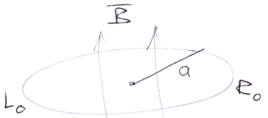
Lykkja með a, L_0 og R_0 og segulflæði $\Phi(t)=\Phi_0 e^{-\Gamma t}\sin(\omega t)$ (1)

finnum strauminn sem spanast í henni.

Lögmál Faradays



$$\oint_C \vec E\cdot d\vec l = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_0 e^{-\Gamma t}\{\omega\cos(\omega t) - \Gamma\sin(\omega t)\} + L_0\frac{d}{dt}i(t)$$ því

heildar flæðið um lykkjuna er $\Phi(t)=\Phi_0 e^{-\Gamma t}\sin(\omega t)+L_0 i(t)$

$$R_0 i(t) = -\Phi_0 e^{-\Gamma t}\{\omega\cos(\omega t) - \Gamma\sin(\omega t)\} - L_0\frac{di(t)}{dt}$$

$$\to \quad L_0\frac{di(t)}{dt} + R_0 i(t) = -\Phi_0 e^{-\Gamma t}\{\omega\cos(\omega t) - \Gamma\sin(\omega t)\}$$

með upphafsgildi $i(0)=0$ (2)

Fyrir 1. stigs jöfnuna $y'+p(t)y=q(t)$ er almenna lausnin

$$y(t)=y(0)e^{-P(t)} + e^{-P(t)}\int_0^t ds\, e^{P(s)}q(s) \qquad P(t)=\int_0^t ds\,p(s)$$

ef upphafspunkturinn er $t=0$

$$P(t)=\int_0^t ds\,\frac{R_0}{L_0} = \frac{R_0}{L_0}t$$

því fæst

$$i(t) = -e^{-\frac{R_0 t}{L_0}}\frac{\Phi_0}{L_0}\int_0^t ds\, e^{\frac{R_0}{L_0}s}e^{-\Gamma s}\{\omega\cos(\omega s)-\Gamma\sin(\omega s)\}$$

Setjum $\alpha = \frac{R_0}{L_0}$ (3)

$$i(t) = -e^{-\alpha t}\frac{\Phi_0}{L_0}\int_0^t ds\, e^{(\alpha-\Gamma)s}\{\omega\cos(\omega s)-\Gamma\sin(\omega s)\}$$

$$= \frac{e^{-\alpha t}\Phi_0}{L_0}\left[\frac{\alpha\omega}{\omega^2+(\alpha-\Gamma)^2} - \frac{e^{(\alpha-\Gamma)t}\{(\omega^2+(\Gamma^2-\alpha\Gamma))\sin(\omega t)+\alpha\omega\cos(\omega t)\}}{\omega^2+(\alpha-\Gamma)^2}\right]$$

$$= \frac{e^{-\alpha t}\Phi_0}{L_0\{\omega^2+(\alpha-\Gamma)^2\}}\left[\alpha\omega - e^{(\alpha-\Gamma)t}\{(\omega^2+\Gamma(\Gamma-\alpha))\sin(\omega t)+\alpha\omega\cos(\omega t)\}\right]$$

augljóslega sést að $i(0)=0$

Eðlilegt er því ~~að~~ ~~skoða~~ myndir af (4)

$$\frac{i(t)\,\omega^2\,\Phi_0}{L_0} = \frac{e^{-\frac{\alpha}{\omega}(t\omega)}}{1+\left(\frac{\alpha-\Gamma}{\omega}\right)^2}\left[\frac{\alpha}{\omega} - e^{\frac{(\alpha-\Gamma)}{\omega}t\omega}\left\{\left(1+\frac{\Gamma}{\omega}\left(\frac{\Gamma-\alpha}{\omega}\right)\right)\sin(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega}\cos(\omega t)\right\}\right]$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \underbrace{-\Phi_0 e^{-\Gamma t}\{\omega\cos(\omega t)-\Gamma\sin(\omega t)\}}_{\text{v. breyting á ytra flæði}} \underbrace{- L_0\frac{d}{dt}i(t)}_{\text{v. breytingar á straumi í rás}}$$

$$= R_0 i(t)$$

5

$$i(t) = \frac{\Phi_0}{L_0\{\omega^2+(\alpha-\Gamma)^2\}}\left[\alpha\omega e^{-\alpha t} - e^{-\Gamma t}\left\{(\omega^2+\Gamma(\Gamma-\alpha))\sin(\omega t)+\alpha\omega\cos(\omega t)\right\}\right]$$

