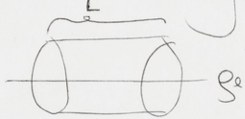
① línuhleðsla ρ_ℓ í fjarlægð d frá leiðandi sléttu ①

Fyrst línuhleðsla og ekkert annað nærri



Gauß-lögmál, samhverfa $\rightarrow$ $\bar{E} \sim \hat{a}_r$, ekkert flæði um endafleti Gauß-yfirborðs

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$L \cdot 2\pi r \, E_r = \frac{\rho_\ell L}{\epsilon_0}$$

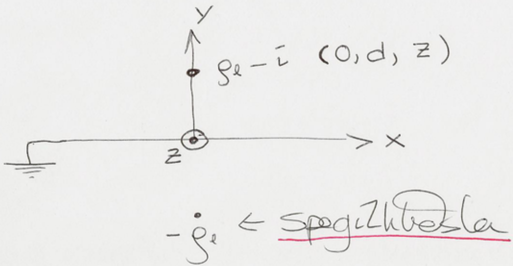
$$\rightarrow \boxed{\bar{E} = \hat{a}_r \frac{\rho_\ell}{2\pi \epsilon_0 r}}$$

$$\boxed{V(r) = -\int_{r_0}^{r} E_r \, dr = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)}$$

r_0 er einhver viðmiðunarpunktur með $V(r_0) = 0$

Leiðandi slétta í z-x-sléttu

Rafsviðið, mættið og hleðsludreifingin eru öll einsleit í z-átt



Notum spegilhleðslu
Rafstöðumættið fyrir $y > 0$ er þá

$$r_+ = \sqrt{x^2 + (y-d)^2}$$

$$r_- = \sqrt{x^2 + (y+d)^2}$$

Viðmiðunarpunktarnir féllu út

a) Rafstöðumættið er þá

$$\boxed{V(x,y) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\left\{\ln\left(\frac{r_0}{r_+}\right) - \ln\left(\frac{r_0}{r_-}\right)\right\} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right)}$$

b)

$$V(x,y) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+(y+d)^2}{x^2+(y-d)^2}\right)$$

$$\bar{E} = -\bar{\nabla} V$$

$$= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0\left\{x^2+(y+d)^2\right\}}\left[\hat{a}_x\, 2x\left\{\frac{(x^2+(y+d)^2)}{(x^2+(y-d)^2)} - 1\right\} + \hat{a}_y\left\{\frac{(x^2+(y+d)^2)}{(x^2+(y-d)^2)}2(y-d) - 2(y+d)\right\}\right]$$

þvi sést t.d. að

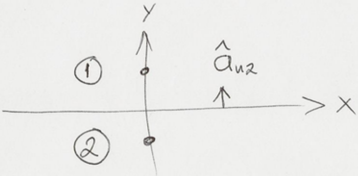
$$\bar{E}(x,0) = \frac{-\rho_l}{\pi\epsilon_0}\,\frac{d}{(x^2+d^2)}\,\hat{a}_y$$

hornrétt á leiðarann, eins og verður að vera og með stefnu í $-\hat{a}_y$-átt

c) Alment gildir

$$\hat{a}_{n2} \cdot (\overline{D}_1 - \overline{D}_2) = \rho_s$$

setjum hér



$$\rightarrow \hat{a}_{n2} = \hat{a}_y$$

$$\hat{a}_y \cdot \overline{D}_1 = \rho_s$$

$$\epsilon_0 \hat{a}_y \cdot \overline{E}(x,0) = \rho_s(x)$$

því fæst

$$\boxed{\rho_s(x) = -\frac{\rho_\ell}{\pi} \frac{d}{(x^2+d^2)}}$$

$\rho_\ell d$ er við vídd hleðslu

því er ρ_s við vídd hleðslu

á flöt eins og á at vera

mest hleðslan nærri línuhleðslu

þegar $x = 0$

d) $$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_s(x)\,dx = -\frac{\rho_\ell d}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+d^2)} = -\rho_\ell$$

