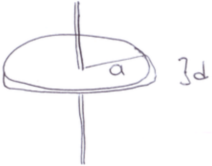
5



$I(t) = I\cos(\omega t)$

$d \ll a$ ← sleppum jaðarhrifum

$\hat{\phi}$ - samhverfa í sívalningshnitum

Gerum ráð fyrir $\bar{E}(r,z) = E(r,z)\,\hat{a}_z$

$\bar{B}(r,z) = B(r,z)\,\hat{a}_\phi$

Tímaóháða lausnin er $\bar{E} = E\hat{a}_z$. Hér sjáum við að hún er nálgun

<u>Milli platna</u>

$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0 \qquad \bar{\nabla}\times\bar{E} + i\omega\bar{B} = 0$ (1)

$\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0 \qquad \bar{\nabla}\times\bar{B} - i\omega\underbrace{\epsilon\mu}_{=\frac{\omega}{c^2}}\bar{E} = 0$ (2)

Sivaluingshnit

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} B(r,z) = 0} \qquad \text{i}$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial z} E(r,z) = 0} \qquad \text{ii}$$

$$1 \quad \longrightarrow \quad \boxed{-\frac{\partial}{\partial r} E(r,z) + i\omega B(r,z) = 0} \qquad \text{iii}$$

$$2 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{ r B(r,z) \right\} - \frac{i\omega}{c^2} E(r,z) = 0} \qquad \text{iv}$$

Þessar 4 jöfnur sýna að B og E eru einungis háð hnitunu „r"

→ við fáum 2 tengdar jöfnur (iii) og (iv) fyrir E og B, setjum saman í eina

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}E(r)\right\} + \frac{\omega^2}{c^2}E(r) = 0}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2}$$

Athyglisvert að þetta er bylgjujafna

Við gætum því sagt að þegar $\omega \to 0$ fáum við quasi-statísku lausnina skoðum aðeins liður fyrir liðinn er það vídd

$E \cdot \frac{1}{L^2}$ notum einkennislengd kerfisins hér

„a"

Við þurfum að bera saman $\frac{1}{a^2}$ og $\frac{(2\pi)^2}{\lambda^2}$

eða $\frac{1}{a}$ og $\frac{2\pi}{\lambda}$

→ gamla lausnin fæst þegar $\frac{a}{\lambda} << 1$

~~þegar~~ bylgjulengdin λ er miklu stærri en a

jafnan fyrir $E(r)$ getur lausn á formi Besselfalls iv $\rightarrow$ $$E(r,z) = \frac{c^2}{i\omega}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r B(r,z)\right\}$$

notum í iii

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{c^2}{i\omega}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r B(r,z)\right\}\right] + i\omega B(r,z) = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}B(r)\right\} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{r^2}\right)B(r) = 0$$

Við höfum því

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}E(r)\right\} + k^2 E(r) = 0 \\ &\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}B(r)\right\} + \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right)B(r) = 0 \end{aligned}}$$

veljum nýja breytu $u = kr$ þá verða jöfnurnar

$$\frac{d^2}{du^2}E(u) + \frac{1}{u}\frac{d}{du}E(u) + E(u) = 0$$

$$\frac{d^2}{du^2}B(u) + \frac{1}{u}\frac{d}{du}B(u) + \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)B(u) = 0$$

verða

$$\boxed{\begin{aligned} &E''(u) + \frac{1}{u}E'(u) + E(u) = 0 \\ &B''(u) + \frac{1}{u}B'(u) + \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)B(u) = 0 \end{aligned}}$$

þessar berum við saman við

$$\boxed{f'' + \frac{1}{u}f' + \left(1 - \frac{n^2}{u^2}\right)f = 0}$$

sem hefur regulega lausn (fyrir $u=0$)
Bessel föllin $J_n(u)$

---

skoðum aðeins tvær tengdu jöfnurnar (auðvitað má fá sömu upplýsingar úr nákvæmu lausnunum)
skrifum jöfnur iii og iv sem

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{iii} \quad -\partial_u E - iF = 0 \\ &\text{iv} \quad \frac{1}{u}\partial_u(uF) - iE = 0 \end{aligned}}$$

með $F = cB$

Reynum lausn

$$E(u) = \sum_{i=0}^{\infty} u^i E_i$$

$$F(u) = \sum_{i=0}^{\infty} u^i F_i$$

Reynum upp í annars stigs lausn

$$\text{iii} \rightarrow \partial_u \left\{ E_0 + uE_1 + u^2 E_2 \right\} = -i\left\{ F_0 + uF_1 + u^2 F_2 \right\}$$

$$\text{iv} \rightarrow \frac{1}{u}\partial_u \left\{ uF_0 + u^2 F_1 + u^3 F_2 \right\} = i\left\{ E_0 + uE_1 + u^2 E_2 \right\}$$

