Stór einsleitur efnisbútur með σ og straumþéttleika $\bar{J} = \hat{a}_z J_0$. Inni í bútnum er gert kúluholrúm með geisla a.

(1) Finnið straumþéttleikann. Gerum ráð fyrir að holrúmið sé í miðju hnitakerfisins.

Einsleit eðlisleiðni

$$\hookrightarrow \quad \left.\begin{aligned} \bar{\nabla}\cdot\bar{J} &= 0 \\ \bar{\nabla}\times\left(\frac{\bar{J}}{\sigma}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \psi = 0 \\ \bar{J} = -\bar{\nabla}\psi \end{cases}$$

Dæminu svipar til dæmis í bók um leiðandi kúlu í föstu ytra rafsviði, nema jaðarskilyrði eru á annan hátt.

$$\Phi(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n R^n + B_n R^{-(n+1)} \right] P_n(\cos\theta) \qquad R \geq a$$

Jaðarskilyrðinem

í kúluhnitum

$$\Phi(R,\theta) = -J_0 z = -J_0 R\cos\theta \qquad \underline{\text{þegar } R \gg a} \quad (1)$$

↑ því þá er $-\bar{\nabla}\Phi = \bar{J} = \hat{a}_z J_0$

En í $R = a$?

Í dæminu ~~með~~ ~~leiðandi~~ kúlu var $V(a,\theta)=0$, en hér er öruggt ~~að~~ enginn straumur er inn ~~eða~~ út úr kúlurúminu

$$\rightarrow \quad \hat{a}_R \cdot \bar{J}(a,\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{a}_R \cdot \bar{\nabla}\Phi(a,\theta) = 0$$

eða $\left.\partial_R \Phi(R,\theta)\right|_{R=a} = 0$ 2

Jaðarskilyrði 1 $\to$ $A_n = 0$ ef $n \neq 1$, $A_1 = -J_0$
því $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

$$\to \Phi(R,\theta) = -J_0 R \cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

Fyrsti liðurinn í summunni á við flæði inn eða út úr kúlunni, samanber Coulomb, $\to B_0 = 0$

$$\Phi(R,\theta) = \left(\frac{B_1}{R^2} - J_0 R\right)\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

Nú þurfum við að uppfylla jaðarskilyrði ② $\partial_R \Phi(R,\theta)\Big|_{R=a} = 0$

$$0 = \left(-2\frac{B_1}{a^3} - J_0\right)\cos\theta - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) B_n \frac{1}{a^{n+2}} P_n(\cos\theta)$$

sem verður aðeins uppfyllt með $B_n = 0$ fyrir $n \geq 2$

og $B_1 = -\dfrac{a^3 J_0}{2}$

$$\rightarrow \quad \Phi(R,\theta) = -J_0\left(\underbrace{\left(\frac{a}{R}\right)^3 \frac{1}{2}}_{\text{Væntanlega þéttast flæðilínur }\bar{J}\text{ nærri kúlu (+ formerki)}} + \underbrace{1}_{\text{hegðunin fjarri kúluholi}}\right) R\cos\theta, \qquad R \geq a$$

$$\bar{J}(R,\theta) = -\hat{a}_R \partial_R \Phi - \hat{a}_\theta \frac{1}{R} \partial_\theta \Phi$$

$$= +\hat{a}_R \left\{ J_0 \left[1 - \left(\frac{a}{R}\right)^3 \right] \cos\theta \right\}$$

$$- \hat{a}_\theta \left\{ J_0 \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^3 \right] \sin\theta \right\} \qquad R \geq a$$

Við getum líka skrifað {setjum $y = 0$, vegna samhverfu}

$$\Phi(x,z) = -J_0 \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R(x,z)}\right)^3 + 1 \right\} z$$

með

$$R(x,z) = \sqrt{x^2 + z^2}$$

og síðan
$$\bar{J} = -\bar{\nabla}\Phi = -\hat{a}_x \partial_x \Phi - \hat{a}_z \partial_z \Phi$$
$$= -\hat{a}_x \frac{3}{2} J_0 \frac{a^3 x}{R^5} z$$
$$+ \hat{a}_z J_0 \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^3 \left[1 - \frac{3z^2}{R^2}\right] + 1 \right\}$$

Þetta form er einfaldara til að gera graf af vigursviðinu $\bar{J}$.

---

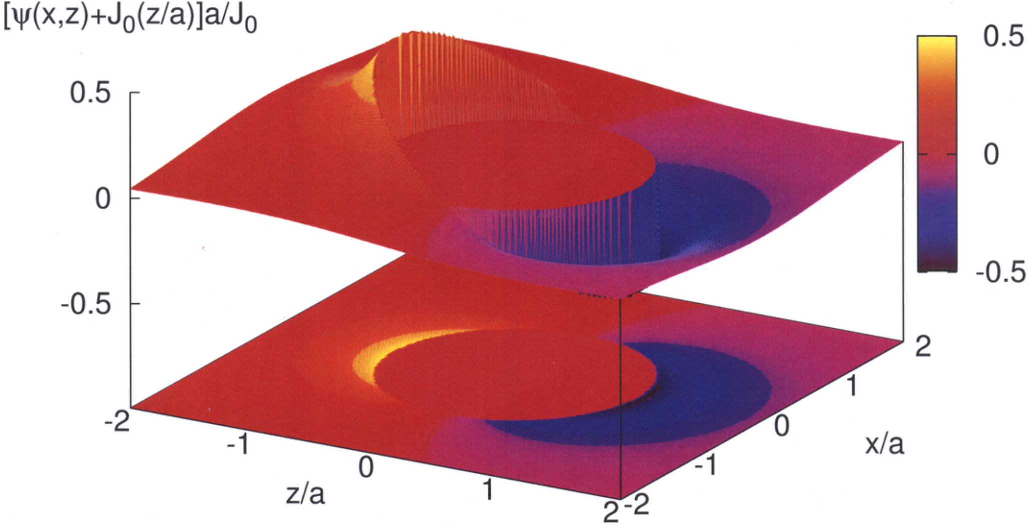
(2) Í dæminu um kúluna skautast yfirborðshleðslur á yfirborði hennar, sviðslínur enda því á því. Þar voru skilyrðin $V(a,\theta) = 0$, kúlan var við fasta spennu.

Hér forðast flæðilínur $\bar{J}$ yfirborðið, straumurinn um það er 0.

$$\rightarrow \quad \hat{a}_R \cdot \bar{\nabla}\Phi(a,\theta) = 0$$

„Mattið"

það er betra að skoða þetta graf á skjá -> sjá aukaefni....



Litur örvanna segir til um magnið