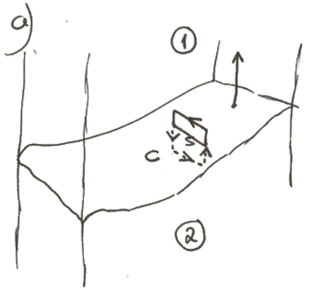
1 a)



Skilflötur tvenns konar efnis (1 og 2)

Rafstöðufræði $\overline{\nabla}\times\overline{E} = 0$

Rafsegulfræði $\overline{\nabla}\times\overline{E} = -\partial_t \overline{B}$

setjum lykkju C með yfirborð S þvert á skilflötinn

$\overline{\nabla}\times\overline{E} = 0$ heildum yfir S $\rightarrow$ $\int_S (\overline{\nabla}\times\overline{E})\cdot d\overline{s} = \oint_C \overline{E}\cdot d\overline{l} = 0$

látum hliðar C þvert á yfirborðið stefna á 0

þá fæst að $E_t^{(1)} = E_t^{(2)}$ svo heildið verði 0

$\overline{\nabla}\times\overline{E} = -\partial_t \overline{B}$ $\quad \int_S (\overline{\nabla}\times\overline{E})\cdot d\overline{s} = -d_t \int_S \overline{B}\cdot d\overline{s} = -d_t \Phi_B$

eða

$$\oint_C \overline{E}\cdot d\overline{l} = -d_t \Phi_B$$

þegar við látum hliðar S þvert á skilflöt stefna á lengd 0 fæst að $\Phi_B = 0$ ef engin sérstaða er í B þar

$\rightarrow$ aftur fáum við $E_t^{(1)} = E_t^{(2)}$

---

b) Önnur seinkaða lausnin er

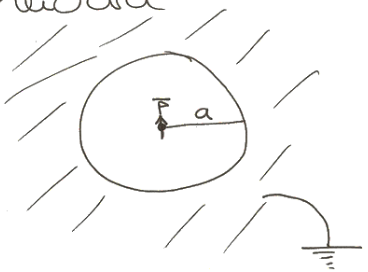
$$V(\bar{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int d\bar{r}' \, \frac{\rho\left(\bar{r}', t - \frac{|\bar{r}-\bar{r}'|}{u}\right)}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$$

Heildunin er yfir uppsprettuna ρ þar sem hún er ekki hverfandi þar gildir að $u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ þ.e. útbreiðslu-

hraðinn um uppsprettuna u er háður eiginleikum efnisins. Við gerðum ráð fyrir að í öllu rúminu væri sama ϵ og μ þegar lausnin var fundin. Í heildinu er einmitt seinkaði tíminn $t - \frac{|\bar{r}-\bar{r}'|}{u}$. Seinkunin er því háð eiginleikum rúmsins hér alls staðar í gegnum ϵ og μ.

---

2) Örsmátt tvískaut með vægi $\bar{p} = p_0 \hat{a}_z$ í miðju kúlulaga holrými í stórum jarðbundnum kjörleiðara



a) Jaðarskilyrði

Á vegg holsins verður að gilda $V(a,\phi,\theta) = 0$

Innan holsins í miðju þess verður mættið að hafa sömu sérstöðu og rafsvið tvískauts í óendanlegu rúmi. Nærri miðjunni verður því að gilda

$$V = \frac{\bar{p}\cdot\bar{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{p_0\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

---

b) Finnum rafstöðumættið, þurfum að leysa $\nabla^2 V = 0$ með þessum jaðarskilyrðum.

Almenna lausnin fyrir aðgreinanleg mætti er

$$V(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_n R^n + B_n R^{-(n+1)}\right\} P_n(\cos\theta)$$

Við gerum ráð fyrir ϕ-samhverfu því jaðarskilyrðið í miðju holsins er ϕ-samhverft.