$$\text{iii} \rightarrow E_1 + 2uE_2 = -i\left\{ F_0 + uF_1 + u^2 F_2 \right\}$$

$$\text{iv} \quad F_0 + 2uF_1 + 3u^2 F_2 = i\left\{ E_0 u + u^2 E_1 + u^3 E_2 \right\}$$

$$\boxed{\text{tíma óháða lausnin er fast } E \text{ og ekkert } B} \rightarrow \begin{array}{l} E_0 = \alpha_1 \text{ fasti} \\ F_0 = 0 \end{array}$$

$$E_1 + 2u E_2 \simeq -i\{u F_1 + u^2 F_2\}$$

$$2u F_1 + 3u^2 F_2 \simeq i\{\alpha_1 u + u^2 E_1 + u^3 E_2\}$$

$$\rightarrow \quad 2E_2 = -i F_1$$

$$E_1 = 0$$

$$2F_1 = i\alpha_1$$

$$3F_2 = i E_1 = 0$$

$$\rightarrow \quad F_1 = \frac{i}{2}\alpha_1$$

$$E_1 = 0$$

$$E_2 = -\frac{i}{2} F_1 = \frac{1}{4}\alpha_1$$

$$F_2 = 0$$

Lausnin er því

$$\boxed{\begin{aligned} E(u) &= \alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_1 u^2 + \cdots \\ F(u) &= \frac{i}{2}\alpha_1 u + \cdots \end{aligned}}$$

Skoðum aftur nákvæmu lausnina

$$\bar{E}(r) = E(r)\hat{a}_z = A_1 J_0(kr)\hat{a}_z$$

$$\bar{B}(r) = B(r)\hat{a}_\phi = A_2 J_1(kr)\hat{a}_\phi$$

svo gildir iii $\quad \partial_r E(r) = i\omega B(r)$

og $\quad J_0'(z) = -J_1(z)$

$$\hookrightarrow \; -A_1 k J_1(kr) = i\omega A_2 J_1(kr)$$

Gefum okkur A_1 $\longrightarrow$ $A_2 = -\dfrac{A_1 k}{i\omega} = i\dfrac{A_1 k}{\omega} = \dfrac{iA_1}{c}$

Við höfum því

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{E}(r) &= A_1 J_0(kr)\,\hat{a}_z \\ \bar{B}(r) &= \frac{iA_1}{c} J_1(kr)\,\hat{a}_\phi \end{aligned}}$$

Skoðum lausnina f. $kr << 1$

$$J_0(kr) \approx 1 - \frac{(kr)^2}{4} + \cdots$$

$$J_1(kr) \simeq \frac{kr}{2} - \frac{(kr)^3}{16} + \cdots$$

$$\rightarrow \quad \bar{E}(r) \simeq A_1 \left\{ 1 - \frac{(kr)^2}{4} + \cdots \right\} \hat{a}_z$$

$$\bar{B}(r) \simeq \frac{iA_1}{c} \left\{ \frac{kr}{2} - \frac{(kr)^3}{16} + \cdots \right\} \hat{a}_\phi$$

som passar vid lausnirnar fyrir

$F(u) = CB(u)$ og $E(u)$ áður.

Fyrsta rótin í $J_0(kr)$ er þ. $kr \sim 2.405$

–||– $J_1(k)$ –||– $kr \sim 3.832$

↑ fyrir utan $kr = 0$

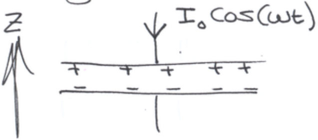
$kr_0 = 2.4$

$\to \frac{2\pi}{\lambda} r_0 = 2.4 \quad \to \quad \frac{r_0}{\lambda} \sim \frac{2.4}{2\pi} \sim 0{,}38$

$\to r_0 \sim 0{,}38 \cdot \lambda$

Við getum ákvarðað A_1 , $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$

þegar $\omega \to 0$ Gauß $\to$ $\bar{E} = -\frac{\rho_s}{\epsilon_0}\hat{z}$



$$\rho_s = \frac{Q}{A} = \frac{I_0 \sin(\omega t)}{\pi a^2 \omega}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \to Q = \frac{I_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$\rho_s \xrightarrow[\omega \to 0]{} \frac{I_0}{\pi a^2} \to \bar{E} = -\frac{I_0 \hat{z}}{\pi a^2 \epsilon_0}$$

$$\to \boxed{A_1 = \pm \frac{I_0}{\pi a^2 \epsilon_0}}$$

Hleðslan er ekki jafndreifð um plöturnar þegar $\omega \neq 0$. Orkan í þéttinum er bæði í rafsviði og segulsviði $\to$ Hér koma bæði fyrir rýmd og span og þess vegna er hægt að finna hermutíðni kerfisins