mathcal{Re}\left(\overline{E}^0 \cdot \overline{E}^{0*}\right) = \frac{\epsilon\omega^2\mu^2}{4h^2} B_n^2 \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$(W_e)_{ave} = \int_0^b (w_e)_{ave} \, dy = \frac{\epsilon\omega^2\mu^2 b}{8h^2} B_n^2 \leftarrow$$ og sama fæst fyrir $(W_m)_{ave}$

$$u_{en} = \frac{(P_z)_{ave}}{(W_e)_{ave} + (W_m)_{ave}} = \frac{\omega\mu\beta b}{\epsilon\omega^2\mu^2 b} = \frac{\beta}{\epsilon\mu\omega} = \frac{\omega\beta}{\epsilon\mu\omega^2}$$

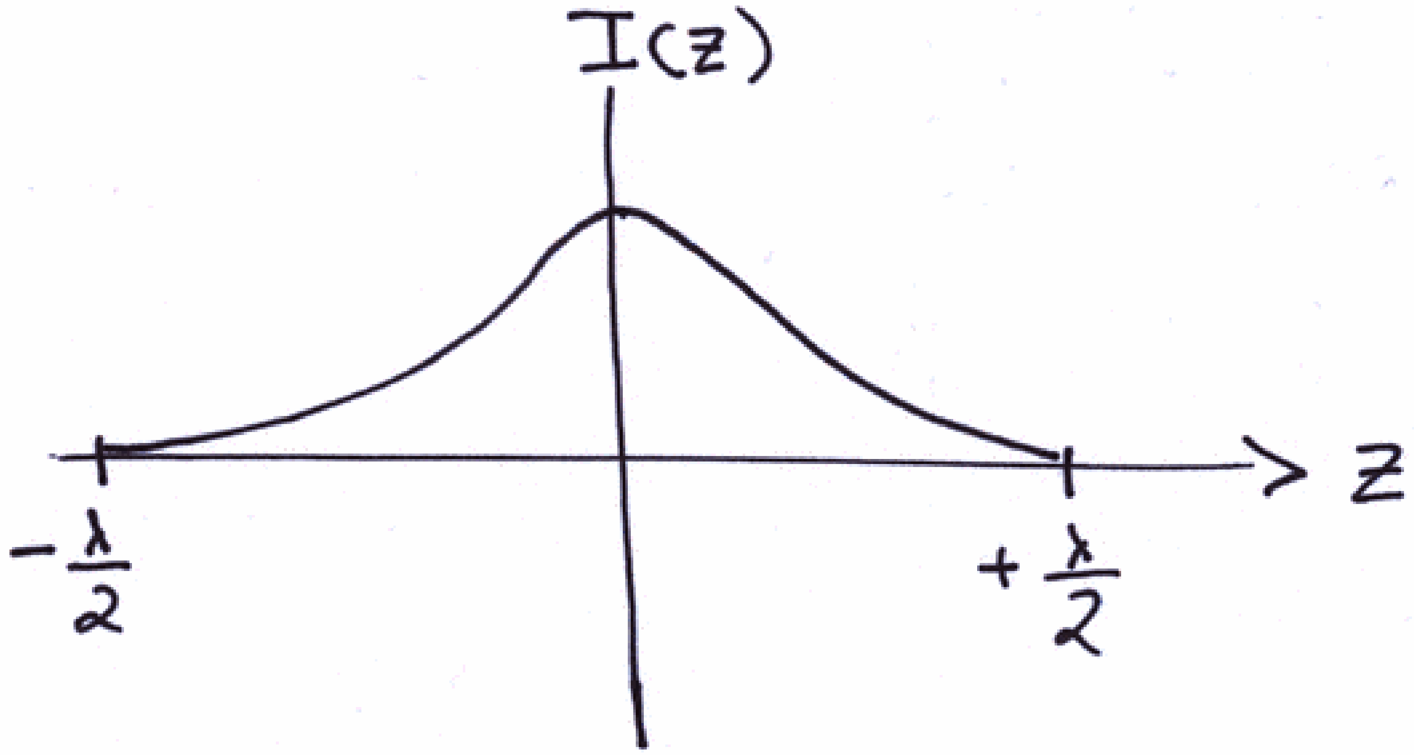
$$k^2 = \omega^2\mu\epsilon$$

$$= \frac{\omega\beta}{k^2} = u\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$ sama og fyrir TM

5 hálfbylgju tvískaut

a)

$$I(z) = I_0 \cos(\beta z) \quad , \quad \beta = \omega/c = 2\pi/\lambda$$



Samfelldni jafnan

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{J} = -i\omega\rho$$

$$\rho_l = \frac{i}{\omega} \frac{dI(z)}{dz}$$

$$I(z) = I_0 \cos(\beta z)$$

$$\rho_l = -i \frac{\beta}{\omega} I_0 \sin(\beta z)$$

$$= -i \frac{I_0}{c} \sin(\beta z)$$

b) En ef $\quad I(z) = I_0\left(1 - \frac{4}{\lambda}|z|\right)$

$$\longrightarrow \rho_\ell = \begin{cases} -i\,\dfrac{2I_0}{\pi c} & z > 0 \\ \\ +i\,\dfrac{2I_0}{\pi c} & z < 0 \end{cases}$$