Vegna jaðarskilyrðisins í miðjunni eru $n=1$ liðir aðeins mögulegir í lausninni

$$V(R,\theta) = \left\{A_1 R + \frac{B_1}{R^2}\right\}\cos\theta$$

Jaðarskilyrði fyrir $R\sim 0$ $\rightarrow$ $B_1 = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0}$

$$\hookrightarrow \quad V(R,\theta) = \left\{A_1 R + \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 R^2}\right\}\cos\theta$$

Síðan er fyrir vegg holsins $V(a,\theta)=0$

$$\hookrightarrow \quad \left\{A_1 a + \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 a^2}\right\} = 0 \rightarrow A_1 = -\frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

því fæst

$$V(R,\theta) = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left\{\left(\frac{a}{R}\right)^2 - \frac{R}{a}\right\}\cos\theta$$

sem greinilega uppfyllir bæði jaðarskilyrði.

c) yfirborðshleðsla veggs holrúmsins.

$$\hat{a}_{n2}\cdot(\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s$$

$$\rightarrow -\hat{a}_R\cdot(\epsilon_0\bar{E})\Big|_{R=a} = \rho_s$$

$$\bar{E} = -\bar{\nabla}V = -\hat{a}_R\frac{\partial}{\partial R}V(R,\theta) - \hat{a}_\theta\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}V(R,\theta)$$

$$-\hat{a}_R\cdot\bar{E} = \frac{\partial}{\partial R}V(R,\theta) = -\frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 a^3}\left\{1 + 2\left(\frac{a}{R}\right)^3\right\}\cos\theta$$

$$\rightarrow \boxed{\rho_s(\theta) = -\frac{3p_0}{4\pi a^3}\cos\theta}$$

d) Pólhornið $\theta\in[0,\pi]$ $\rightarrow$ $\cos\theta$ er oddstætt fall á þessu bili. Heildarhleðslan er 0, rétt eins og gildir fyrir tvískautið í miðju holsins.

e) Tvískautsvægi hleðslunnar?

Almennt séð er tvískautsvægi hleðsludreifingar

$$\bar{p} = \int dx^3\,\rho(\bar{x})\,\bar{x}$$

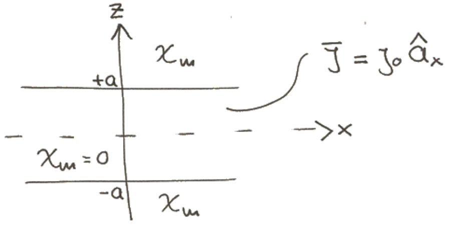
Við sjáum að hleðslan er óháð ϕ $\rightarrow$ hún getur ekki haft x- og y-þátt í kartískum hnitum. Hún gæti haft z-þátt

$$p_z = \int dx^3\,\rho(x)\,z = a^2\int d\Omega\,\rho_s(\theta)\,a\cos\theta$$

$$= 2\pi a^2\int_{-1}^{1} d\cos\theta\left\{-\frac{3p_0\cos\theta}{4\pi a^3}\right\}a\cos\theta$$

$$= -\frac{3}{2}p_0\int_{-1}^{1} du\,u^2 = -p_0 \quad\rightarrow\quad \bar{p} = -\hat{a}_z p_0$$

Sem er andstæða tvískautsvægið miðað við það í miðju holsins. Það speglast í yfirborðinu.



Ég vil beita lögmáli Ampères

$$\oint_C \overline{H} \cdot d\overline{l} = I$$

en vil hafa stuðning af

$$\overline{A}(\overline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} d^3 r' \frac{\overline{J}(\overline{r}')}{|\overline{r} - \overline{r}'|}$$

til að sjá að $\overline{A}$ og $\overline{J}$ eru samsíða

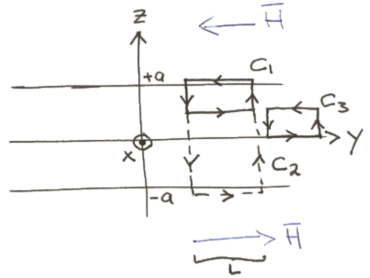
$\overline{A}$ er því með x-hnit A_x

$$\rightarrow \overline{B} = \overline{\nabla} \times \overline{A} = \hat{a}_y \frac{\partial A_x}{\partial z}$$

er með y-hnit. $\overline{B}$ liggur þvert á strauminn

Fyrir utan leiðarann legg ég lykkju í y-z-sléttu. Í gegnum hana er aldrei neinn straumur óháð lögun og staðsetningu

