(1) Gegnheil rafsvarandi kúla með a, $\overline{P} = P_0 \left(\frac{R}{a}\right) \hat{a}_R$

(1) finna bolstautunarhleðslu $\rho_P = -\overline{\nabla}\cdot\overline{P}$

Kúluhnit og P er aðeins fall af R

$$\rightarrow \rho_P(R) = -\frac{1}{R^2}\partial_R\left\{R^2 P_0\left(\frac{R}{a}\right)\right\} \quad \text{ef } R \le a$$

$$= -\frac{3P_0}{a} \quad \text{ef } R \le a, \text{ og } 0 \text{ fyrir utan}$$

(2) yfirborðsstautunarhleðslan $\rho_{ps} = \overline{P}\cdot\hat{a}_n$

Hér er $\hat{a}_n = \hat{a}_R \rightarrow \rho_{ps} = P_0 \frac{R}{a}$ þ. $R = a$

$$\rho_{ps} = P_0$$

Nú er mikilvægt að kanna heildar hleðslu kúlunnar

Heildar yfirborðshleðsla (stautuð) $Q_{ps} = \oint_S ds\, \rho_{ps} = 4\pi a^2 P_0$

Heildar bol hleðslan (stautuð)

$$Q_P = \int_V dv\, \rho_P = \frac{4\pi a^3}{3}\left(-\frac{3P_0}{a}\right) = -4\pi a^2 P_0$$

Kúlan er óhlaðin í heild

(3) Rafstöðumættið innan og utan kúlunnar.

Hleðsludreifing kúlunnar er kúlusamhverf, aðeins háð R. Þessvegna er mættið innan og utan hennar aðeins háð R. Því er heppilegt að nota lögmál Gauß

utan kúlu $R > a$. Hleðslan innan þess yfirborðs er 0 $\longrightarrow$ Rafsviðið $\overline{E} = 0$ utan kúlu

Innan kúlu

$$\oint_{S(R)} \overline{E}\cdot d\overline{s} = \frac{Q(R)}{\epsilon_0}$$

Við erum að fást við jafngildar hleðslur og fáumst því ekki við D

Innan kúlu $Q(R) = -\frac{3P_0}{a}\cdot\frac{4\pi R^3}{3} = -\frac{4\pi R^3}{a}P_0$

$$\rightarrow 4\pi R^2 E(R) = -\frac{4\pi R^3}{\epsilon_0 a}P_0 \quad \leftarrow \text{Gauß}$$

$$\rightarrow E(R) = -\frac{R}{\epsilon_0 a}P_0$$

$$\rightarrow \overline{E}(R) = -\left(\frac{R}{a}\right)\frac{P_0}{\epsilon_0}\hat{a}_R$$

Veljum við viðmiðunarpunkt rafstöðumættis 0 þ. $R \rightarrow \infty$ þá fáum við að utan kúlu er $V = 0$

Rafstöðumættið er samfellt í yfirborði kúlunnar

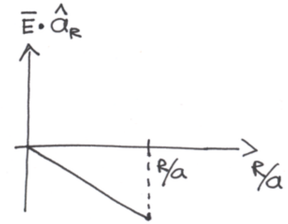
$$\overline{E} = -\overline{\nabla}V$$

því sést að

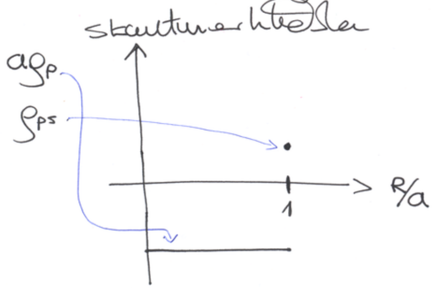
$$V(R) = \frac{R^2}{2a\epsilon_0}P_0 - \frac{1}{2\epsilon_0}aP_0 = \frac{P_0}{2a\epsilon_0}\left(R^2 - a^2\right)$$

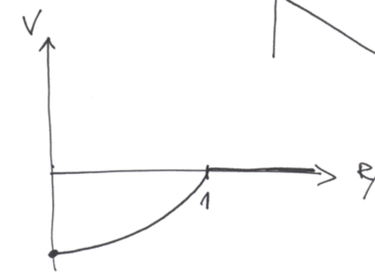
Við erum því búin að finna bæði rafsvið og mætti innan og utan kúlu.

Til samanburðar er gott að kanna hvernig mætti óhlaðins vetnisatóms er aldrei 0, hvers vegna?

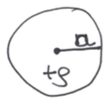


(5) Rissa myndir





② Einangrandi sívalningur með a og $+\rho$



Jafnspennufletir hafa líka sívalningsamhverfu -> notum lögmál Gauß

utan $r > a$

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{s} = Q$$

$$E_r(r)\cdot 2\pi r L = \frac{\pi a^2 L \rho}{\epsilon_0}$$

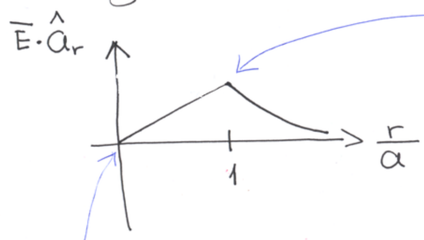
$$\rightarrow E_r(r) = \frac{a^2\rho}{2r\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \bar{E}(r) = \frac{a^2\rho}{2r\epsilon_0}\hat{a}_r$$

Innan $r < a$

$$E_r(r)\cdot 2\pi r L = \frac{\pi r^2 \rho L}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow E_r(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \bar{E}(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\hat{a}_r$$

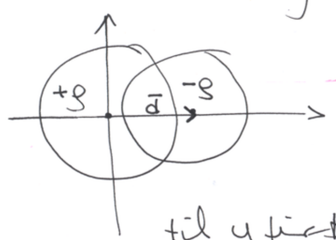
Við yfirborð



Hér er engin óregluleg yfirborðshleðsla ($\sigma = 0$) svo rafsviðið er samfellt, en afleiða þess er brotin í yfirborðinu vegna þrepsins í hleðsludreifingunni

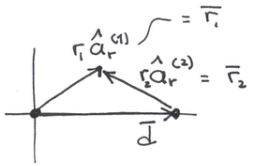
innst er engin hleðsla eftir
$\bar{E} \rightarrow 0$

Öðrum sívalningi bætt við



Þar sem sívalningarnir skarast er hleðslan 0, en það nægir **ekki** til að álykta að rafsviðið þar sé 0. Við getum ekki búið til yfirborð þar sem fellur að samhverfu dæmisins sem gæti haft sama rafsvið alls staðar

Notum samlagningu rafsviða



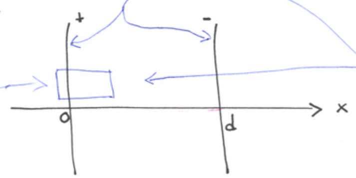
$$\bar{E}^{(1)} = \frac{r_1\rho}{2\epsilon_0}\hat{a}_r^{(1)}$$

$$\bar{E}^{(2)} = -\frac{r_2\rho}{2\epsilon_0}\hat{a}_r^{(2)}, \quad \text{en} \quad r_2\hat{a}_r^{(2)} = -\bar{d} + \hat{a}_r^{(1)} r_1$$

$$\bar{E} = \bar{E}^{(1)} + \bar{E}^{(2)} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}r_1\hat{a}_r^{(1)} - \frac{\rho}{2\epsilon_0}\left(-\bar{d} + \hat{a}_r^{(1)} r_1\right) = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\bar{d}$$

fasti og ekki radial lengur

① Þéttir



$$\epsilon_r(x) = \left(\frac{d+x}{d}\right)^2$$

Við byrjum aðeins við frjálsum hleðslum á leiðaraflötunum sem snúa inn í þéttinn

① finna rýmd þéttisins.

Notum $\oint_S \bar{D}\cdot d\bar{s} = Q$

Gerum ráð fyrir yfirborðshleðslu ρ_s. notum Gauß-yfirborð sem kassa með hliðar x, a, a, þá flæðir rafsvið aðeins um einn flöt hans vegna samhverfu

$$\rightarrow \bar{D}\cdot\hat{a}_x a^2 = Q = a^2\rho_s$$

$$\rightarrow D_x = \rho_s$$

óháð hniti x

$$\bar D = \hat a_x \rho_s \quad \text{óháð } x$$

en $\bar D = \epsilon \bar E = \epsilon_0 \epsilon_r(x) \bar E \;\to\; \bar E(x) = \hat a_x \dfrac{\rho_s}{\epsilon_0 \epsilon_r(x)}$

og er því háð x

finnum spennuna yfir þéttinu

$$V_d - V_0 = -\int_0^d \bar E \cdot d\bar l = -\int_0^d dx \, \frac{\rho_s}{\epsilon_0 \epsilon_r(x)}$$

$$= -\frac{\rho_s d^2}{\epsilon_0} \int_0^d \frac{dx}{(x+d)^2} = -\frac{\rho_s d}{2\epsilon_0}$$

$$\to \frac{C}{a^2} = \frac{\rho_s}{|V_d - V_0|} = \frac{2\epsilon_0}{d}$$

sem er rýmdin á flatareiningu

2 Skautunarhleðslur?

þær voru skilgreindar með

$$\rho_{ps} = \bar P \cdot \hat a_n \qquad \rho_p = -\bar\nabla \cdot \bar P$$

$$\bar D = \epsilon_0 \bar E + \bar P$$

$$\bar P = \bar D - \epsilon_0 \bar E$$

$$\bar P = \rho_s \hat a_x \left\{ 1 - \frac{1}{\epsilon_r(x)} \right\}$$

$$\bar P = \hat a_x \rho_s \left\{ 1 - \frac{d^2}{(d+x)^2} \right\}$$

<u>skautunaryfirborðs hleðsla:</u>

í $x = 0^+$

$$\rho_{ps}(0^+) = \rho_s \left\{ 1 - \frac{d^2}{d^2} \right\} = \rho_s \left\{ 1 - \frac{1}{1} \right\} = 0$$

$$\rho_{ps}(d^-) = -\rho_s \left\{ 1 - \frac{d^2}{4 d^2} \right\} = -\rho_s \left\{ 1 - \frac{1}{4} \right\} = -\frac{3}{4}\rho_s$$

