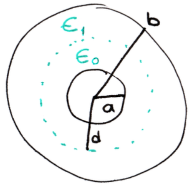
① Kúluþéttir

$|V_{ab}| = V_0$



Kúlusamhverfa

① Finnum rýmd.

Heppilegast er að nota $\oint_S \bar{D}\cdot d\bar{s} = Q$

þar sem við gefum okkur að hleðslan á innri skelinni (frjálsa) sé Q

Því fæst fyrir $a < R < b$ að

$$4\pi R^2 \bar{D}\cdot\hat{a}_R = Q \;\to\; \bar{D}(R) = \frac{\hat{a}_R Q}{4\pi R^2}$$

Rýmd er skilgreind þ.a. $Q = CV$, við þurfum því að finna tengsl Q og V hér.

$$\bar{E} = -\bar{\nabla} V \;\to\; V_R - V_a = -\int_a^R \bar{E}\cdot d\bar{l}$$

②

$$\bar{D}(R) = \hat{a}_R \frac{Q}{4\pi R^2} \qquad a<R<b$$

$$\bar{E}(R) = \begin{cases} \hat{a}_R \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} & a<R<d \\ \hat{a}_R \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_1 R^2} & d<R<b \end{cases}$$

Veljum heildunarveg samsíða $\hat{a}_R$

$$\to\; V_b - V_a = -\int_a^d \frac{Q\,dR}{4\pi R^2\epsilon_0} - \int_d^b \frac{Q\,dR}{4\pi R^2\epsilon_1} = -\frac{Q}{4\pi}\left\{\int_a^d \frac{dR}{\epsilon_0 R^2} + \int_d^b \frac{dR}{\epsilon_1 R^2}\right\}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi}\left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d}\right)\frac{1}{\epsilon_0} + \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right)\frac{1}{\epsilon_1}\right\}$$

③

$$V_b - V_a = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{d-a}{ad} + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\,\frac{b-d}{db}\right\}$$

$$C = \frac{Q}{|V_b - V_a|} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\dfrac{d-a}{ad} + \dfrac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\,\dfrac{b-d}{db}}$$

Hér sést þekkt jafna fyrir kúluþétti án rafsvara þegar $d \to b$

---

② Frjálsar hleðslur eru $+Q$ á innri skelinni og $-Q$ á ytri st.

Gefinn var spennumunurinn $V_0 = |V_b - V_a|$

$$Q = C|V_b - V_a| = CV_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 V_0}{\dfrac{d-a}{ad} + \dfrac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\,\dfrac{b-d}{db}}$$

④

Jafngildar skautaðar hleðslur

Skautunarsviðið er skilgreint sem

$$\bar{D} = \epsilon_0\bar{E} + \bar{P} \;\to\; \bar{P} = \bar{D} - \epsilon_0\bar{E}$$

Skautunarhleðslurnar svo sem

$$\rho_{ps} = \bar{P}\cdot\hat{a}_n$$

$$\rho_p = -\bar{\nabla}\cdot\bar{P}$$

Í kúluhnitum er

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{P}(R) = \frac{1}{R^2}\partial_R\left\{R^2 P(R)\right\}$$

$\to\; \bar{\nabla}\cdot\bar{P} = 0$ í okkar tilfelli fyrir $b>R>d$ og $d>R>a$

Skoðum því yfirborðs skautunina

miðað við rafsvara

$$\rho_{ps}(a^+) = -\hat{a}_R\cdot\bar{P}(a^+)$$

$$\bar P(a^+) = \bar D(a^+) - \epsilon_0 \bar E(a^+) = \epsilon_0\left\{\bar E(a^+) - \bar E(a^+)\right\} = 0$$

$\rightarrow$ $\rho_{ps}(a^+) = 0$, enda er $\epsilon = \epsilon_0$ við þá skel

$$\rho_{ps}(b^-) = +\hat a_R \cdot \bar P(b^-) = +\left\{\frac{Q}{4\pi b^2} - \frac{Q}{4\pi b^2}\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right\}$$

miðað við rafsvara

$$= +\frac{Q}{4\pi b^2}\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right) > 0$$

Þurfum því að athuga hinn enda rafsvarans við $R = d$

$$\rho_{ps}(d^+) = -\hat a_R \cdot \bar P(d^+) = -\left\{\frac{Q}{4\pi d^2} - \frac{Q}{4\pi d^2}\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right\}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi d^2}\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right) < 0$$

Þéttleiki skautaðrar hleðslunnar á rafsvaranum er mismunandi en heildar skautaða hleðslan sitthvoru megin á rafsvaranum er jafn mikil með sitthvort formerkið.

(3) Rafstöðukrafturinn á ytri skelina?

Spennunni V_0 er haldið fastri $\rightarrow$ $\bar F_v = \bar\nabla W_e$

$$W_e = \frac{1}{2}\int dv\, \bar D\cdot\bar E = \frac{1}{2} C V_0^2$$

$$= \frac{2\pi\epsilon_0 V_0^2}{\frac{d-a}{ad} + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\frac{b-d}{db}}$$

Gerum ráð fyrir að hægt sé að hnika til geisla ytri skeljarinnar

$$\rightarrow \left(F_v\right)_R = \frac{1}{2} V_0^2\, \partial_b C(b)$$

$$\rightarrow \left(F_v\right)_R = -\frac{V_0^2}{2}\,\frac{\frac{\epsilon_0}{db\,\epsilon_1}\left[1 - \frac{b-d}{b}\right]}{\left\{\frac{d-a}{ad} + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\frac{b-d}{db}\right\}^2} < 0$$

$\rightarrow$ Krafturinn er inn á við, innri skelin togar í þá ytri til sín.

(2) Er til hleðsludreifing á kúluyfirborði þ.a. á miðbaug kúlunnar verði $\bar E \sim \hat a_\phi$

Í rafstöðufræðinni eru tvær jöfnur

$$\bar\nabla\cdot\bar D = \rho, \qquad \bar\nabla\times\bar E = 0$$

Á heildisformi er seinni jafnan

$$\oint_C \bar E\cdot d\bar l = 0$$

Ef $\bar E \sim \hat a_\phi$ $\rightarrow$ $\oint_C \bar E\cdot d\bar l \neq 0$

$\rightarrow$ ekki er til þannig rafstöðuhleðsla!