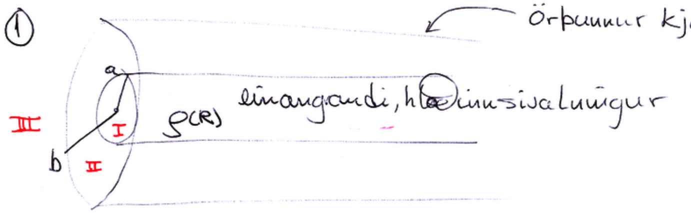
①



$\rho(R) = \rho_0 \frac{R}{a}$, Notum Gauß lögmálið þ.s. ρ er aðeins háð R

$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Til þess að nota lögmál Gauß á svæði I þurfum við $Q(R)$, þá heildarhleðslu sem er innan geisla R

$$Q(R) = L\cdot\int_0^R R'dR'd\phi\ \rho(R')$$

mjög langur vír, þ.a. við horfum fram hjá því sem gerist á endunum

②

$$Q(R) = \frac{L\cdot 2\pi\rho_0}{a}\int_0^R dR'\, R'^2 = 2\pi\rho_0\frac{L}{a}\frac{R^3}{3}$$

rétt við

Rafsviðið er einungis í $\hat{a}_R$-átt óháð ϕ eða z

$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{Q(R)}{\epsilon_0} = \frac{2\pi}{3\epsilon_0}\frac{L}{a}(\rho_0 R^3)$$

$$\|$$

$$L\cdot 2\pi R E_R = \frac{2\pi}{3\epsilon_0}\frac{L}{a}(\rho_0 R^3) \rightarrow \boxed{\bar{E} = \frac{1}{3a\epsilon_0}\rho_0 R^2\hat{a}_R}$$

á svæði I

Á svæði II er $Q = Q(a) = \frac{2\pi}{3}\frac{L}{a}\rho_0 a^3 = \frac{2\pi}{3}\rho_0 a^2 L$

Gauß leiðir þá til

$$L\cdot 2\pi R E_R = \frac{2\pi}{3\epsilon_0}\rho_0 a^2 L \rightarrow \boxed{\bar{E} = \frac{1}{3R\epsilon_0}\rho_0 a^2\hat{a}_R}$$

á svæði II

③

Ytri sívalningurinn er í upphafi óhlaðinn. Innan á honum verður að jafndreifast öll hleðslan $-Q(a)$ (Í rafstöðufræði enda allar sviðslínur á hleðslum) utan á honum skaudast því ytriborðshleðsla sem jafngildir $+Q(a)$ (óhlaðinn í upphafi).

Séð utan frá er heildarhleðsla kerfisins $+Q(a)$ og hún er með sívalningssamhverfu

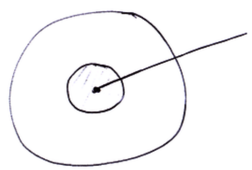
→ á svæði III leiðir lögmál Gauß til

$$\boxed{\bar{E} = \frac{1}{3R\epsilon_0}\rho_0 a^2\hat{a}_R}$$

Eins og á svæði II

④

Rafmættið



Vel beinan heildunarveg í $\hat{a}_R$ átt

Byrjum í miðju og veljum spennu 0 á samhverfuás

$$V_2 - V_1 = -\int_{P_1}^{P_2}\bar{E}\cdot d\bar{l}$$

$d\bar{l} = \hat{a}_R dR$

Á svæði I fæst þá

$$V(R) - 0 = -\int_0^R \bar{E}_I\cdot d\bar{l} = -\int_0^R dR'\frac{\rho_0}{3a\epsilon_0}R'^2$$

$$= -\frac{\rho_0}{3a\epsilon_0}\left\{\frac{R^3}{3}\right\}\Big|_0^R = \boxed{-\frac{\rho_0 R^3}{9a\epsilon_0}}$$

⑤

á ytriborðinu í $R=a$ er þá $V(a) = -\frac{\rho_0 a^2}{9}$

því reiknum við á svæði II

$$V(R)-V(a) = -\int_a^R \bar{E}_{II}\cdot d\bar{l} = -\int_a^R dR' \frac{\rho_0 a^2}{3R'\epsilon_0}$$

$$\rightarrow V(R) = -\frac{\rho_0 a^2}{9\epsilon_0} - \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\int_a^R dR' \frac{1}{R'} = -\frac{\rho_0 a^2}{9\epsilon_0} - \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\ln\left(\frac{R}{a}\right)$$

$$\boxed{V(R) = -\frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\left\{\frac{1}{3} + \ln\left(\frac{R}{a}\right)\right\}}$$