<u>bol skautunarhleðsla</u>

$$\rho_p(x) = -\bar\nabla \cdot \bar P = -\frac{\partial}{\partial x} P_x(x) = -\frac{2\rho_s d^2}{(d+x)^3}$$

setjum spennumun platnanna ΔV:

$$V_d - V_0 = -\frac{\rho_s d}{2\epsilon_0} \;\to\; \Delta V = \frac{\rho_s d}{2\epsilon_0}$$

$$\to \rho_p(x) = -\frac{4 \Delta V d \epsilon_0}{(d+x)^3}$$

notum fyrir yfirborðshleðsluna $\rho_s = \dfrac{2\epsilon_0 \Delta V}{d}$

þá fæst

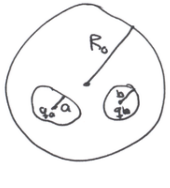
$$\rho_{ps}(d^-) = -\frac{2\epsilon_0 \Delta V}{d} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \right\} = -\frac{3}{2} \frac{\epsilon_0 \Delta V}{d}$$

$$\rho_{ps}(0^+) = \frac{2\epsilon_0 \Delta V}{d} \left\{ 1 - \frac{1}{1} \right\} = 0$$

Allar skautunarhleðslurnar eru línulega háðar ΔV, þær <u>hverfa</u> allar þegar $\Delta V \to 0$

6

② Upphaflega óhlaðin kjörleiðandi kúla með geisla R_0



① yfirborðshleðslur

Rafsviðslínur frá punkthleðslum innan holrúma verða að enda á yfirborði þeirra

$$\rightarrow -4\pi a^2 \rho_{as} = q_a \quad \text{og} \quad -4\pi b^2 \rho_{bs} = q_b$$

$$\rightarrow \rho_{as} = -\frac{q_a}{4\pi a^2}, \quad \rho_{bs} = -\frac{q_b}{4\pi b^2}$$

Heildarhleðslan sem verður að koma fram á yfirborði kúlunnar (skautast) er því (q_a+q_b)

$$\rightarrow \rho_{R_0 s} = \frac{q_a+q_b}{4\pi R_0^2}$$

7

② Rafsviðið utan kúlu, $R > R_0$

$\rho_{R_0 s}$ er jafndreift → sviðið er eins og fyrir punkthleðslu (Gauß...)

$$\rightarrow \bar{E}(R) = \hat{a}_R \frac{q_a+q_b}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \quad R > R_0$$

③ Í holrúmi a:

$$\bar{E}(R_a) = \hat{a}_{R_a} \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 R_a^2}, \quad R_a < a$$

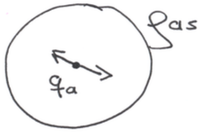
miðast við miðju holrúms a

$$\bar{E}(R_b) = \hat{a}_{R_b} \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0 R_b^2}, \quad R_b < b$$

8

④ Krafturinn sem verkar á hvora punkthleðslu?

Á q_a verkar aðeins krafturinn frá ρ_{as}



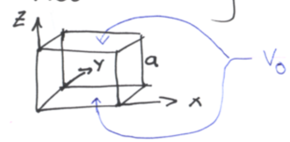
ρ_{as} er jafndreifð, þessvegna styttast kraftarnir út $\bar{F}_a = 0$

sama fyrir q_b, $\bar{F}_b = 0$

⑤ Punkthleðsla q_c sett fyrir utan kúlu. Vegna eiginleika kjörleiðara ($\bar{E}=0$) breytir hún engu um það sem gerist í holrúmunum. En, hún bætir ekki við yfirborðshleðslu kúlunnar, en misdreifir henni. Veldur tvískautssviði.

1

① Holur teningur gerður úr kjörleiðandi ferningum



hinar hliðarnar eru með $V = 0$

① Finna $V(x,y,z)$

V er lausn $\nabla^2 V = 0$, Laplace jöfnu, eða

$$\left\{\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right\} V(x,y,z) = 0$$

Veljum hnitakerfi eins og myndin sýnir, jaðarskilyrðin eru þannig að $V=0$ á öllum fjórum lóðréttu flötunum og V_0 á þeim láréttu.

2

Lausnin er samskonar í x og y-stefnur
því verður lausnin að vera lotubundið fall
til þess að uppfylla $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$
verður þá lausnin í z-átt að vera sett saman
úr dofnandi og rísandi veldisvísis föllum

$$V(x,y,z) = V_x(x)V_y(y)V_z(z)$$

$$V_x(x) = A\sin(k_x x)$$

$$V_y(y) = B\sin(k_y y)$$

$$V_z(z) = C\exp\left\{+\sqrt{k_x^2+k_y^2}\,z\right\} + D\exp\left\{-\sqrt{k_x^2+k_y^2}\,z\right\}$$

V_z er valið þannig að þetta skilyrði sé sjálfkrafa uppfyllt

3

Til að uppfylla jaðarskilyrðin á lóðréttu flötunum verður að gilda

$$k_x = \frac{n\pi}{a} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$k_y = \frac{m\pi}{a} \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Ef $V_0 = 0$ þá gæti $n = 0$ og $m = 0$ líka verið mögulegt. Veljum hér að $V_0 \neq 0$

$$\gamma_{nm} \equiv +\sqrt{(k_x^2 + k_y^2)} = \frac{\pi}{a}\sqrt{n^2+m^2}$$

$$V_z(z) = C\exp[\gamma z] + D\exp\{-\gamma z\}$$

4

Við erum ekki búin með að uppfylla öll jaðarsk. en setjum saman lausnina

$$V(x,y,z) = \sum_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\left[C_{nm}e^{\gamma_{nm}z} + D_{nm}e^{-\gamma_{nm}z}\right]$$

Hér eru stuðlarnir A_n og B_n teknir inn í C_{nm} og D_{nm}

Jaðar í $z = 0$

$$V_0 = \sum_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\left\{C_{nm} + D_{nm}\right\}$$

Notum að föllin í x- og y-stefnu mynda hornréttan grunn á bilinu $[0,a]$

5

$\rightarrow$

$$V_0\int_0^a dx\,dy\,\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{q\pi y}{a}\right)$$

$$= \sum_{nm}\left\{C_{nm} + D_{nm}\right\}\int_0^a dx\,\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\int_0^a dy\,\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{q\pi y}{a}\right)$$

almennt gildir

$$\int_0^a dx\,\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) = \frac{a}{2}\delta_{n,p}$$

$$\int_0^a dx\,\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{a}{n\pi}\left\{1-(-1)^n\right\}$$

og því fæst

$$V_0 \frac{a}{p\pi}\left\{1-(-1)^p\right\}\frac{a}{q\pi}\left\{1-(-1)^q\right\} = \sum_{n,m}\left\{C_{nm}+D_{nm}\right\}\frac{a^2}{4}\delta_{n,p}\delta_{m,q}$$

$$\to \quad V_0 \frac{a^2}{pq\pi^2}\left\{1-(-1)^p\right\}\left\{1-(-1)^q\right\} = \frac{a^2}{4}\left\{C_{pq}+D_{pq}\right\}$$

$$\to \quad C_{pq}+D_{pq} = \begin{cases} 0 & \text{f. } p \text{ og } q \text{ jafnar tölur} \\ \dfrac{16V_0}{pq\pi^2} & \text{f. } p \text{ og } q \text{ oddatölur} \end{cases} \quad (*)$$

Jaðar í $z = a$

$$V_0 = \sum_{n,m}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\left\{C_{nm}e^{\gamma_{nm}a}+D_{nm}e^{-\gamma_{nm}a}\right\}$$

Notum aftur að grunnföllin í x- og y- stefnu eru fullkomin grunnur

$$\to \quad C_{pq}e^{\gamma_{pq}a}+D_{pq}e^{-\gamma_{pq}a} = \begin{cases} 0 & \text{jöfn } p,q \\ \dfrac{16V_0}{pq\pi^2} & \text{odda } p,q \end{cases} \quad (**)$$

---

leysum saman (*) og (**)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\gamma_{pq}a} & e^{-\gamma_{pq}a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{pq} \\ D_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{16V_0}{pq\pi^2} \\ \dfrac{16V_0}{pq\pi^2} \end{pmatrix}$$

$$C_{pq} = \frac{16V_0}{pq\pi^2\left(e^{\gamma_{pq}a}+1\right)} \qquad D_{pq} = \frac{16V_0\, e^{\gamma_{pq}a}}{pq\pi^2\left(e^{\gamma_{pq}a}+1\right)}$$

því er lausnin

$$V(x,y,z) = \sum_{\substack{n=0\\m=0}}^{\infty}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{(2m+1)\pi y}{a}\right)\left\{C_{(2n+1)(2m+1)}e^{\gamma_{(2n+1)(2m+1)}z} + D_{(2n+1)(2m+1)}e^{-\gamma_{(2n+1)(2m+1)}z}\right\}$$

með

$$C_{pq} = \frac{16V_0}{pq\pi^2\left(e^{\gamma_{pq}a}+1\right)} \qquad D_{pq} = \frac{16V_0\, e^{\gamma_{pq}a}}{pq\pi^2\left(e^{\gamma_{pq}a}+1\right)}$$

$$\gamma_{pq}a = \pi\sqrt{p^2+q^2}$$

$$\gamma_{pq}z = \pi\frac{z}{a}\sqrt{p^2+q^2}$$

tilbúið fyrir grafík

(2) Yfirborðshleðsluþéttleikinn á topplötunni er í réttu hlutfalli við normalþátt rafsviðsins við plötuna

$$\rho_s(x,y,a^-) = \epsilon_0 E_n(x,y,a^-)$$

Hleðslan er neðan á plötunni því við þekkjum bara rafstöðumættið innan teningsins.

