① Löng einangrandi sívalningsskel með geisla a (1)

$$\rho_s(\theta) = \rho_{s0}\sin(3\phi)$$

---

① finna $V(r,\phi)$ innan og utan skeljar

Almenna lausnin fyrir z-einsleit sívalningskerfi, sem eru lotubundin í ϕ-átt, er

$$V_n(r,\phi) = r^n\left\{A_n\sin(n\phi) + B_n\cos(n\phi)\right\} + r^{-n}\left\{A_n'\sin(n\phi) + B_n'\cos(n\phi)\right\}$$

<u>Innan</u> $r<a$

$\sin(3\phi)$ er oddstætt fall á bilinu $[0,2\pi]$ og engin línuhleðsla er innan sívalnings

$$\rightarrow V_n^i(r,\phi) = r^n A_n \sin(n\phi)$$

<u>utan</u> $r > a$

Sívalningurinn er í heild óhlaðinn, með oddstæða hleðsludreifingu

$$\rightarrow V_n^o(r,\phi) = r^{-n} A_n' \sin(n\phi)$$

Lausnunum verður að skeyta saman í $r=a$ með hleðsludreifinguna á yfirborðinu í huga

$$\hat{a}_{n_2}\cdot(\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s$$

Hér gildir $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E}$ og $\bar{E} = -\bar{\nabla} V$

$$\rightarrow \left[\partial_r V^o(r,\phi) - \partial_r V^i(r,\phi) \right] \Big|_{r=a} = -\frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0} \sin(3\phi) \qquad (*)$$

og

$$V^o(r,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n'}{r^n} \sin(n\phi)$$

$$V^i(r,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin(n\phi)$$

Við þurfum því að liða $\rho_s(\phi)$ í $\sin(n\phi)$-röð

$\rightarrow$ aðeins $\underline{n=3}$ liðurinn kemur fyrir

$$V^o(r,\phi) = \frac{A'}{r^3}\sin(3\phi) \qquad r>a$$

$$V^i(r,\phi) = A\,r^3 \sin(3\phi) \qquad r<a$$

$$(*) \rightsquigarrow \left\{ -3\frac{A'}{r^4}\sin(3\phi) - 3Ar^2\sin(3\phi) \right\}\Bigg|_{r=a} = -\frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0}\sin(3\phi)$$

$$\rightarrow\ -3\frac{A'}{a^4} - 3Aa^2 = -\frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0}$$

Þetta var um brot í afleiðunni í $r=a$, <u>en mættið</u> sjálft er samfellt í $r=a$

$$\rightarrow\ \frac{A'}{a^3} = Aa^3$$

5

samanverdur þui

$$-6Aa^2 = -\frac{\rho_{so}}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad A = \frac{\rho_{so}}{6\epsilon_0 a^2}$$

$$A' = \frac{\rho_{so} a^4}{6\epsilon_0}$$

þui fæst

$$V^o(r,\phi) = \frac{\rho_{so} a}{6\epsilon_0}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin(3\phi) \qquad r>a$$

$$V^i(r,\phi) = \frac{\rho_{so} a}{6\epsilon_0}\left(\frac{r}{a}\right)^3 \sin(3\phi) \qquad r<a$$

Reynum til gamans aðra aðferð, sem ég ætlast ekki til að þið beitið á þessu stigi.

$$V(\bar{x}) = \frac{1}{\epsilon_0}\int d\bar{x}' \frac{\rho(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$$

og í sívalningshnitum þá verður hér

$$\rho(\bar{x}) = \rho_0 \frac{a}{r}\delta(r-a)\sin(3\phi)$$

$$\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} dk\, e^{im(\phi-\phi')} J_m(kr) J_m(kr') e^{-k(z_>-z_<)}$$

$$\text{ef } z' < z \longrightarrow \begin{cases} z_> = z \\ z_< = z' \end{cases}$$

$$\text{ef } z' > z \longrightarrow \begin{cases} z_> = z' \\ z_< = z \end{cases}$$

z'-heildið er því

$$\int_{-\infty}^{0} dz' e^{+kz'} + \int_{0}^{\infty} dz' e^{-kz'} = \frac{2}{k}$$

Þar sem við gerum ráð fyrir ~~að~~ $z=0$, kerfið er einsleitt í z-átt.