$$Q = \int_0^\infty dt\, i(t) = \frac{\Phi_0}{L_0\{\omega^2+(\alpha-\Gamma)^2\}}\left[\omega - \frac{\omega(\omega^2+\Gamma(\Gamma-\alpha))}{\omega^2+\Gamma^2} - \frac{\Gamma\alpha\omega}{\omega^2+\Gamma^2}\right]$$

$$= 0$$

Óháð stuðlunum, $\Gamma, \omega, \alpha = \frac{R_0}{L_0}$ og Φ_0 er heildar hleðslu-flutningurinn alltaf 0, jafnvel þó $\frac{\Gamma}{\omega} = 1.0$ þ.a. Φ-púlsinn sé mest í aðra áttina. $i(t)$ er sett saman úr $-\frac{d\Phi}{dt}$ og $-L_0\frac{d}{dt}i(t)$

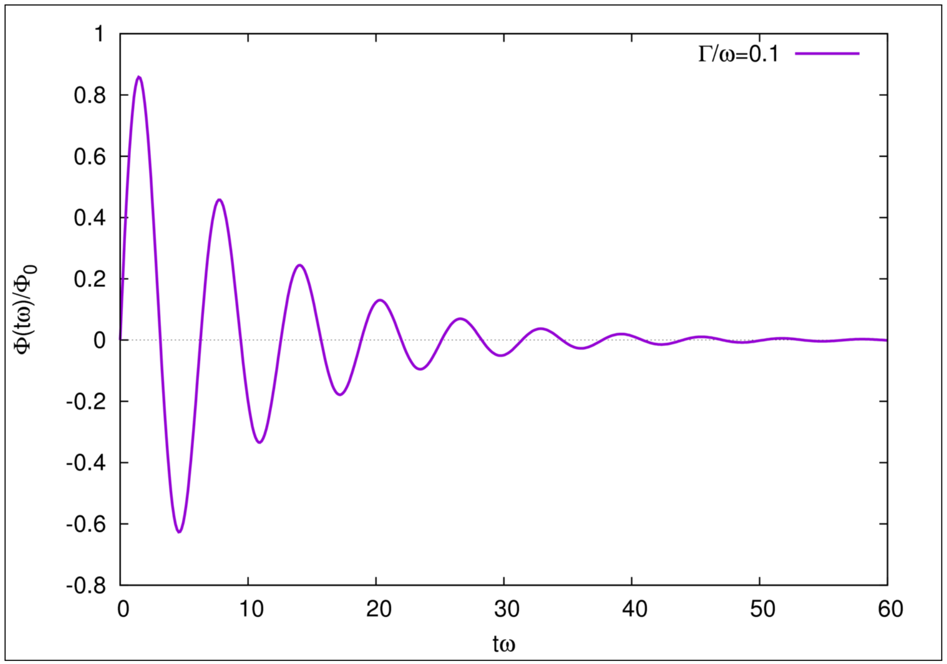
6

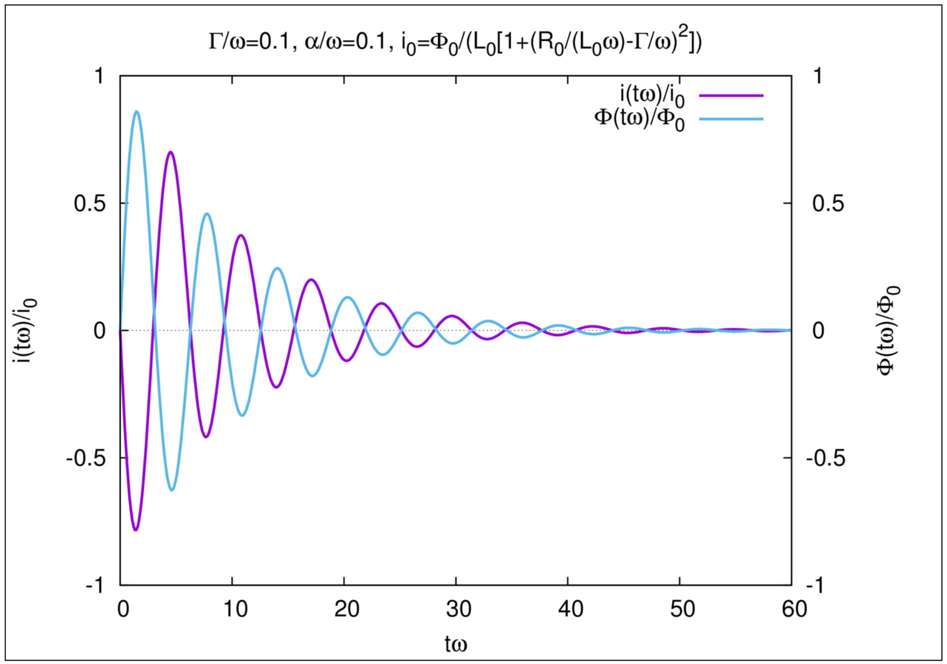
Tíma skala setja breyturnar Γ, ω og $\alpha = \frac{R_0}{L_0}$