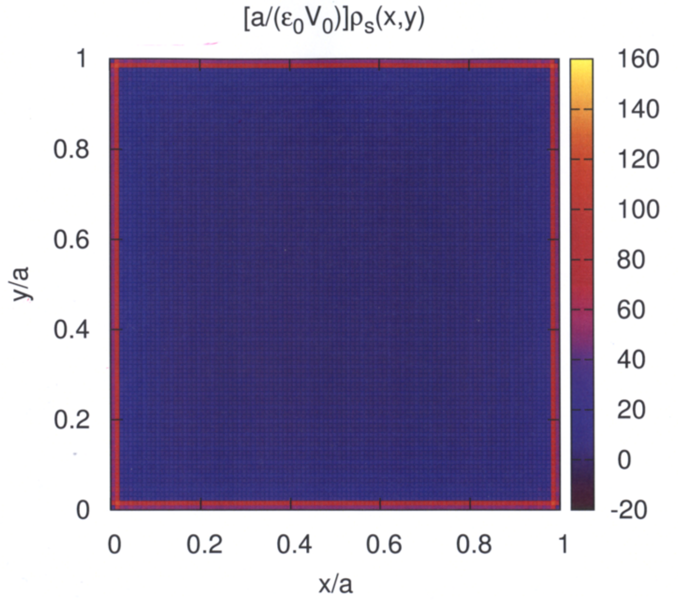
$$\rho_s(x,y,a^-) = \epsilon_0\bar{n}\cdot\bar{E}(x,y,a^-) = -\epsilon_0\hat{a}_z\cdot\bar{E}(x,y,a^-)$$

$$= \epsilon_0\,\partial_z V(x,y,z)\Big|_{z=a^-}$$

$$\rho_s(x,y) = \epsilon_0\sum_{\substack{n=0\\m=0}}^{\infty}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{(2m+1)\pi y}{a}\right)\gamma_{(2n+1)(2m+1)}\left\{C_{(2n+1)(2m+1)}e^{\gamma_{(2n+1)(2m+1)}a} - D_{(2n+1)(2m+1)}e^{-\gamma_{(2n+1)(2m+1)}a}\right\}$$

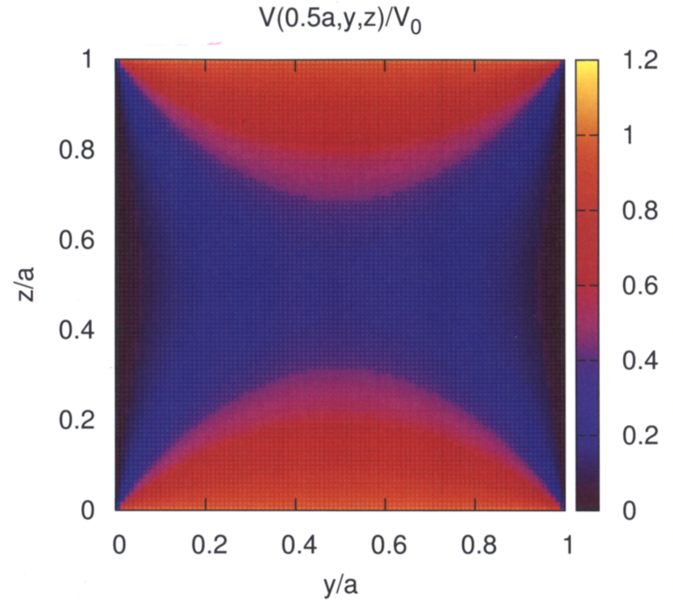
10

$n_{max} = 32$
$m_{max} = 32$



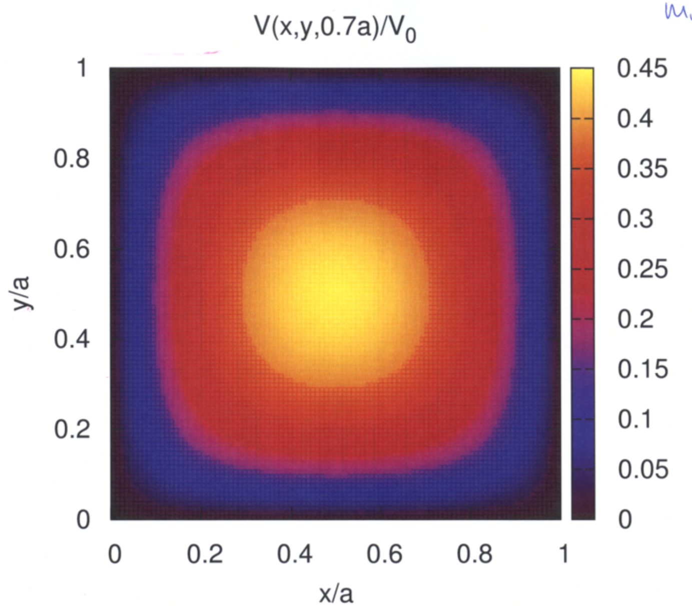
11

$n_{max} = 32$
$m_{max} = 32$



12

$n_{max} = 32$
$m_{max} = 32$



1

(1) Löng einangrandi sívalningsskel við geisla a

$$\rho_s(\theta) = \rho_{s0} \sin(3\phi)$$

(1) finna $V(r,\phi)$ innan og uttan skeljar

Almenna loysnin fyrir z-einsbýtt sívalningskervi, sem eru lotubundin í ϕ-ætt, er

$$V_n(r,\phi) = r^n\{A_n \sin(n\phi) + B_n \cos(n\phi)\}$$
$$+ r^{-n}\{A_n' \sin(n\phi) + B_n' \cos(n\phi)\}$$

<u>Innan</u> $r < a$

$\sin(3\phi)$ er oddstøtt fall á bilinum $[0,2\pi]$ og engin línuhleðsla er innan sívalnings

(2)

$$\rightarrow V_n^i(r,\phi) = r^n A_n \sin(n\phi)$$

utan $r > a$

Sívalningurinn er í heild óhlaðinn, með oddstæða hleðsludreifingu

$$\rightarrow V_n^o(r,\phi) = r^{-n} A_n' \sin(n\phi)$$

Lausnirnar verður að skeyta saman í $r=a$ með hleðsludreifinguna á yfirborðinu í huga

$$\hat{a}_{n_2} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s$$

(3)

Hér gildir $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E}$ og $\bar{E} = -\bar{\nabla} V$

$$\rightarrow \left\{ \partial_r V^o(r,\phi) - \partial_r V^i(r,\phi) \right\}\Big|_{r=a} = -\frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0} \sin(3\phi) \quad (*)$$

og

$$V^o(r,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n'}{r^n} \sin(n\phi)$$

$$V^i(r,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin(n\phi)$$

Við þurfum því að liða $\rho_s(\phi)$ í $\sin(n\phi)$-röð

$\rightarrow$ aðeins <u>$n=3$</u> liðurinn kemur fyrir

(4)

$$V^o(r,\phi) = \frac{A'}{r^3} \sin(3\phi) \qquad r > a$$

$$V^i(r,\phi) = A r^3 \sin(3\phi) \qquad r < a$$

$$(*) \rightarrow \left\{ -3 \frac{A'}{r^4} \sin(3\phi) - 3Ar^2 \sin(3\phi) \right\}\Big|_{r=a} = -\frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0} \sin(3\phi)$$

$$\rightarrow -3\frac{A'}{a^4} - 3Aa^2 = -\frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0}$$

Þetta var um brot í afleiðunni í $r=a$, <u>en mættið</u> sjálft er samfellt í $r=a$

$$\rightarrow \frac{A'}{a^3} = Aa^3$$

(5)

Saman verður því

$$-6Aa^2 = -\frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0} \rightarrow A = \frac{\rho_{s0}}{6\epsilon_0 a^2}$$

$$A' = \frac{\rho_{s0} a^4}{6\epsilon_0}$$

Því fæst

$$V^o(r,\phi) = \frac{\rho_{s0} a}{6\epsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin(3\phi) \qquad r > a$$

$$V^i(r,\phi) = \frac{\rho_{s0} a}{6\epsilon_0} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \sin(3\phi) \qquad r < a$$

Reynum til gamans aðra aðferð, sem ég ætlast ekki til að þið beitið á þessu stigi.

$$V(\bar{x}) = \frac{1}{\epsilon_0}\int d\bar{x}'\,\frac{\rho(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$$

og í sívalningshnitum þá verður hér

$$\rho(\bar{x}) = \rho_{s0}\frac{a}{r}\,\delta(r-a)\,\sin(3\phi)$$

$$\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} dk\, e^{im(\phi-\phi')} J_m(kr) J_m(kr') e^{-k(z_>-z_<)}$$

$$\text{ef } z'<z \longrightarrow \begin{cases} z_> = z \\ z_< = z' \end{cases}$$

$$\text{ef } z'>z \longrightarrow \begin{cases} z_> = z' \\ z_< = z \end{cases}$$

z'-heildið er því

$$\int_{-\infty}^{0} dz'\, e^{+kz'} + \int_0^{\infty} dz'\, e^{-kz'} = \frac{2}{k}$$

þar sem við gerum ráð fyrir að $z=0$, kerfið er einsleitt í z-átt.

$$V(\bar{x}) = \frac{\rho_{s0} a}{\epsilon_0}\int_0^{\infty} r'dr'dk \int_0^{2\pi} d\phi' \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr) J_m(kr')\,\frac{1}{r'}\,\delta(r-a) \cdot e^{im(\phi-\phi')}\sin(3\phi')$$

notum

$$\int_0^{2\pi} d\phi'\, e^{im(\phi-\phi')}\sin(3\phi') = \frac{1}{2i} e^{im\phi}\int_0^{2\pi} d\phi' \left\{ e^{i(3-m)\phi'} - e^{-i(3+m)\phi'} \right\}$$

$$= \frac{e^{im\phi}\,2\pi}{2i}\left\{ \delta_{m,3} - \delta_{m,-3} \right\}$$

og munum eftir að $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

$$\rightarrow J_{-3}(x) J_{-3}(y) = J_3(x) J_3(y)$$

þá fæst

$$V(\bar{x}) = \frac{\rho_{s0} a}{\epsilon_0} 4\pi \sin(3\phi)\int_0^{\infty} r'dr'dk\, J_3(kr) J_3(kr')\,\frac{\delta(r'-a)}{2\pi k r'}$$

$$= \frac{\rho_{s0} a}{\epsilon_0} 2\sin(3\phi)\int_0^{\infty}\frac{dk}{k} J_3(kr) J_3(ka)$$