því fæst $V(b) = -\frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\left\{\frac{1}{3} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right\}$ sem er spennan á ytri sívalningnum, skelinni. kjörleiðari spennan alls staðar á honum

⑥

Á svæði III fæst því

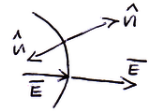
$$V(R)-V(b) = -\int_b^R \bar{E}_{III}\cdot d\bar{l} = -\int_b^R dR' \frac{\rho_0 a^2}{3R'\epsilon_0}$$

$$V(R) = -\frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\left\{\frac{1}{3} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right\} - \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\ln\left(\frac{R}{b}\right)$$

$$\boxed{V(R) = -\frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\left\{\frac{1}{3} + \ln\left(\frac{R}{a}\right)\right\}}$$

sama og fékkst á svæði II

ytri sívalningurinn fellur saman við jafnspennuflöt frá þeim fyrir, hann hefur því engin bein áhrif. Á honum skautast ytriborðs hleðsla með sitt hvort formerkið



⑦

$$V(R) = -\frac{\rho_0 R^3}{9a\epsilon_0} \qquad R<a$$

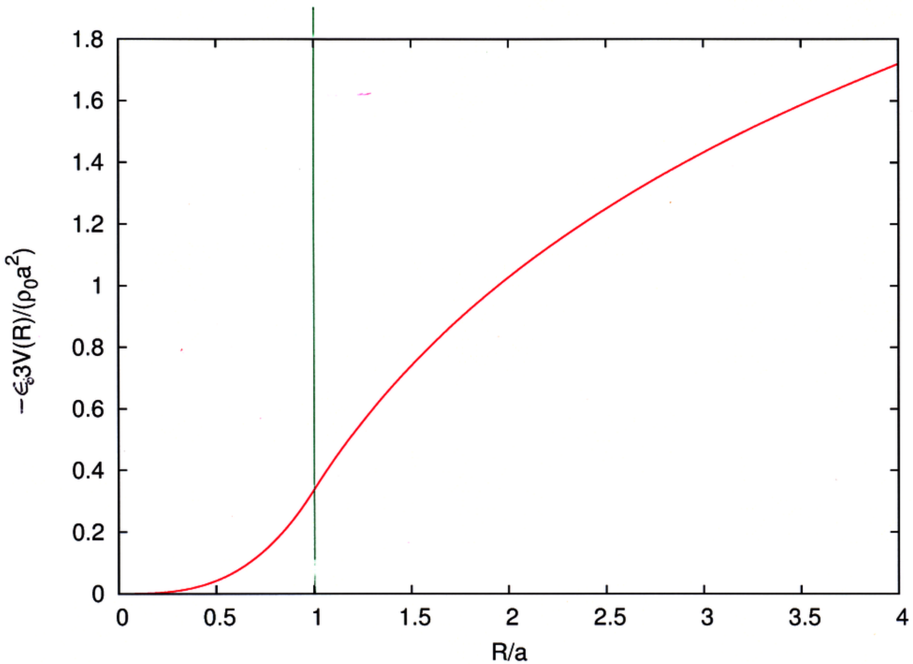
$$V(R) = -\frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\left\{\frac{1}{3} + \ln\left(\frac{R}{a}\right)\right\} \qquad R>a$$

Endurritum sem

$$V(R) = -\frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\left(\frac{R}{a}\right)^3\frac{1}{3} \qquad R<a$$

$$V(R) = -\frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\left\{\frac{1}{3} + \ln\left(\frac{R}{a}\right)\right\} \qquad R>a$$

⑧



(2)