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma_0 a}{\epsilon_0} \int_0^\infty r'dr'dk \int_0^{2\pi} d\phi' \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr) J_m(kr') \frac{1}{r'} \delta(r-a) \cdot e^{im(\phi-\phi')} \sin(3\phi')$$

notum

$$\int_0^{2\pi} d\phi' e^{im(\phi-\phi')} \sin(3\phi') = \frac{1}{2i} e^{im\phi} \int_0^{2\pi} d\phi' \left\{ e^{i(3-m)\phi'} - e^{-i(3+m)\phi'} \right\}$$

(8)

$$= \frac{e^{im\phi}}{2i} 2\pi \left\{ \delta_{m,3} - \delta_{m,-3} \right\}$$

og munum eftir að $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

$$\rightarrow J_{-3}(x) J_{-3}(y) = J_3(x) J_3(y)$$

þá fæst

$$V(\bar{x}) = \frac{\rho_{s0} a}{\epsilon_0} 4\pi \sin(3\phi) \int_0^\infty r' dr' dk \, J_3(kr) J_3(kr') \frac{\delta(r'-a)}{2\pi k r'}$$

$$= \frac{\rho_{s0} a}{\epsilon_0} 2 \sin(3\phi) \int_0^\infty \frac{dk}{k} J_3(kr) J_3(ka)$$

þetta heildi er ekki einfalt, en fæst úr GR 6.574.1-3

$$V(\bar{x}) = \frac{\rho_{s0}\, a}{6\,\epsilon_0} \sin(3\phi) \cdot \begin{cases} \left(\frac{a}{r}\right)^3 & r > a \\ \left(\frac{r}{a}\right)^3 & r < a \end{cases}$$

---

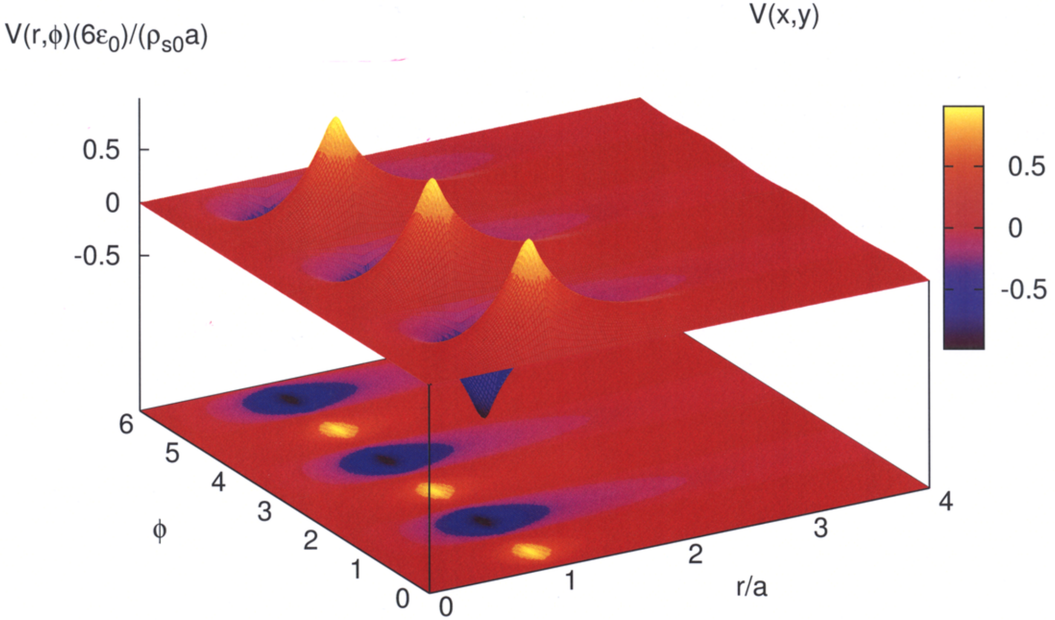
sama svar og áður, það er vel þess virði að líta á heildin í Gradshteyn

---

(3) Heildarhleðsla sívalningsins er 0

$\longrightarrow$ þess vegna hverfur V mjög fjarri honum

þetta er dæmi um <u>sexskaut</u> (hexapole)