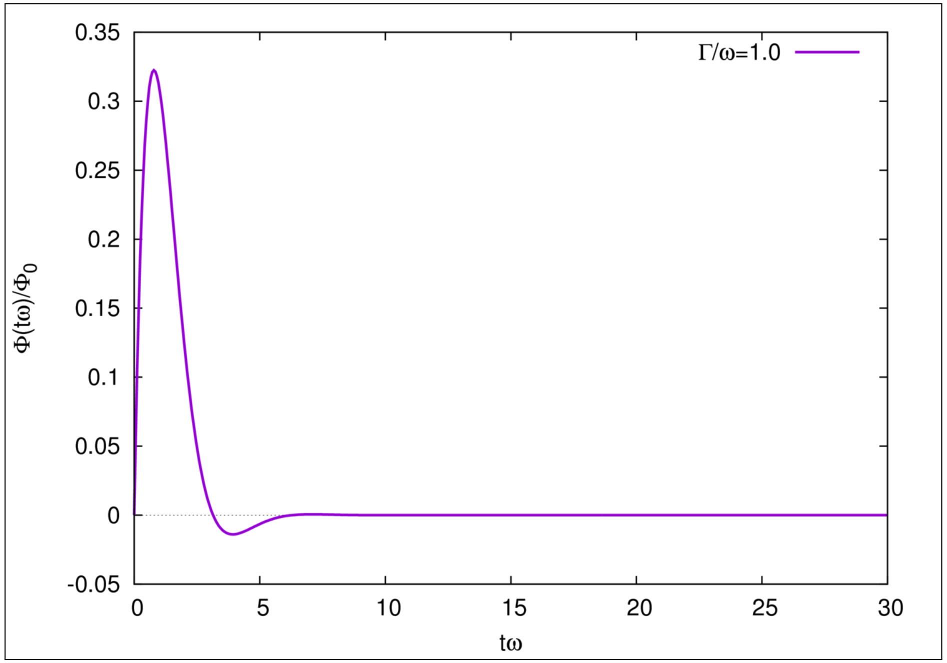
α : Setur náttúrulegan tímaskala spólunnar

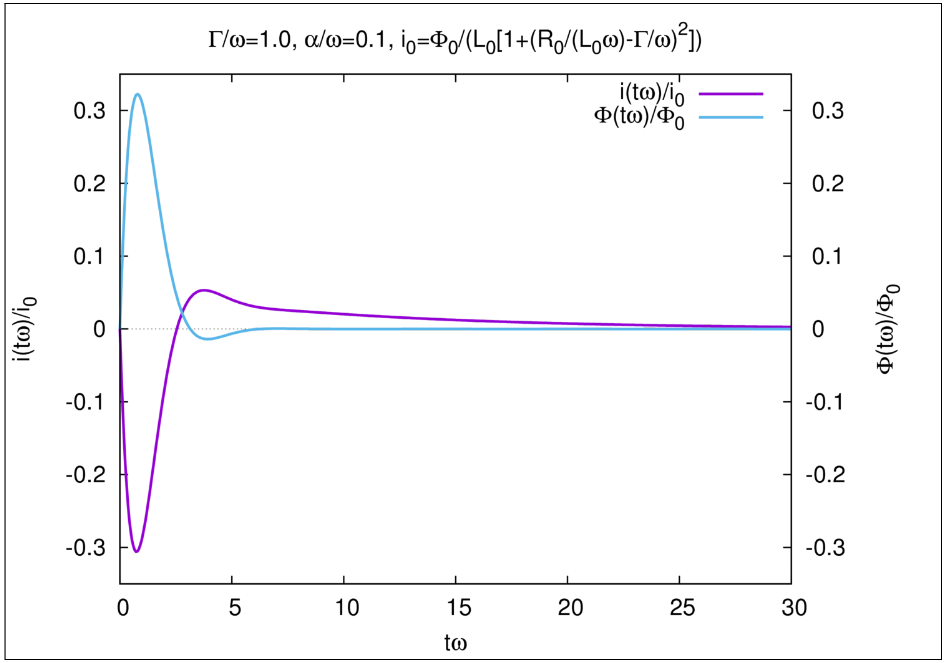
Γ og ω : stýra tímahegðun flæðispúls, ytri.