þannig að leiðarhleðsla flatarins er $-\rho_\ell \cdot L$

þ.s. L er lengd hans í z-átt, leiðarhleðsla vírsins var $\rho_\ell \cdot L$

(2)

$$j(r) = j_0 \cos\left(\frac{\pi r}{2a}\right)$$

straumþéttleiki í vír ~~með~~ geisla a

a) Finna I

$$I = \int d\bar{s}\cdot\bar{j} = \int ds\, j = 2\pi \int_0^a r\,dr\, j(r)$$

$$= 2\pi j_0 \int_0^a r\,dr \cos\left(\frac{\pi r}{2a}\right) = 2\pi j_0 a^2 \int_0^1 x\,dx \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$= 2\pi j_0 a^2 \left\{\frac{2\pi - 4}{\pi^2}\right\} = \underbrace{j_0 a^2}_{\text{rétt vídd}} \cdot 4\left\{\frac{\pi - 2}{\pi}\right\}$$

b) B utan leiðara

Segulflæðisviðið er með flæðilínur sammiðja leiðaranum, $\sim \hat{a}_\phi$

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I$$

$$2\pi r B = \mu_0 I$$

$$\rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j_0 a^2}{r} \cdot 2\left\{\frac{\pi - 2}{\pi^2}\right\} \qquad r \geq a}$$

c) B innan leiðara

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I_{encl}(r)$$

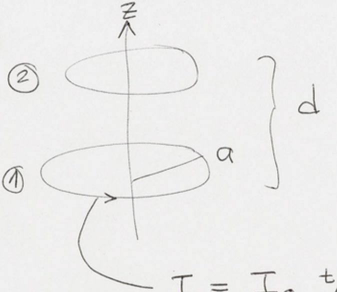
$$I_{encl}(r) = 2\pi \int_0^r r' dr' \, j(r') = 2\pi j_0 a^2 \int_0^{r/a} x \, dx \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$= \frac{2\pi j_0 a^2}{\pi^2} \left\{ 2\pi \left(\frac{r}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi r}{2a}\right) + 4 \cos\left(\frac{\pi r}{2a}\right) - 4 \right\}$$

$$2\pi r B = \mu_0 I_{encl}(r)$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} B(r) &= \frac{\mu_0 I_{encl}(r)}{2\pi r} \\ &= 2 \frac{j_0 a^2 \mu_0}{\pi^2 r} \left\{ \frac{\pi r}{a} \sin\left(\frac{\pi r}{2a}\right) + 2 \left[\cos\left(\frac{\pi r}{2a}\right) - 1 \right] \right\} \end{aligned}}$$

3



$d >> a$

$I = I_0 \, t/\tau$ (ég vel straum stefnu)

a) Segulvægi neðri hrings

$$m_1 = I_1 \pi a^2 = I_0 \frac{t}{\tau} \pi a^2$$

$$\boxed{\bar{m}_1(t) = \hat{a}_z \, I_0 \frac{t}{\tau} \pi a^2}$$

b) Segulflæðið um 2 (sé meðal leyst í bók)

$$\bar{A}_{12} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I_0 \pi a^2 \frac{t}{\tau} a}{4(d^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\rightarrow \boxed{\Phi_{12} = \oint_{C_2} \bar{A}_{12} \cdot d\bar{l}_2 = \frac{\mu_0 I_0 \pi \frac{t}{\tau} a^4}{2(d^2+a^2)^{3/2}}}$$

c) Ispenna í efri hring

$$v_2 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt}$$

$$\boxed{v_2 = -\frac{\mu_0 I_0 \pi \frac{1}{\tau} a^4}{2(d^2+a^2)^{3/2}}}$$

í öfuga átt við hring 1

setur strauminn í öfuga átt í $-\hat{a}_\phi$ stefnu

Til þess að reikna strauminn í ② þurfum við viðnámið í hringnum, köllum það R

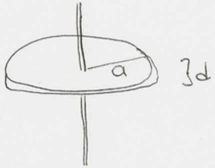
sjálfspani er sleppt hér

$$\boxed{i_2 = -\hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I_0 \pi \frac{1}{\tau} a^4}{2(d^2+a^2)^{3/2}} \frac{1}{R}}$$