Rafsvið gefið sem

$$\bar{E}(x,y,z) = \left(0,\ E_0 \frac{x}{L},\ 0\right)$$

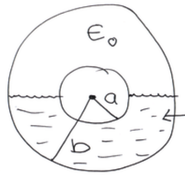
Athugum $\bar{\nabla}\times\bar{E} = \hat{a}_z \cdot \frac{\partial E_y}{\partial x}$ hér

$$= \hat{a}_z \cdot \frac{E_0}{L} \neq 0$$

Uppfyllir ekki skilyrðið fyrir Rafstöðufræði

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = 0$$

(1) Tveir sammiðja sívalningar



$a, b << L$ lengd þeirra

Rafsvarinn brýtur ekki „radial"-samhverfu $\bar{E}$

(1) Finna rýmd

Nota verður almenna framsetn Gauß lögmáls

$$\oint_S \bar{D}\cdot d\bar{S} = Q$$ hleðslan á innri skel

N: Norður
s: suður

$$\to \epsilon_0 \pi R L\, E(R) + \epsilon_r \epsilon_0 \pi R L\, E(R) = Q$$

$$\to (1+\epsilon_r)\epsilon_0 \pi R L\, E(R) = Q$$

$$\to E(R) = \frac{Q}{\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0 R L} = \frac{(Q/L)}{\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0 R}$$

Við þurfum spennumun flatanna

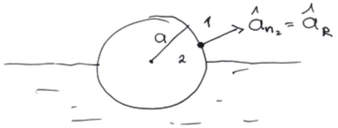
$$V_b - V_a = -\int_a^b \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\int_a^b dR\, E(R) = -\frac{(Q/L)}{\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0}\int_a^b \frac{dR}{R}$$

$$= -\frac{(Q/L)}{\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0}\left\{\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right\}$$

$$\frac{C}{L} = \frac{Q/L}{|V_b - V_a|} = \frac{\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

(2) Hve stór hluti Q er á hvorum hálf sívalningi

$$\hat{a}_{n_2}\cdot(\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s$$



$$\hat{a}_R \cdot \bar{D}_N(a) = \rho_s$$

$$\to \epsilon_0 E(a) = \rho_s$$

$$\to \frac{Q/L}{\pi(1+\epsilon_r)a} = \rho_s^N$$

og á suður sívalningi fæst

$$\epsilon_0 \epsilon_r E(a) = \rho_s^S \to \frac{\epsilon_r Q/L}{\pi(1+\epsilon_r)a} = \rho_s^S$$

Heildar hleðslan á sívalningshelming er því

$$Q_N = \pi a L \cdot \rho_s^N = \frac{Q}{(1+\epsilon_r)}$$

$$Q_S = \pi a L \, \rho_s^S = \frac{\epsilon_r Q}{(1+\epsilon_r)}$$

$$Q_N + Q_S = Q$$

③ Rúmhleðsla?

Hún væri skilgreind með

$$\rho_P = -\overline{\nabla}\cdot\overline{P}$$

$$\overline{D} = \epsilon_0 \overline{E} + \overline{P}$$

$$\to \overline{P} = \overline{D} - \epsilon_0 \overline{E}$$

Í N-helmingi er $\overline{P} = 0$

Í S-helmingi, í rafsvara er

$$E(R) = \frac{(Q/L)}{\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0 R}$$

$$D_s(R) = \epsilon_r E(R)$$

$$\overline{P}_N(R) = \frac{(Q/L)}{\pi(1+\epsilon_r)}\left(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_0} - 1\right)\frac{1}{R}\,\hat{a}_R$$

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{P}_N(R) = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R P_R^N\right) = 0$$

④ Af þessu sést að hleðslan á ytri sívalningi er $-Q$, $\rho_P = 0$

⑤ Hér er þægilegt að nota

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V dv\, \overline{D}\cdot\overline{E} = \frac{1}{2}\int_N dv\, \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\int_S dv\, \epsilon_r\epsilon_0 E^2$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_0\frac{(1+\epsilon_r)}{2}\int_V dv\, E^2 = \epsilon_0\frac{(1+\epsilon_r)}{4}2\pi\int_a^b R\,dR\,\frac{1}{R^2}\frac{(Q/L)^2 L}{\{\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0\}^2}$$

$$W_e = \frac{\epsilon_0(1+\epsilon_r)}{2\{\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0\}^2}\pi\left(\frac{Q}{L}\right)^2 L\int_a^b dR\,\frac{1}{R} = \frac{\epsilon_0(1+\epsilon_r)}{\{\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0\}^2}\pi\left(\frac{Q}{L}\right)^2\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ef Q er haldið föstu og hæð rafsvarandi vökva haldið föstu þá er ljóst að W_e eykst ef b ykist aðeins eða a minnkaði aðeins

$$W_e = \frac{1}{2\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0}\left(\frac{Q^2}{L}\right)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

sem líka mætti finna með því að nota (3-180a-c)