þetta heildi er ekki einfalt, en fæst úr GR 6.574.1-3

$$V(\bar{x}) = \frac{\rho_{s0} a}{6\epsilon_0}\sin(3\phi)\cdot\begin{cases} \left(\frac{a}{r}\right)^3 & r>a \\ \left(\frac{r}{a}\right)^3 & r<a \end{cases}$$

---

sama svar og áður, það er vel þess virði að líta á heildin í Gradshteyn

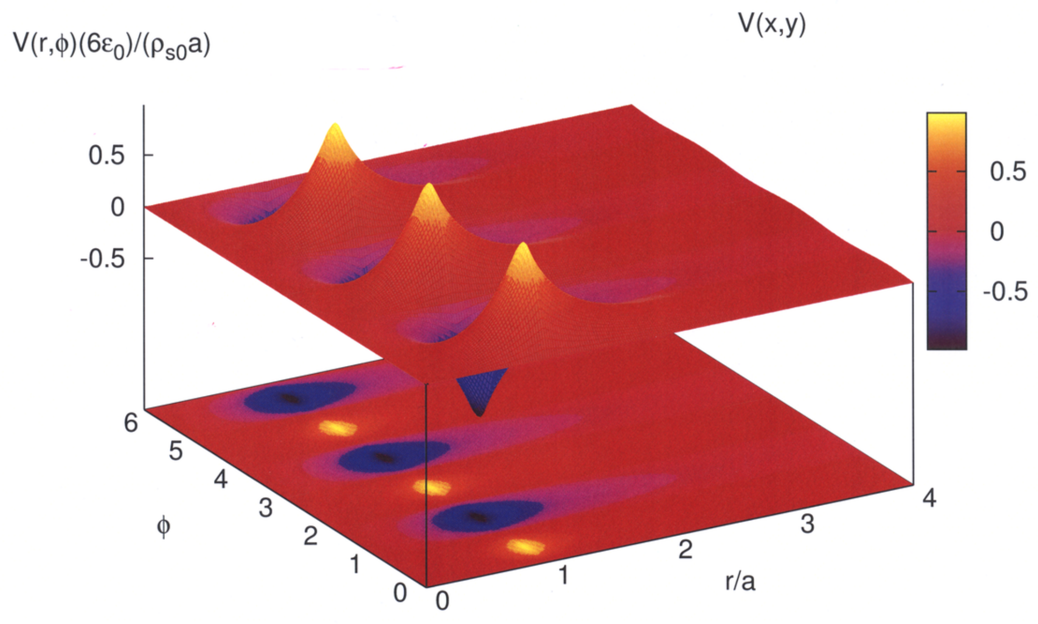
---

(3) Heildarhleðsla sívalningsins er 0

$\rightarrow$ þess vegna hverfur V mjög fjarri honum

Þetta er dæmi um <u>sexskaut</u> (hexapole)

10



11

Hér kemur svo loks rafsviðið

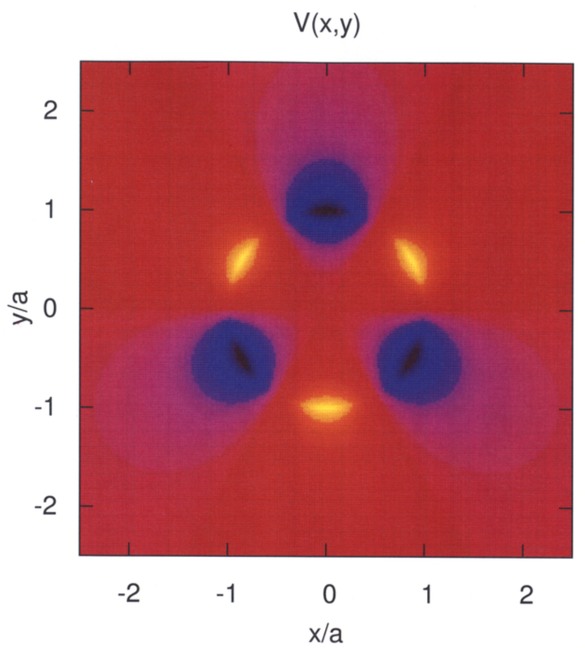
$$\bar{E} = -\bar{\nabla} V = -\hat{a}_r \partial_r V - \frac{1}{r}\partial_\phi V \hat{a}_\phi$$

$$\bar{E}^i = -\hat{a}_r \frac{\rho_{s0}}{2\epsilon_0}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin(3\phi) - \hat{a}_\phi \frac{\rho_{s0}}{2\epsilon_0}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos(3\phi) \qquad \underline{r<a}$$

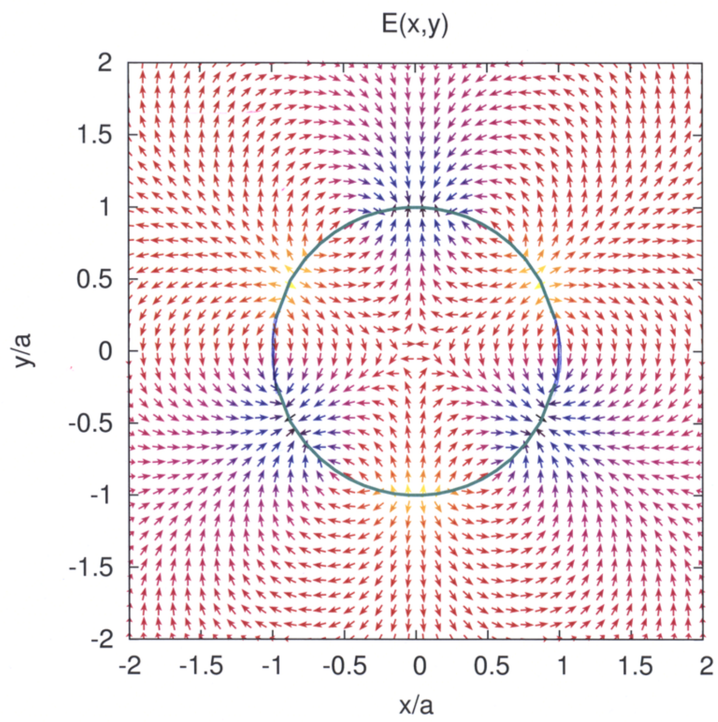
$$\bar{E}^o = \hat{a}_r \frac{\rho_{s0}}{2\epsilon_0}\left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin(3\phi) - \hat{a}_\phi \frac{\rho_{s0}}{2\epsilon_0}\left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos(3\phi)$$

Gaman er að sjá að $\bar{E}$ getur haft þátt samsíða yfirborðinu, það er líka ekki leiðari!
Ég bæti við 2 gröfum til viðbótar

12



13



Stór einsleitur efnisbútur með σ og straumþéttleika $\bar{J} = \hat{a}_z J_0$. Inni í bútnum er gert kúluholrúm með geisla a.

(1) Finnið straumþéttleikann. Gerum ráð fyrir að holrúmið sé í miðju hnitakerfisins.

Einsleit aðstæðum

$$\hookrightarrow \quad \bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0, \quad \bar{\nabla}\times\left(\frac{\bar{J}}{\sigma}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \nabla^2\Phi = 0 \\ \bar{J} = -\bar{\nabla}\Phi \end{cases}$$

Dæminu svipar til dæmis í bók um leiðandi kúlu í föstu ytra rafsviði, nema jaðarskilyrði eru á annan hátt.

$$\Phi(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_n R^n + B_n R^{-(n+1)}\right\} P_n(\cos\theta) \qquad R \geq a$$

Jaðarskilyrðin eru

í kúluhnitum

$$\Phi(R,\theta) = -J_0 z = -J_0 R\cos\theta \qquad \underline{\text{þegar } R \gg a} \qquad (1)$$

↑ því þá er $-\bar{\nabla}\Phi = \bar{J} = \hat{a}_z J_0$

En í $R=a$?

Í dæminu með leiðandi kúlu var $V(a,\theta)=0$, en hér er öruggt að enginn straumur er inn eða út úr kúlurúminu

$$\rightarrow \quad \hat{a}_R\cdot\bar{J}(a,\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{a}_R\cdot\bar{\nabla}\Phi(a,\theta) = 0$$

eða $\partial_R \Phi(R,\theta)\Big|_{R=a} = 0 \qquad (2)$

Jaðarskilyrði (1) $\rightarrow$ $A_n = 0$ ef $n \neq 1$, $A_1 = -J_0$
því $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

$$\rightarrow \quad \Phi(R,\theta) = -J_0 R\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

Fyrsti liðurinn í summunni á við flæði inn eða út úr kúlunni, samanber Coulomb, $\rightarrow B_0 = 0$

$$\Phi(R,\theta) = \left(\frac{B_1}{R^2} - J_0 R\right)\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

Nú þurfum við að uppfylla jaðarskilyrði (2) $\partial_R\Phi(R,\theta)\Big|_{R=a} = 0$

$$0 = \left(-2\frac{B_1}{a^3} - J_0\right)\cos\theta - \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)B_n\frac{1}{a^{n+2}}P_n(\cos\theta)$$

sem verður aðeins uppfyllt með $B_n = 0$ fyrir $n \geq 2$

og $B_1 = -\dfrac{a^3 J_0}{2}$

$$\rightarrow \quad \Phi(R,\theta) = -J_0\left(\left(\frac{a}{R}\right)^3\frac{1}{2} + 1\right)R\cos\theta, \qquad R \geq a$$

← hegðunin fjarri kúluholi

Væntanlega þéttast flæðilínur $\bar{J}$ nærri kúlu (+ formerki)

(5)

$$\bar{J}(R,\theta) = -\hat{a}_R \partial_R \Phi - \hat{a}_\theta \frac{1}{R} \partial_\theta \Phi$$

$$= +\hat{a}_R \left\{ J_0 \left[1 - \left(\frac{a}{R}\right)^3 \right] \cos\theta \right\}$$

$$- \hat{a}_\theta \left\{ J_0 \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^3 \right] \sin\theta \right\} \qquad R \geq a$$

Við getum líka skrifað {setjum $y=0$, vegna samhverfu}

$$\Phi(x,z) = -J_0 \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R(x,z)}\right)^3 + 1 \right\} z$$

með

$$R(x,z) = \sqrt{x^2+z^2}$$

(6)

og síðan

$$\bar{J} = -\bar{\nabla}\Phi = -\hat{a}_x \partial_x \Phi - \hat{a}_z \partial_z \Phi$$

$$= -\hat{a}_x \frac{3}{2} J_0 \frac{a^3 x}{R^5} z$$

$$+ \hat{a}_z J_0 \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^3 \left[1 - \frac{3z^2}{R^2} \right] + 1 \right\}$$

Þetta form er einfaldara til að gera graf af vigursviðinu $\bar{J}$.