---

d) Ef við leyfum okkur quasi-static sjónarhól hér og notum (6-221) með strauma í öfugar áttir fæst <u>fráhrindikraftur</u>

4



$$I(t) = I\cos(\omega t)$$

$d \ll a$ ← sleppum jaðarhrifum

$\hat{\phi}$ - samhverfa í sívalningshnitum

Gerum ráð fyrir $\bar{E}(r,z) = E(r,z)\,\hat{a}_z$

$$\bar{B}(r,z) = B(r,z)\,\hat{a}_\phi$$

Tímaóháða lausnin er $\bar{E} = E\,\hat{a}_z$. Hér sjáum við að hún er nálgun

<u>Milli platna</u>

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0 \qquad \bar{\nabla}\times\bar{E} + i\omega\bar{B} = 0 \quad (1)$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0 \qquad \bar{\nabla}\times\bar{B} - i\underbrace{\omega\epsilon\mu}_{=\frac{\omega}{c^2}}\bar{E} = 0 \quad (2)$$

<u>sivalungshnit</u>

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} B(r,z) = 0}$$ i

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial z} E(r,z) = 0}$$ ii

$$1 \longrightarrow \boxed{-\frac{\partial}{\partial r} E(r,z) + i\omega B(r,z) = 0}$$ iii

$$2 \longrightarrow \boxed{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r B(r,z) \right\} - \frac{i\omega}{c^2} E(r,z) = 0}$$ iv

þessar 4 jøfnur sýna at B og E eru
einungis háð hnitinum „r"

→ við fáum 2 tengdar jøfnur iii og iv
fyrir E og B, setjum saman í eina

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}E(r)\right\} + \frac{\omega^2}{c^2}E(r) = 0}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2}$$

Athyglisvert at þetta er bylgjujøfn

Við gótum tí sagt at
þegar $\omega \to 0$ fáum
við quasi-statisku loysnina

skoðum víddargreiningu fyrir liðinn er það vídd

$E \cdot \frac{1}{L^2}$ notum einkennislengd kerfisins hér

„a"

Við þurfum að bera saman $\frac{1}{a^2}$ og $\frac{(2\pi)^2}{\lambda^2}$

eða $\frac{1}{a}$ og $\frac{2\pi}{\lambda}$

$\longrightarrow$ gamla lausnin fæst þegar $\frac{a}{\lambda} << 1$

~~þegar~~ bylgjulengdin λ er miklu stærri en a

jafnan fyrir E(r) getur lausn á formi Besselfalls

(5) Rafsvarandi kúla með einsleita $\overline{P}$,

setjum $\overline{P} = \hat{a}_z P$

normalvigur út úr kúlu
$\hat{a}_n = \hat{a}_R$

a) Vitum að
$$\rho_{ps} = \overline{P}\cdot \hat{a}_n$$
$$= P\,\hat{a}_z\cdot\hat{a}_n = \underline{P\cos\theta}$$

pólhorn

tvískaut

b)
$$\rho_p = -\underline{\overline{\nabla}\cdot\overline{P} \quad = 0}$$

c) Nú standa nokkrar leiðir til boða. Ein er sú að sveigja almennu lausn jöfnu Poissons í kúluhnitum að dreifingunni ρ_{ps} ...., en ég hef gaman að því að reyna aðra að ~~þe~~ hér fyrst aðeins er spurt um

$\bar{E}$ í miðju kúlunnar. Samkvæmt (3-35)

$$\bar{E}(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S ds' \, \frac{\rho_s(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|^3} (\bar{x}-\bar{x}')$$

umritað verður þetta hér

$$\bar{E}(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\rho_{ps}(\theta)}{a^2} a^2 d\Omega \left(-\hat{a}_R\right)$$

$$= -\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, \cos\theta \left((\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta \right)$$

$$= \left(0, 0, -\frac{P}{3\epsilon_0}\right)$$

$$\rightarrow \quad \bar{E}(0) = -\hat{a}_z \frac{P}{3\epsilon_0}$$

Lausn fyrir alla punkta innan kúlu myndi leiða í ljós að þetta er sviðið alls staðar innan kúlunnar. Útlit heildarlausnar er