Í $-\frac{d\Phi}{dt}$ ráða $\frac{\Gamma}{\omega}$, en í $-L_0\frac{d}{dt}i(t)$ kemur líka fyrir $\alpha = \frac{R_0}{L_0}$









Reynum aðra tegund lausnar (Auka, til gamans) (11)

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R_0}{L_0} i(t) = -\frac{d\Phi^{ext}(t)}{L_0 dt} = -\frac{\Phi_0 e^{-\Gamma t}}{L_0}\left\{\omega \cos(\omega t) - \Gamma \sin(\omega t)\right\}$$

þar sem $\Phi^{ext}(t) = \Phi_0 e^{-\Gamma t} \sin(\omega t)$

er ytra flæðið sem breytist í tíma. Heildarflæðið er því

$$\Phi(t) = \Phi^{ext}(t) + L_0 i(t)$$

eins og við höfum séð. Köllum $\alpha = \frac{R_0}{L_0}$

(12)

$$\frac{di(t)}{dt} + \alpha i(t) = -\frac{1}{L_0}\frac{d\Phi^{ext}(t)}{dt}$$

$$\rightarrow \int_0^t ds \frac{di(s)}{ds} + \alpha \int_0^t ds\, i(s) = -\frac{1}{L_0}\int_0^t ds \frac{d\Phi^{ext}(s)}{ds}$$

$$\rightarrow i(t) - i(0) + \alpha \int_0^t ds\, i(s) = -\frac{1}{L_0}\left\{\Phi^{ext}(t) - \Phi^{ext}(0)\right\}$$

Gefum okkur að $i(0) = 0$ og $\Phi^{ext}(0) = 0$

$$\rightarrow i(t) = -\frac{1}{L_0}\Phi^{ext}(t) - \alpha\int_0^t ds\, i(s)$$

Tíma afleiða þessarar jöfnu gefur afleiðujöfnuna sem við höfðum áður

(13)

Heildisjafnan $\boxed{i(t) = -\frac{1}{L_0}\Phi^{ext}(t) - \alpha\int_0^t ds\, i(s)}$ (*)

inniheldur jaðarskilyrðin. Hún nefnist jafna Volterra af annarri tegund, með einfalda kjarnann $K(s) = -\alpha$. Út úr henni lesum við:

* Án viðnáms, $R_0=0$ $(\alpha=0)$, myndast straumur sem eyðir ytra flæðinu nákvæmlega $i(t) = -\frac{1}{L_0}\Phi^{ext}(t)$
* Ef $\alpha\neq 0$, þá er $i(t)$ háð forsögu straumsins um kerfið (Hundurinn bítur stöðugt í rófuna á sér!)

(14)

Lausn (*) samkvæmt Handbook of Integral Equations, eftir A.D. Polyanin og A.V. Manzhirov (2.1.1)

$$i(t) = -\frac{1}{L_0}\Phi^{ext}(t) + \alpha\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\frac{1}{L_0}\Phi^{ext}(s),$$

sem er í samræmi við almennu lausnina sem við fundum fyrir afleiðujöfnuna ef við reynum innsetningu á $\Phi^{ext}(t)$, (en ekki sama form).

Skoðum aðeins (*)

$$i(t) + \alpha\int_0^t ds\, i(s) = -\frac{1}{L_0}\Phi^{ext}(t)$$

Skrifum þetta táknrænt sem

$$\boxed{\{1+\alpha K\}\, i = F}$$

(15)

1 : Einingarvirki

K : heildisvirki

F : þekktur virki

— umbreytum í fylki → ....

i: vigurinn sem við viljum finna

$$\rightarrow \boxed{i = \{1+\alpha K\}^{-1}\cdot F}$$

Lausnin er formleg röð í α, hver liður með α^n stendur fyrir n-snúning á hundinum að bíta í rófuna

Þetta sést ekki á afleiðujöfnunni, en í lausninni er $e^{-\alpha t}$ til komið vegna síendurtekins bits eða snúnings

(16)

Því eru þessar upplýsingar líka á afleiðujöfnunni og jaðarskilyrðunum, en þær sjást betur í heildisjöfnunni.

Með hundinum að bíta í skottið á sér er hér átt við spurninguna hvort nægjanlegt sé að beita við ytra Φ flæðinu sem sjálfspanið myndar, eða hvort taka þurfi tillit til þess að það flæði spani líka straum og þannig koll af kolli út í $\rightarrow\infty$.