Krafturinn á ytri sívalninginn er

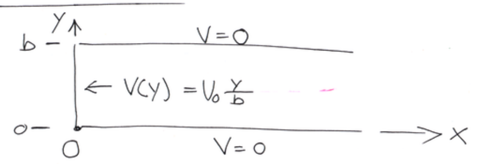
$$\overline{F}_Q = -\overline{\nabla}W_e = -\hat{a}_R\left\{\frac{Q^2}{2\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0 b L}\right\}$$

m.t.t. b

með stefnu að innri sívalningi

3. skammtur

①



Dæmið er hliðstætt við dæmi í fyrirlestri, nema hvað mættið á endaplötunni er $V(y) = V_0 \frac{y}{b}$ hér

Eins og áður fæst því lausn sem er línuleg samantekt grunnlausna jöfnu Laplace

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n x}\sin(k_n y), \quad k_n = \frac{n\pi}{b}$$

Lausnin uppfyllir jaðarskilyrðin á láréttu plötunum. En við þurfum að ákvarða liðunarstuðlana t.d. a.

$$V(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n y) = V_0\frac{y}{b}, \quad 0<y<b$$

Við notum enn að föllin $\sin(k_m y)$ mynda hornréttan fullkominn grunn á bilinu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^b dy\, C_n \sin(k_n y) \sin(k_m y) = \frac{V_0}{b} \int_0^b dy\, y \sin(k_m y)$$

$\rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n b \int_0^b \frac{dy}{b} \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \sin\left(m\pi \frac{y}{b}\right) = V_0 b \int_0^b \frac{dy}{b} \frac{y}{b} \sin\left(m\pi \frac{y}{b}\right)$$

breytuskipti „$\frac{y}{b} \rightarrow u$" gefa

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^1 du \sin(n\pi u) \sin(m\pi u) = V_0 \int_0^1 du\, u \sin(m\pi u)$$

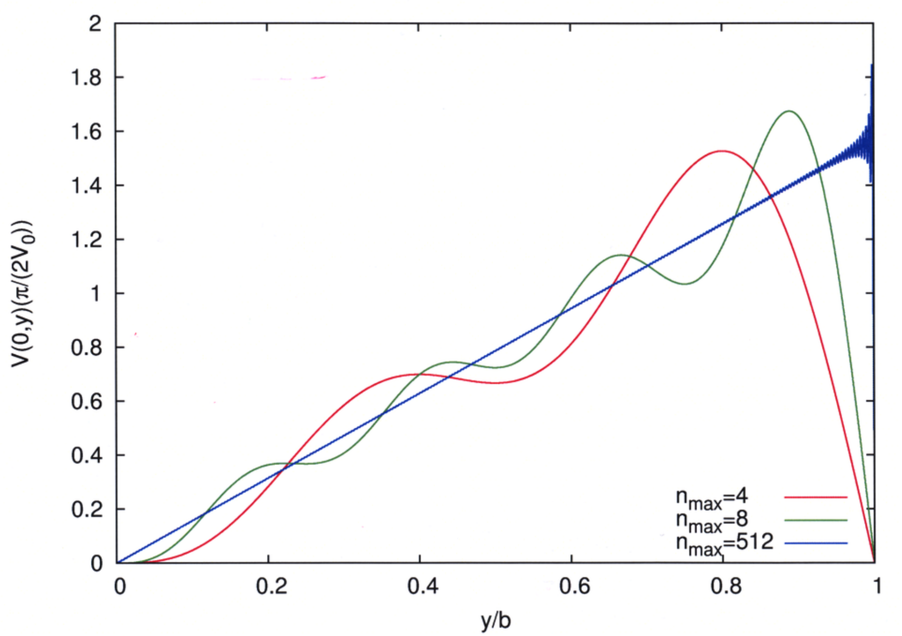
$$\rightarrow C_m \frac{1}{2} = -V_0 \frac{\cos(m\pi)}{m\pi} = \frac{V_0}{m\pi} (-1)^{m+1}$$