---

(2) Í dæminu um kúluna standast yfirborðsskilyrðin á yfirborði hennar, sviðslínur enda því á því. Þar voru skilyrðin $V(a,\theta)=0$, kúlan var við fasta spennu.

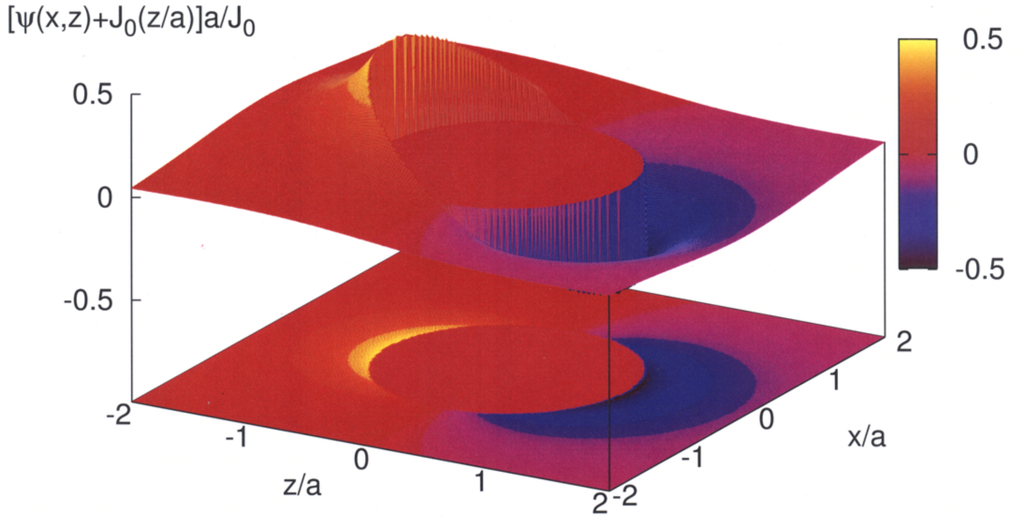
(7)

Hér forðast flæðilínur $\bar{J}$ yfirborðið, straumurinn um það er 0.

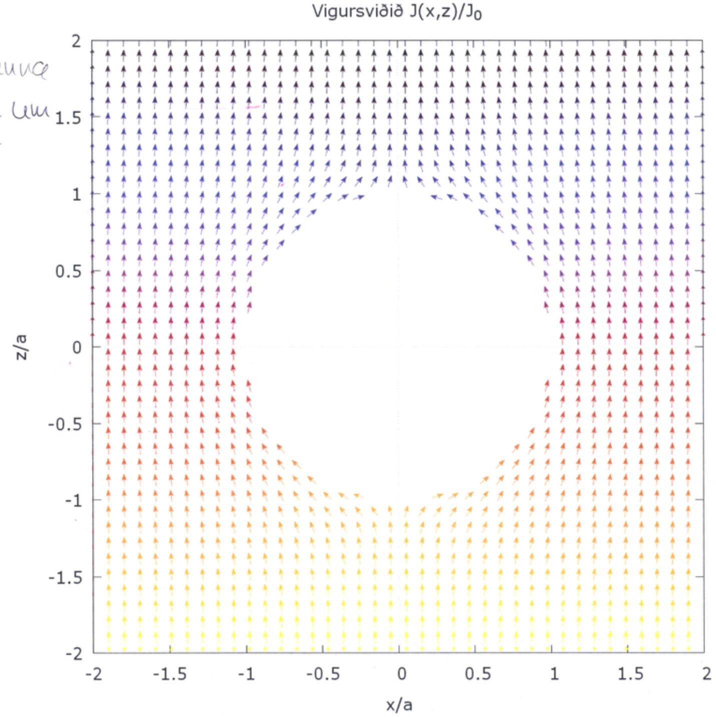
$$\rightarrow \quad \hat{a}_R \cdot \bar{\nabla}\Phi(a,\theta) = 0$$

(8)

„Matlab" Það er betra að skoða þetta graf á skjá -> sjá aukaefni....



Litur örvanna segir til um mættið



(1) Langur sívalningur með geisla a ber $\bar{M} = M_0\left(\frac{r}{a}\right)^2 \hat{a}_\phi$

finna $\bar{B}$ innan og utan

Notum jafngilda strauma (þó svo komi í ljós að þeir séu óþarfir), en til að skilja betur uppsetninguna

$$\bar{J}_m = \bar{\nabla}\times\bar{M}, \quad \bar{J}_{ms} = \bar{M}\times\hat{a}_n$$

$$J_m = \bar{\nabla}\times\bar{M} = M_0\, \bar{\nabla}\times\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \hat{a}_\phi\right\} = M_0 \frac{1}{r}\partial_r\left\{r\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}\hat{a}_z$$

$$= \frac{3M_0}{a}\left(\frac{r}{a}\right)\hat{a}_z$$

á bognu hliðinni er $\hat{a}_n = \hat{a}_r$

$$\bar{J}_{ms} = M_0\left(\frac{a}{a}\right)^2 \hat{a}_\phi\times\hat{a}_r = -M_0\,\hat{a}_z$$

Skoðum aðeins heildarstrauma (jafngilda)

í bol

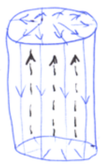
$$I_m = \frac{3M_0}{a}2\pi\int_0^a r\,dr\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{3M_0\,2\pi}{a^2}\frac{a^3}{3} = 2\pi M_0 a$$

í stefnu $\hat{a}_z$

á yfirborði

$$I_{ms} = \bar{J}_{ms}\cdot\hat{a}_z\cdot 2\pi a = -2\pi M_0 a$$

Ef sívalningurinn er endanlegur sést að á endunum er straumurinn „radial"



→ heildarstraumurinn er 0

Engir frjálsir straumar, $\bar{M} = 0$ utan sívalnings

$$\oint_C \bar{H}\cdot d\bar{l} = 0 \;\to\; \bar{H} = 0 \text{ og } \bar{B} = 0 \text{ utan}$$

Innan

Enginn frjáls straumur → $\bar{H} = 0$

$$\to \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} = 0, \;\to\; \bar{B} = \mu_0\bar{M} = \mu_0 M\left(\frac{r}{a}\right)^2\hat{a}_\phi$$

fyrir $r < a$

Athugum aðeins, með jafngildu straumunum

$$I_m^{enc}(r) = \frac{3M_0}{a}2\pi\int_0^r r'\,dr'\left(\frac{r'}{a}\right) = \frac{3M_0\,2\pi}{a^2}\frac{r^3}{3} = 2\pi M_0 a\left(\frac{r^3}{a^3}\right)$$

Notum

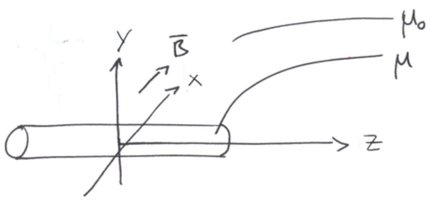
$$\oint_{C_r}\bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I_m^{enc}(r) \;\to\; 2\pi r B = \mu_0 2\pi M_0 a\left(\frac{r}{a}\right)^3$$

$$\to B = \mu_0 M_0\left(\frac{r}{a}\right)^2$$

og $\bar{B} = \mu_0 M_0 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \hat{a}_\phi$ eins og áður sást.

---

②



① finna $\bar{B}, \bar{H}, \bar{M}$ innan og utan sívalnings

Engir frjálsir straumar $\to$ $\bar{\nabla}\times\bar{H} = 0$

Einnig gildir $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0$

því er til ϕ_m þannig að $\bar{H} = -\bar{\nabla}\phi_m$

og $$\boxed{\nabla^2\phi_m = 0}$$

þetta er því farið að líkjast rafsvarandi sívalningi í ytra rafsviði

Jaðarskilyrði

$$\bar{B} = B_0\hat{a}_x \to \phi_m(r,\phi) = -\frac{1}{\mu_0}B_0 r\cos\phi, \quad r >> a$$ ①

og í segulsviði gildir

$$\hat{a}_{n_2}\times(\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{J}_s$$ ← hjá okkur er enginn frjáls yfirborðsstraumur

$$\to \hat{a}_r\times(\bar{H}^i - \bar{H}^o) = 0$$

$$\to -\frac{1}{a}\partial_\phi\phi_m^i\Big|_{r=a} = -\frac{1}{a}\partial_\phi\phi_m^o\Big|_{r=a}$$ ②

Einnig er ϕ_m „samfellt" í sívalnings-yfirborðinu þannig að $B_n^i = B_n^o$ ← $(\mu H_n^i = \mu_0 H_n^o)$ ③

Almenna lausnin er

$$\phi_m^n(r,\phi) = r^n\left[A_n\sin(n\phi) + B_n\cos(n\phi)\right]$$
$$r^{-n}\left\{A_n'\sin(n\phi) + B_n'\cos(n\phi)\right\} \quad \text{ef } n\neq 0$$

① $\to$ jafnstætt í horninu ϕ

$$\phi_m^i(r,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^n\cos(n\phi), \quad \text{ef } r<a$$

$$\phi_m^o(r,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n' r^{-n}\cos(n\phi) \underbrace{-\frac{1}{\mu_0}B_0 r\cos\phi, \quad r>a}$$

hér erum við búin að nota ①

③ $-\mu\partial_r\phi_m^i(a,\phi) = -\mu_0\partial_r\phi_m^o(a,\phi)$

$$\mu\sum_{n=1}^{\infty} nB_n a^{n-1}\cos(n\phi) = \mu_0\sum_{n=1}^{\infty}(-n)B_n' a^{-n-1}\cos(n\phi) - B_0\cos\phi$$