↳ $\boxed{\overline{H} \text{ er fasti utan leiðara}}$



Ef við notum leið C_2 af mynd sést að $\overline{H}$ verður að hafa andstæðar áttir ofan og neðan leiðara

$$\oint_{C_2} \overline{H} \cdot d\overline{l} = I$$

$$2H \cdot L = J_0 \cdot 2a \cdot L$$

$$\rightarrow \boxed{H = J_0 a \quad \text{utan leiðara}}$$

Ofan leiðara: $\overline{H} = -\hat{a}_y J_0 a$

Neðan leiðara: $\overline{H} = +\hat{a}_y J_0 a$

$\overline{H}$ verður að vera andsamhverft um $z = 0$. Notum því C_3 til að reikna $\overline{H}$ innan leiðara

$$\oint_{C_3} \overline{H} \cdot d\overline{l} = I_{enc}$$

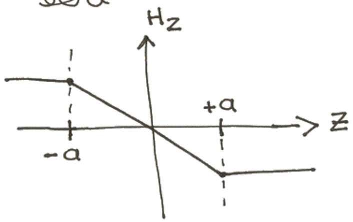
$$H(z) \cdot L = J_0 \cdot L \cdot z \quad , \quad z > 0$$

$$\hookrightarrow H(z) = J_0 z$$

því fast innan leiðara

$$\overline{H} = -\hat{a}_y (J_0 z)$$

eða



Innan leiðara er $\chi_m = 0$

$$\rightarrow \overline{B} = \mu_0 \overline{H}$$

$$\overline{M} = 0$$

$$\overline{B} = -\hat{a}_y (\mu_0 J_0 z)$$

Utan leiðara er $\chi_m \neq 0$

þar er $\overline{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \overline{H}$

Eins gildir $\overline{H} = \frac{\overline{B}}{\mu_0} - \overline{M}$

eða $\overline{M} = \frac{\overline{B}}{\mu_0} - \overline{H}$

$$= \{(1 + \chi_m) - 1\} \overline{H}$$

$$= \chi_m \overline{H}$$

Ofan leiðara

$$\overline{M} = -\hat{a}_y \chi_m J_0 a$$

$$\overline{B} = -\hat{a}_y \mu_0 (1 + \chi_m) J_0 a$$

Neðan leiðara

$$\overline{M} = +\hat{a}_y \chi_m J_0 a$$

$$\overline{B} = +\hat{a}_y \mu_0 (1 + \chi_m) J_0 a$$

Jafngildisstraumar

Hvergi eru hol jafngildisstraumar því

$$\overline{J}_m = \overline{\nabla} \times \overline{M} = 0$$

en

$$\overline{J}_{ms} = \overline{M} \times \hat{a}_n$$

Ofan á leiðara

$$\hat{a}_n = \hat{a}_z$$

$$\rightarrow \overline{J}_{ms} = -\hat{a}_y \times \hat{a}_z \chi_m J_0 a$$

$$= -\hat{a}_x \chi_m J_0 a$$

Neðan á leiðara

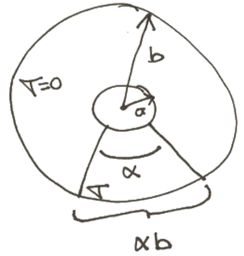
$$\hat{a}_n = -\hat{a}_z$$

$$\rightarrow \overline{J}_{ms} = -\hat{a}_y \times \hat{a}_z \chi_m J_0 a$$

$$= -\hat{a}_x \chi_m J_0 a$$

Jafngildisstraumarnir eru á báðum yfirborðum andstæðir við hol frjálsa strauminn.