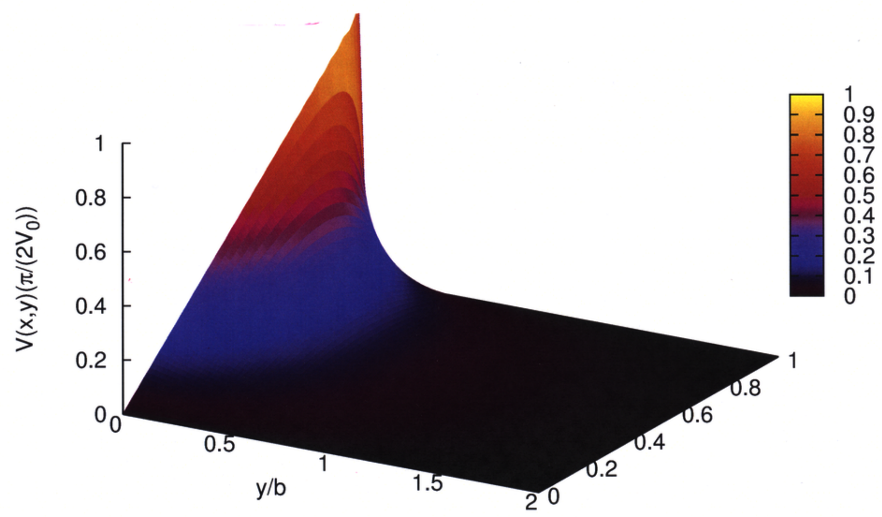
$$\left\{ \text{því} \int_0^1 du \sin(n\pi u) \sin(m\pi u) = \frac{1}{2} \delta_{n,m} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ef } n = m \\ 0 & \text{ef } n \neq m \end{cases} \right\}$$

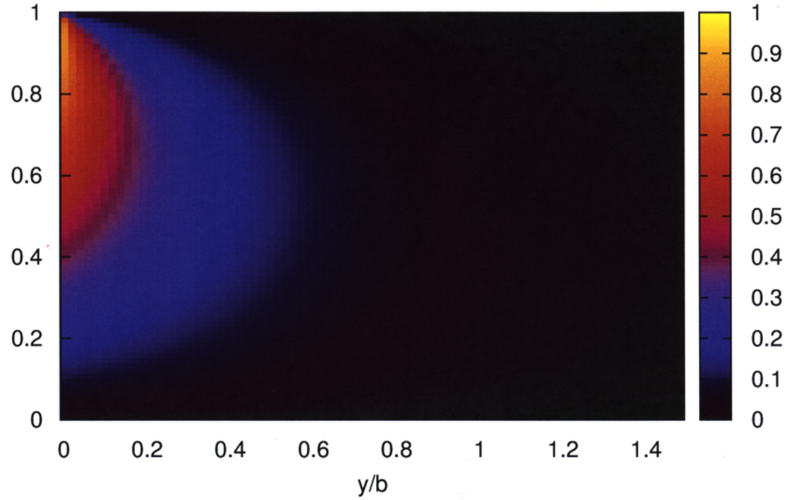
$$\rightarrow C_m = \frac{2V_0}{m\pi} (-1)^{m+1}$$ og lausnin verður

$$V(x,y) = \frac{2V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n\pi \frac{x}{b}} \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right)$$

Reynum í grafík, áður en áfram er haldið







(2) Yfirborðshleðsla á endaplötu

2 | 1 $\rightarrow \hat{a}_{n_2}$

Jaðarskilyrðin eru $\hat{a}_{n_2}\cdot(\bar{D}_1-\bar{D}_2)=\rho_s$

þ.s. $\hat{a}_{n_2}$ er vigur út úr efni númer 2

$$\rightarrow \quad \hat{a}_x\cdot\bar{D}=\rho_s \quad \rightarrow \quad \hat{a}_x\cdot\epsilon_0\bar{E}=\rho_s$$

Þá $\epsilon_0 E_x=\rho_s$ og $\bar{E}=-\bar{\nabla}V$

$$V(x,y)=\frac{2V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-n\pi\frac{x}{b}}\sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right)$$

$$\rightarrow \quad E_x(x,y)=-\frac{\partial}{\partial x}V(x,y)=\frac{2V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{n\pi}{b}e^{-n\pi\frac{x}{b}}\sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right)$$

$$\rho_s(y)=\frac{2V_0\epsilon_0}{b}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right)$$