② $\to$ $$\sum_{n=1}^{\infty} nB_n a^{n-1}\sin(n\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n' a^{-n-1}\sin(n\phi) - \frac{1}{\mu_0}B_0\sin\phi$$

þetta þarf að gilda fyrir öll horn ϕ

③ $\to$ $$\begin{cases} \mu B_1 = -\mu_0 B_1' a^{-2} - B_0 & \text{ef } n=1 \\ \mu B_n a^{n-1} = \mu_0 B_n' a^{-n-1}(-n) & \text{ef } n\neq 1 \end{cases}$$

8

(2) $\longrightarrow$
$$\begin{cases} B_1 = B_1' a^{-2} - \frac{1}{\mu_0} B_0 & \text{ef } n=1 \\ B_n a^{n-1} n = B_n' a^{-n-1} n & \text{ef } n \neq 1 \end{cases}$$

Seinni tvö skilyrðin í hvert skiptið ganga ekki upp saman $\longrightarrow$ $B_n = B_n' = 0$ ef $n \neq 1$

Eftir stendur

$$\begin{cases} \mu B_1 + \mu_0 B_1' a^{-2} = -B_0 \\ B_1 - B_1' a^{-2} = -B_0 \frac{1}{\mu_0} \end{cases} \quad , \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

$$\rightarrow B_1 = -\frac{2B_0}{\mu_0 + \mu} \quad , \quad B_1' = -\frac{a^2 B_0 (\mu_0 - \mu)}{(\mu_0 + \mu)\mu_0} = \frac{a^2 B_0 (\mu - \mu_0)}{(\mu_0 + \mu)\mu_0}$$

9

Þá
$$B_1 = -\frac{2B_0}{\mu_0(1+\mu_r)} \quad , \quad B_1' = \frac{a^2 B_0 (\mu_r - 1)}{\mu_0(1+\mu_r)}$$

Svo að lausnin er

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_m^i(r,\phi) &= -\frac{2B_0 r}{\mu_0(1+\mu_r)} \cos\phi \\ \phi_m^o(r,\phi) &= \frac{a^2 B_0(\mu_r - 1)}{\mu_0(1+\mu_r) r} \cos\phi - \frac{B_0}{\mu_0} r \cos\phi \end{aligned}}$$

Hér sést að $\phi_m^i(a,\phi) = \phi_m^o(a,\phi)$

$\bar{B}_n$ er samfellt í yfirborðinu, $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0$

og $\lim\limits_{\mu_r \to 1} \phi_m^o(r,\phi) = -\frac{B_0}{\mu_0} r\cos\phi$, $\lim\limits_{\mu_r \to 1} \phi_m^i(r,\phi) = -\frac{B_0}{\mu_0} r\cos\phi$

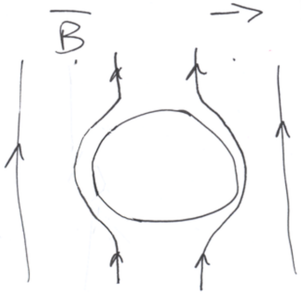
10

$$\bar{B} = -\mu \bar{\nabla} \phi_m$$

$$\rightarrow \bar{B}^i = \hat{a}_r \frac{2B_0 \mu_r}{(1+\mu_r)} \cos\phi - \frac{2B_0\mu_r}{(1+\mu_r)} \sin\phi \cdot \hat{a}_\phi$$

Sterkleg andseglun: $\mu_r \longrightarrow 0$

$$\rightarrow \bar{B}^i \rightarrow 0$$

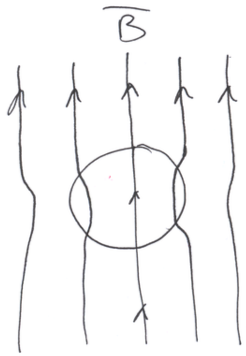


Segulflæðisviðið forðast sterklega andseglandi efni, eins og ofurleiðara

11

Sterk meðseglun (járnseglun)

$$\mu_r >> 1$$



Segulsviðið dregst að sívalningnum, er segulviðnámið (reluctance) þar lægra

12

Nú gildir

$$\bar H = \frac{\bar B}{\mu_0} - \bar M \quad \to \quad \bar M = \frac{\bar B}{\mu_0} - \bar H$$

fyrir utan sívalninginn er $\bar M^o = 0$, því þar er $\bar H^o = \frac{\bar B^o}{\mu_0}$, en fyrir innan er $\bar M^i = \frac{\bar B^i}{\mu_0} - \bar H^i$

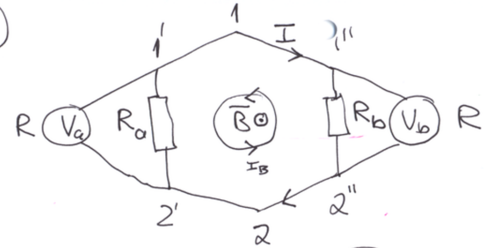
$$\to \bar M^i = \frac{\bar B^i}{\mu_0} - \frac{\bar B^i}{\mu} = \bar B^i\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right) = \frac{\bar B^i}{\mu}(\mu_r - 1)$$

$\to \bar M^i \to 0$ þegar $\mu_r \to 1$

og fyrir sterka andseglun $\mu_r \approx 0$ $\quad \bar M^i = -\frac{\bar B^i}{\mu}$

sem nægir til að eyða ytra sviðinu innan efnisins

1



$\Phi(t) = \alpha t$ vaxandi myndar strauminn í rásinni (spanar): I

Regla Lenz gefur að strauminn sé réttsælis, eins og sýnt er á mynd, Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\alpha \quad \to \quad I(R_a + R_b) = \alpha$$

$$\to I = \frac{\alpha}{R_a + R_b} \quad \text{andsælis}$$

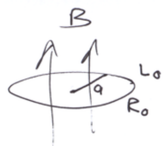
spennufallið $V_a = \frac{\alpha R_a}{R_a + R_b}$, ($V_{2'}$ er hærri en $V_{1'}$)

$$\to V_b = -\frac{\alpha R_b}{R_a + R_b}, \quad (V_{1''} \text{ er hærri en } V_{2''})$$

$V_a \neq -V_b$ þó við séum í raun að mæla spennumun sömu punkta ① og ②

2

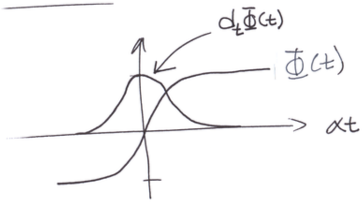
② Lykkja, L_0, R_0, a, með segulflæði



$$\Phi(t) = \Phi_0 \operatorname{erf}(\alpha t)$$

① Finna $i(t)$

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{2\Phi_0 \alpha e^{-(\alpha t)^2}}{\sqrt{\pi}}$$



Heildarflæðið um lykkjuna er

$$\Phi(t) = \Phi_0 \operatorname{erf}(\alpha t) + L_0 i(t)$$

Sjálfspan lykkju

Faraday

$$\oint_C \bar E \cdot d\bar l = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \to \quad R_0 i(t) = -\frac{2\Phi_0 \alpha e^{-(\alpha t)^2}}{\sqrt{\pi}} - L_0 \frac{di(t)}{dt}$$

$R_0 i$

3

Eða

$$\boxed{L_0 \frac{di(t)}{dt} + R_0 i(t) = -\frac{2\Phi_0 \alpha e^{-(\alpha t)^2}}{\sqrt{\pi}}}$$

1. stigs afleiðujafna

upphafsskilyrði

$i(t \to -\infty) = 0$

Ef við höfum $\quad y' + p(t)y = q(t)$

þá er almenna lausnin

$$y(t) = y(t_0)e^{-P(t)} + e^{-P(t)}\int_{t_0}^{t} ds\, e^{P(s)} q(s)$$

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} ds\, p(s)$$

Hér væri þá

$$P(t) = \int_{-\infty}^{t} ds \frac{R_0}{L_0}$$

Notum því t_0 og setjum síðan $t_0 \to -\infty$

4

$$P(t) = \frac{R_0}{L_0}(t - t_0)$$

$$i(t) = \underbrace{\frac{1}{L_0} i(t_0) e^{-\frac{R_0}{L_0}(t-t_0)}}_{\to 0} - e^{-\frac{R_0}{L_0}(t-t_0)} \frac{1}{L_0}\int_{t_0}^{t} ds\, e^{\frac{R_0}{L_0}(s-t_0)} \frac{2\Phi_0 \alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-(\alpha s)^2}$$

þegar $(t-t_0) \to \infty$
og $i(-\infty) = 0$

$$\to i(t) = -\frac{2\Phi_0\alpha}{\sqrt{\pi} L_0} \exp\left\{-\frac{R_0 t}{L_0}\right\} \int_{-\infty}^{t} ds \exp\left\{-(\alpha s)^2 + \frac{R_0}{L_0}s\right\}$$

$$= -\frac{\Phi_0}{L_0}\exp\left\{-\frac{t}{\tau_L} + \frac{\tau_\phi^2}{4\tau_L^2}\right\}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{t}{\tau_\phi} - \frac{\tau_\phi}{2\tau_L}\right) + 1\right]$$

ef $\boxed{\tau_L = \frac{L_0}{R_0}}$, og $\boxed{\tau_\phi = \frac{1}{\alpha}}$ tveir tímaskalar

↑ spólunnar ↑ flæðisins

5

$$i(t) = -\frac{\Phi_0}{L_0}\exp\left\{-\frac{t}{\tau_L} + \frac{\tau_\phi^2}{4\tau_L^2}\right\}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{t}{\tau_L}\left(\frac{\tau_L}{\tau_\phi}\right) - \frac{\tau_\phi}{2\tau_L}\right) + 1\right]$$

$$\Phi(t) = \Phi_0\, \mathrm{erf}\left(\frac{t}{\tau_L}\left(\frac{\tau_L}{\tau_\phi}\right)\right)$$