④ samása kapall



Genum ráð fyrir straumi I um sneiðina þéttleikinn verður þá

$$J = \frac{I}{\alpha r L} \qquad L \text{ lengd kapals}$$

í stefnu $+\hat{a}_r$ eða $-\hat{a}_r$

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} \;\rightarrow\; \bar{E} = \frac{\bar{J}}{\sigma} = \frac{I}{\alpha r \sigma L}\{\pm \hat{a}_r\}$$

Spennumunurinn er þá

$$V_0 = -\int_b^a \bar{E}\cdot d\bar{l} = \pm \int_b^a \frac{I\,dr}{\alpha r \sigma L} = \pm \frac{I}{\alpha \sigma L}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\rightarrow G = \left|\frac{I}{V_0}\right| = \frac{\alpha \sigma L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \;\rightarrow\; \boxed{\frac{G}{L} = \frac{\alpha\sigma}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

⑤ Segultvískaut í x-y-sléttu

$$\bar{A} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 m}{4\pi R^2}\sin\theta, \qquad \bar{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}\left\{\hat{a}_R 2\cos\theta + \hat{a}_\theta \sin\theta\right\}$$

$m = I\pi b^2$, $\quad \bar{m} = I\bar{s}$ ← $\bar{s}$ er vigur þvert á flöt ② með lengd „flatar" ②

$$\hookrightarrow \quad \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi R^2}\,\bar{m}\times\hat{a}_R$$

a) Finnum

$$\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\bar{\nabla}\times\left(\frac{\bar{m}}{R^2}\times\hat{a}_R\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{\bar{m}}{R^2}\left(\bar{\nabla}\cdot\hat{a}_R\right) - \hat{a}_R\left(\bar{\nabla}\cdot\left(\frac{\bar{m}}{R^2}\right)\right) + \left(\hat{a}_R\cdot\bar{\nabla}\right)\frac{\bar{m}}{R^2} - \left(\frac{\bar{m}}{R^2}\cdot\bar{\nabla}\right)\hat{a}_R\right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{\bar{m}}{R^2}\frac{2}{R} - \hat{a}_R\left[\bar{m}\cdot\bar{\nabla}\left(\frac{1}{R^2}\right) + \frac{1}{R^2}\bar{\nabla}\cdot\bar{m}\right] + \bar{m}\,\partial_R\left(\frac{1}{R^2}\right) - \frac{1}{R}\left[\frac{\bar{m}}{R^2} - \hat{a}_R\left(\frac{\bar{m}}{R^2}\cdot\hat{a}_R\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi R^3}\left\{3\left(\bar{m}\cdot\hat{a}_R\right)\hat{a}_R - \bar{m}\right\}$$

b)

Flæði segulflæðisviðs frá ① í gegnum lykkju ② er

$$\Phi_2 = \bar{B}_1\cdot\bar{s}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi R^3}\left\{3\left(\bar{m}_1\cdot\hat{a}_R\right)\left(\hat{a}_R\cdot\bar{s}_2\right) - \bar{m}\cdot\bar{s}_2\right\}$$

en $\bar{m}_1 = I_1\bar{s}_1$

$$\rightarrow \Phi_2 = \bar{B}_1\cdot\bar{s}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi R^3}\left\{3\left(\bar{s}_1\cdot\hat{a}_R\right)\left(\bar{s}_2\cdot\hat{a}_R\right) - \bar{s}_1\cdot\bar{s}_2\right\}$$

$$= M I_1$$

$$\rightarrow M = \frac{\mu_0}{4\pi R^3}\left\{3\left(\bar{s}_1\cdot\hat{a}_R\right)\left(\bar{s}_2\cdot\hat{a}_R\right) - \bar{s}_1\cdot\bar{s}_2\right\}$$