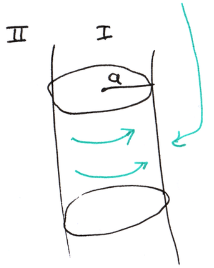
(1)

(1) Spóla, þunn, með geisla a og straumþéttleika

$\bar{J} = J_0 \hat{a}_\phi$ þegar $r=a$



'Oendanleg -> búumst aðeins við að $\bar{A}$ hafi ϕ-hnit, þurfum að leysa $\nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 \bar{J}$ eða til að vera örugg

$$\boxed{\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{A} = \mu_0 \bar{J}}$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{A} = \hat{a}_z\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right\}$$

$$\rightarrow \bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{A} = -\hat{a}_\phi\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]\right\}$$

$$= -\hat{a}_\phi\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}A_\phi + A_\phi\right)\right]\right\}$$

(2)

$$\rightarrow \bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{A} = -\hat{a}_\phi\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}A_\phi + \frac{A_\phi}{r}\right)\right\}$$

$$= -\hat{a}_\phi\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}A_\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2}\right\}$$

því er jafnan sem við verðum að leysa

$$\boxed{\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right\}A_\phi = 0 \quad \text{ef } r \neq a}$$

Engir þættir $\bar{B}$ eru þvert á spólu -> jaðarskilyrðin eru

$\hat{a}_{n_2}\times(\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{J}_s$ setjum $\bar{B} = \mu_0\bar{H}$ og veljum

$2 \leftrightarrow \mathrm{II}$

$1 \leftrightarrow \mathrm{I}$

(3)

þá fæst

$$-\hat{a}_r\times\hat{a}_z\left\{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA^{\mathrm{I}}_\phi)\right] - \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA^{\mathrm{II}}_\phi)\right]\right\} = \mu_0 J_0\hat{a}_\phi$$

$$\rightarrow \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA^{\mathrm{I}}_\phi)\right\} - \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA^{\mathrm{II}}_\phi)\right\} = \mu_0 J_0$$

Reynum lausn $A_\phi(r) = Cr^n$ í

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right\}A_\phi = 0$$

$$\rightarrow n(n-1)r^{n-2} + nr^{n-2} - r^{n-2} = 0$$

$$\rightarrow n(n-1) + n - 1 = 0 \quad \text{eða} \quad n^2 - n + n - 1 = 0$$

$$\rightarrow n = \pm 1$$

(4)

Lausn á svæði I, innan spólu er þá

$$A^{\mathrm{I}}_\phi = C_1 r \qquad r<a$$

því það getur ekki verið sérstöðu-punktur í $r=0$

Á svæði II er lausn

$$A^{\mathrm{II}}_\phi = C_2\frac{1}{r} \qquad r>a$$

Jaðarskilyrðið gefur þá

$$2C_1 - 0 = \mu_0 J_0$$

því er

$$\boxed{A^{\mathrm{I}}_\phi(r) = \frac{\mu_0 J_0}{2} r}$$

það gefur

$$\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A}$$

þ.a.

$$\bar{B}^{\mathrm{I}} = \hat{a}_z\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu_0 J_0}{2}r^2\right)$$

$$= \hat{a}_z\,\mu_0 J_0$$

fæst segulflæðisvið eins og við búumst við

Ytri lausnin er enn

$$A_\phi^{II}(r) = \frac{C_2}{r}$$

sem gefur $\bar{B}^{II} = 0$

eins og búist var við, en getum við fundið C_2?

Við vitum að $\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A}$

$$\rightarrow \underbrace{\oint_S \bar{B}\cdot d\bar{s}}_{\Phi_B} = \oint_S (\bar{\nabla}\times\bar{A})\cdot d\bar{s}$$

$$= \oint_C d\bar{l}\cdot\bar{A}$$

Á svæði II, utan spólu, er $\Phi_B = \mu_0 J_0 \pi a^2$

$$\Phi_B = \oint d\bar{l}\cdot\bar{A}$$

$$\mu J_0 \pi a^2 = 2\pi r\, C_2 \frac{1}{r}$$

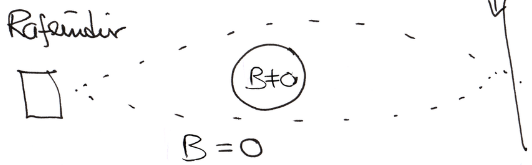
$$\rightarrow C_2 = \frac{\mu J_0 a^2}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{A_\phi^{II} = \frac{\mu J_0 a^2}{2r}}$$

því sést líka að

$$A_\phi^{I}(a^-) = A_\phi^{II}(a^+)$$

Tengsl við hrif Aharonovs og Bohms
séð ofan á spólu



mynstur, víxlmynstur rafeinda bylgna er háð B þó svo rafeindirnar fari aldrei um svæði með $\bar{B}\neq 0$

$\bar{A}\neq 0$ utan spólu, $\bar{A}$ er í jöfnu Schrödingers ásamt V (ekki $\bar{E}$ og $\bar{B}$)