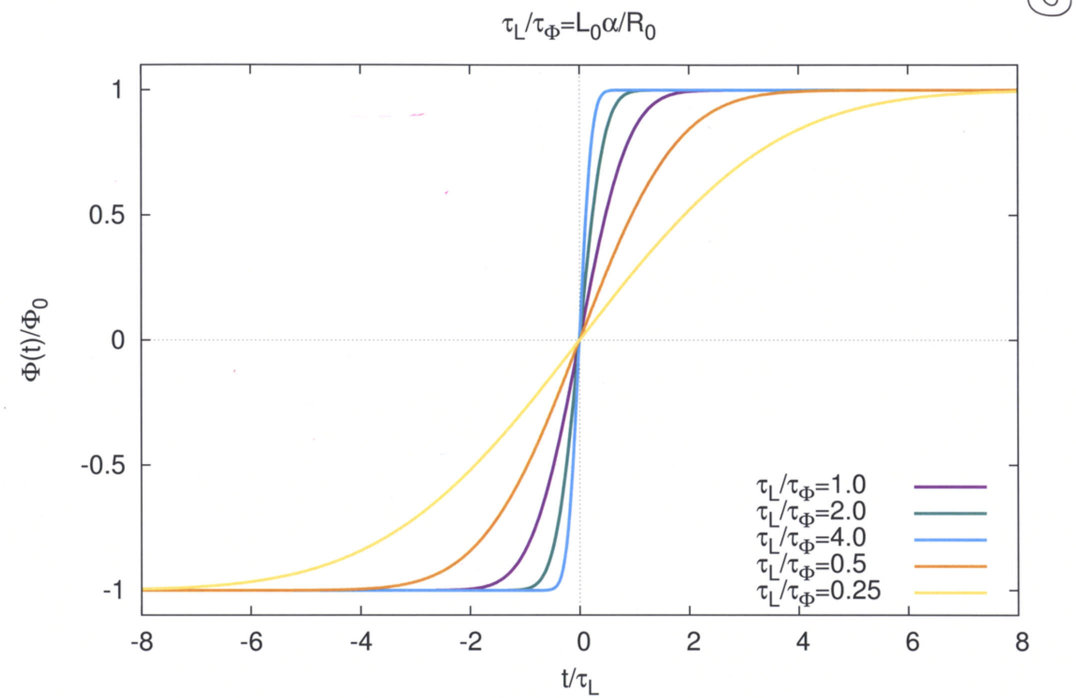
Heildar hleðsla um hverja punkt

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, i(t) = -\frac{2\Phi_0}{\alpha}\exp\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{\tau_\Phi}{\tau_L}\right)^2\right\}$$

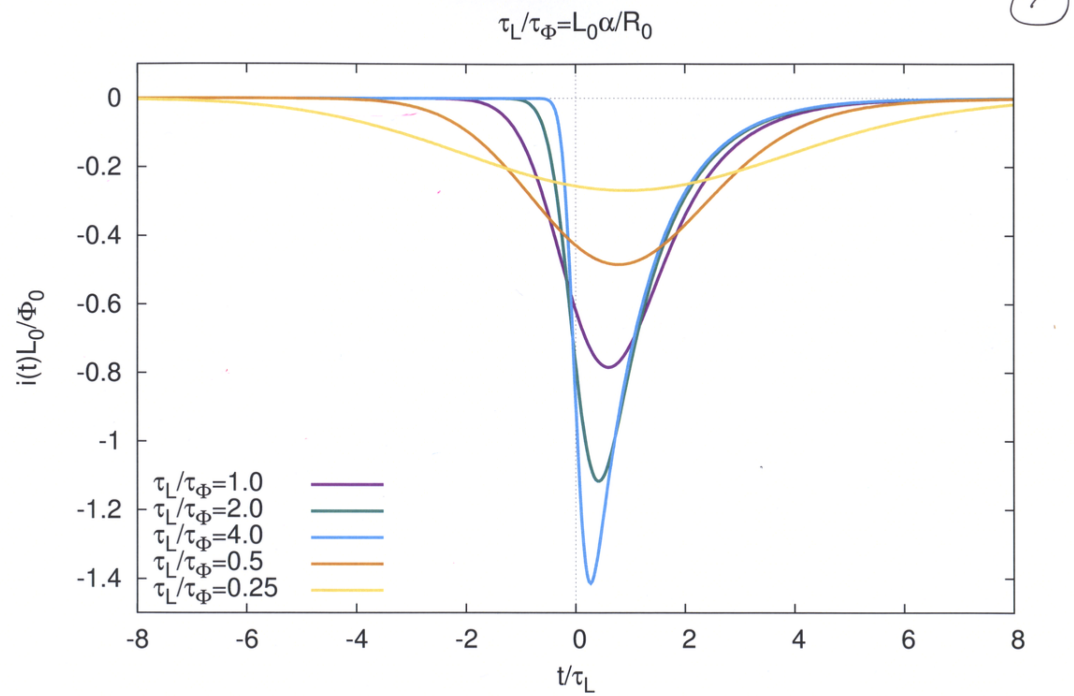
$$= -\frac{2\Phi_0}{\alpha}\exp\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{R_0}{\alpha L_0}\right)^2\right\}$$

Ef α er haldið föstu (sami hraði á Φ-breytingu) þá flyst meiri hleðsla þegar $\underline{\alpha L_0 >> R_0}$, mikið sjálfspan í rásinni. Stórt viðnám kemur í veg fyrir mikinn hleðslu flutning.

6

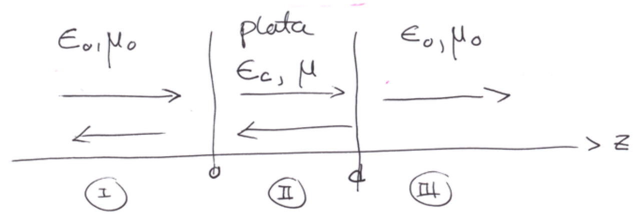


7



(1)

Flöt rafsegulbylgja með bylgjulengd λ fellur á stóra leiðandi plötu með þykkt d.



$$\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Veljum eins og í kafla 8-9 í bók

$$\bar{E}_1 = \hat{a}_x \left\{ E_{io} e^{i\beta_0 z} + E_{ro} e^{-i\beta_0 z} \right\}$$

$$\bar{H}_1 = \hat{a}_y \frac{1}{\eta_0} \left\{ E_{io} e^{i\beta_0 z} - E_{ro} e^{-i\beta_0 z} \right\}$$

Ég nota i í stað $-j$, ég veit að ég hef ekki passað vel upp á það í fyrirlestrum

(2)

$$\bar{E}_2 = \hat{a}_x \left\{ E_2^+ e^{ik_2 z} + E_2^- e^{-ik_2 z} \right\}, \quad k_2 = \beta_2 + i\alpha_2$$

$$\bar{H}_2 = \frac{\hat{a}_y}{\eta_2} \left\{ E_2^+ e^{ik_2 z} - E_2^- e^{-ik_2 z} \right\}$$

$$\bar{E}_3 = \hat{a}_x \left\{ E_{to} e^{i\beta_0 z} \right\}, \quad \bar{H}_3 = \hat{a}_y \frac{1}{\eta_0} E_{to} e^{i\beta_0 z}$$

Engin segulvirkni $\rightarrow$ notum jaðarskilyrði

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \text{og} \quad \hat{a}_{n2} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{J}_s = 0$$

því verður

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{E}_1(0) &= \bar{E}_2(0) \\ \bar{H}_1(0) &= \bar{H}_2(0) \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \bar{E}_2(d) &= \bar{E}_3(d) \\ \bar{H}_2(d) &= \bar{H}_3(d) \end{aligned}}$$

$z = 0$ $\qquad$ $z = d$

(3)

Skilyrðin eru því

$$E_{io} + E_{ro} = E_2^+ + E_2^-$$

$$\frac{E_{io} - E_{ro}}{\eta_0} = \frac{E_2^+ - E_2^-}{\eta_2}$$

$$E_2^+ e^{ik_2 d} + E_2^- e^{-ik_2 d} = E_{to} e^{i\beta_0 d}$$

$$\frac{E_2^+ e^{ik_2 d} - E_2^- e^{-ik_2 d}}{\eta_2} = \frac{E_{to}}{\eta_0} e^{i\beta_0 d}$$

Fjórar jöfnur línulegar og fjórar óþekktar stærðir því við getum fest E_{io} eða miðað hinar allar við E_{io}

$$E_{ro} - E_2^+ - E_2^- = -E_{io}$$

$$-E_{ro} - \frac{\eta_0}{\eta_2} E_2^+ + \frac{\eta_0}{\eta_2} E_2^- = -E_{io}$$

$$E_2^+ e^{ik_2 d} + E_2^- e^{-ik_2 d} - E_{to} e^{i\beta_0 d} = 0$$

$$E_2^+ e^{ik_2 d} - E_2^- e^{-ik_2 d} - \frac{\eta_2}{\eta_0} E_{to} e^{i\beta_0 d} = 0$$

(4)

Jöfnurnar má umrita sem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -C & +C & 0 \\ 0 & A & 1/A & -B \\ 0 & A & -1/A & -B/C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{ro} \\ E_2^+ \\ E_2^- \\ E_{to} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_{io} \\ -E_{io} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

þar sem $C = \dfrac{\eta_0}{\eta_2}$

$$A = e^{ik_2 d}$$

$$B = e^{i\beta_0 d}$$

(5)

Setjum

$$F = (A^2-1)C^2 - 2(A^2+1)C + A^2-1$$
$$= (C^2+1)(A^2-1) - 2C(A^2+1)$$

Þá fæst

$$\frac{E_{ro}}{E_{io}} = -\frac{\{(A^2-1)C^2 - A^2+1\}}{F}$$

$$\frac{E_2^+}{E_{io}} = -\frac{2(C+1)}{F}, \qquad \frac{E_2^-}{E_{io}} = -\frac{2A^2(C-1)}{F}$$

$$\frac{E_{to}}{E_{io}} = -\frac{4AC}{BF}$$

(6)