V(r,ϕ)(6ε0)/(ρs0a)
V(x,y)
0.5
0
-0.5
6
5
4
3
2
1
0
ϕ
0
1
2
3
4
r/a
0.5
0
-0.5

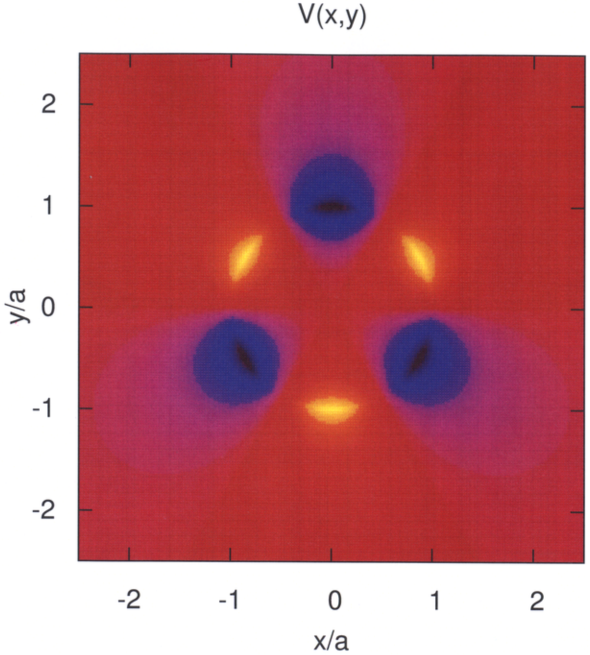
Hér kemur svo loks refsiðið

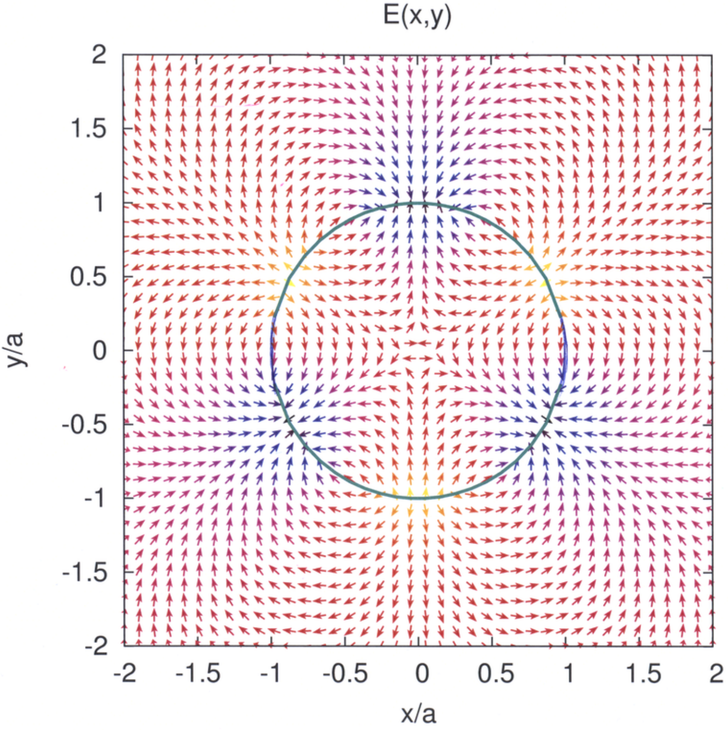
$$\bar{E} = -\bar{\nabla} V = -\hat{a}_r \partial_r V - \frac{1}{r}\partial_\phi V \hat{a}_\phi$$

$$\bar{E}^i = -\hat{a}_r \frac{\rho_{s0}}{2\epsilon_0}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin(3\phi) - \hat{a}_\phi \frac{\rho_{s0}}{2\epsilon_0}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos(3\phi) \qquad \underline{r < a}$$

$$\bar{E}^o = \hat{a}_r \frac{\rho_{s0}}{2\epsilon_0}\left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin(3\phi) - \hat{a}_\phi \frac{\rho_{s0}}{2\epsilon_0}\left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos(3\phi)$$

Gaman er að sjá að $\bar{E}$ getur haft þátt samsíða yfirborðinu, það er líka ekki leiðari!
Ég bæti við 2 gröfum til viðbótar


V(x,y)
2
1
0
-1
-2
y/a
-2
-1
0
1
2
x/a


E(x,y)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
y/a
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
x/a