Reiknum upp í grunnstærðir

$$B = \exp(i\beta_0 d) = \exp\left(2\pi i \frac{d}{\lambda_0}\right)$$

góður leiðari

$$k_2 = \beta_2 + i\alpha_2, \quad \text{með} \quad \alpha_2 = \beta_2 = \sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}$$

Finnum f er alls staðar fæst $f = \frac{c}{\lambda_0}$

Notum

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{\pi c}{\lambda_0}\mu_0\sigma} \rightarrow \beta_2 d = d\sqrt{\frac{\pi c}{\lambda_0}\mu_0\sigma}$$

$$\beta_2 d = \frac{2\pi d}{\lambda_0}\sqrt{\frac{\pi c \mu_0 \sigma}{\lambda_0}\frac{\lambda_0^2}{4\pi^2}} = \frac{2\pi d}{\lambda_0}\sqrt{\frac{c\mu_0\sigma\lambda_0}{4\pi}}$$

$$= \frac{2\pi d}{\lambda_0}\sqrt{\frac{c\mu_0\sigma d}{4\pi}\left(\frac{\lambda_0}{d}\right)} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{\lambda_0}}\sqrt{\frac{c\mu_0\sigma d}{4\pi}}$$

(7)

$\sqrt{\frac{c\mu_0\sigma d}{4\pi}}$ er víddarlaus fasti

fyrir kopar með $\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m
og $d = 1 \cdot 10^{-6}$ m (micron) fæst $\sim$ 41.7

og $d = 100$ n $\sim$ 13.2

$d = 10$ n $\sim$ 4.2

köllum $C_d = \sqrt{\frac{c\mu_0\sigma d}{4\pi}}$

$$A = \exp(ik_2 d) = \exp\left(2\pi i\sqrt{\frac{d}{\lambda_0}}C_d - 2\pi\sqrt{\frac{d}{\lambda_0}}C_d\right) = \exp\left\{2\pi\sqrt{\frac{d}{\lambda_0}}C_d(i-\ldots\right.$$

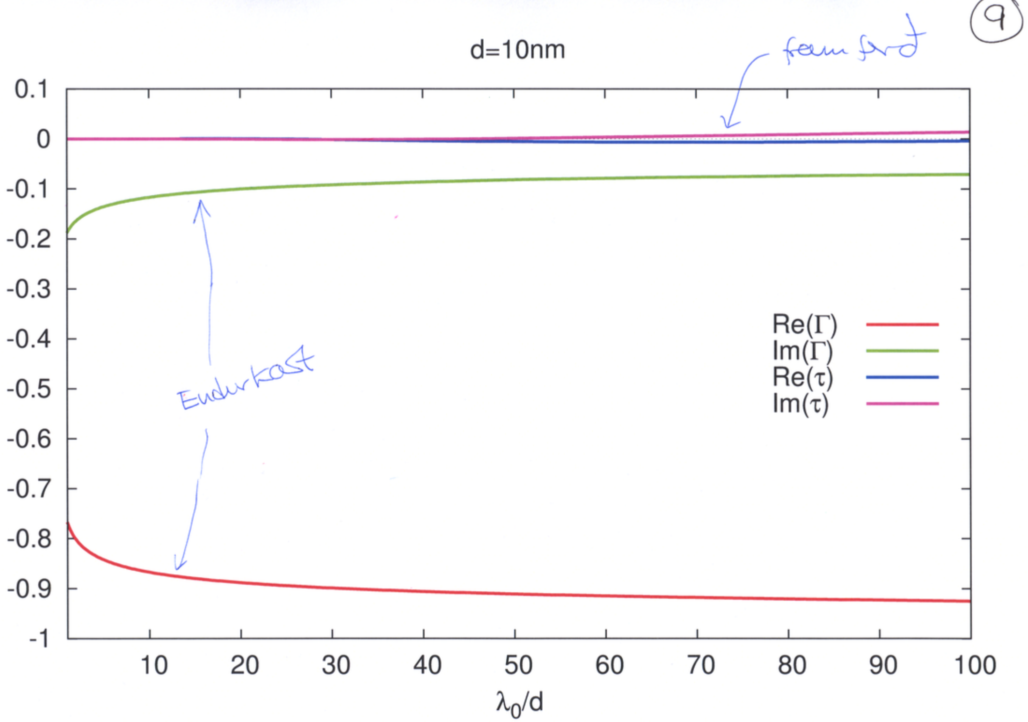
$$C = \frac{\eta_0}{\eta_2} = \frac{1}{1-i}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\frac{\sigma}{\pi f \mu_0}} = \frac{1}{1-i}\sqrt{\frac{\sigma d c \mu_0}{\pi}\left(\frac{\lambda_0}{d}\right)}$$
$$= \frac{2}{1-i}\left(\frac{\lambda_0}{d}\right)^{1/4} C_d$$

(8)

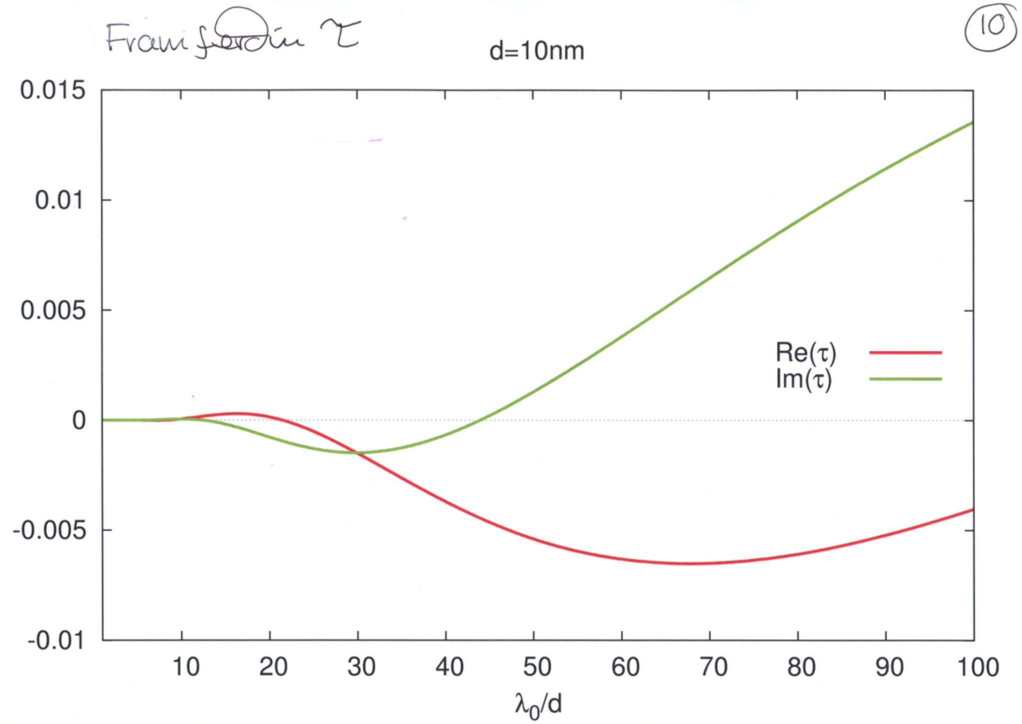
$$\Gamma = \frac{E_{ro}}{E_{io}} \quad \text{og} \quad \tau = \frac{E_{to}}{E_{io}}$$

Veljum $d = 10$ nm $\rightarrow C_d = 4.2$

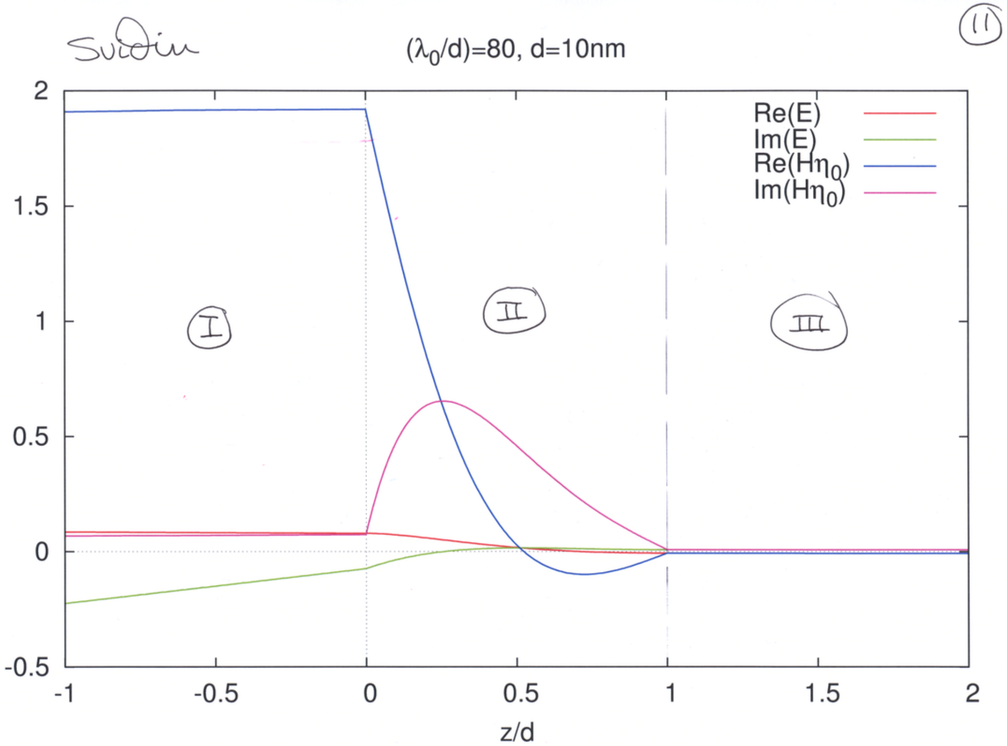
og reiknum á myndum



9
d=10nm
Re(Γ)
Im(Γ)
Re(τ)
Im(τ)
Endurkast
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.7
-0.8
-0.9
-1
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
λ0/d



10
d=10nm
Re(τ)
Im(τ)
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
λ0/d



11
Sviðin
(λ0/d)=80, d=10nm
Re(E)
Im(E)
Re(Hη0)
Im(Hη0)
I
II
III
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
z/d