þessa röð má summa

$$\rho_s(y)=\frac{2V_0\epsilon_0}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}\sin\left((n+1)\pi\frac{y}{b}\right)=\frac{2V_0\epsilon_0}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\sin\left((n+1)\pi\frac{y}{b}\right)$$

$$=\frac{2V_0\epsilon_0}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{e^{i\frac{(n+1)\pi y}{b}}-e^{-i\frac{(n+1)\pi y}{b}}\right\}\frac{1}{2i}$$

$$=\frac{2V_0\epsilon_0}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{e^{\frac{i\pi y}{b}}\left(-e^{\frac{i\pi y}{b}}\right)^n-e^{-\frac{i\pi y}{b}}\left(-e^{-\frac{i\pi y}{b}}\right)^n\right\}\frac{1}{2i}$$

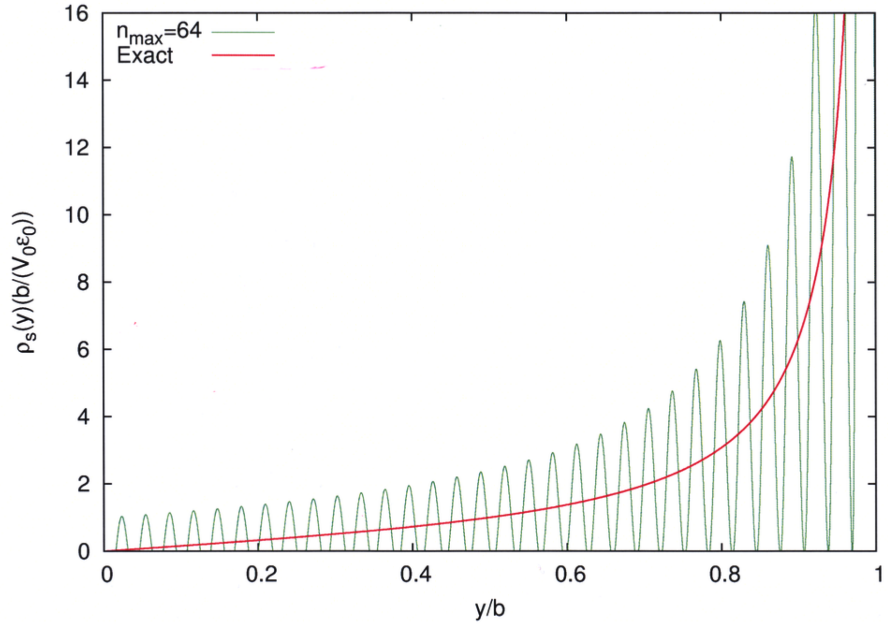
$$=\frac{2V_0\epsilon_0}{2bi}\left\{\frac{e^{\frac{i\pi y}{b}}}{1+e^{\frac{i\pi y}{b}}}-\frac{e^{-\frac{i\pi y}{b}}}{1+e^{-\frac{i\pi y}{b}}}\right\}$$

þ.s. notað er $\sum_{k=0}^{\infty}aq^k=\frac{a}{1-q}$, $|q|<1$

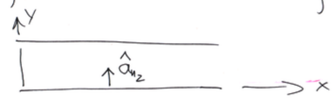
$$\rho_s(y)=\frac{2V_0\epsilon_0}{b\cdot 2i}\left\{\frac{e^{\frac{i\pi y}{b}}-e^{-\frac{i\pi y}{b}}}{2+e^{\frac{i\pi y}{b}}+e^{-\frac{i\pi y}{b}}}\right\}=\frac{2V_0\epsilon_0}{b2}\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)}\right\}$$

$$=\frac{V_0\epsilon_0}{b}\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)}{\left\{1+\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right\}}$$

Reynum þetta með grafík. Hér er rétt að benda á að samleitni röðarinnar sé ekki góð og nákvæma lausnin er með sérstöðupunkt í $y=b$



③ yfirborðshleðsla í lægri láréttu plötunni



$$\hat{a}_{n_2} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s$$

$$\rightarrow \hat{a}_y \cdot \bar{D} = \rho_s \quad \rightarrow \quad \epsilon_0 E_y = \rho_s$$

$$E_y(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y} V(x,y)\Big|_{y=0} = -\frac{2V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n\pi\frac{x}{b}} \frac{n\pi}{b}$$

$$\rightarrow \rho_s(x) = -\frac{2V_0\epsilon_0}{b} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n\pi\frac{x}{b}}$$

$$= -\frac{2V_0\epsilon_0}{b} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(n+1)\pi\frac{x}{b}}$$

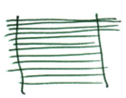
$$= -\frac{2V_0\epsilon_0}{b} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi x}{b}} \left(-e^{-\frac{\pi x}{b}}\right)^n$$

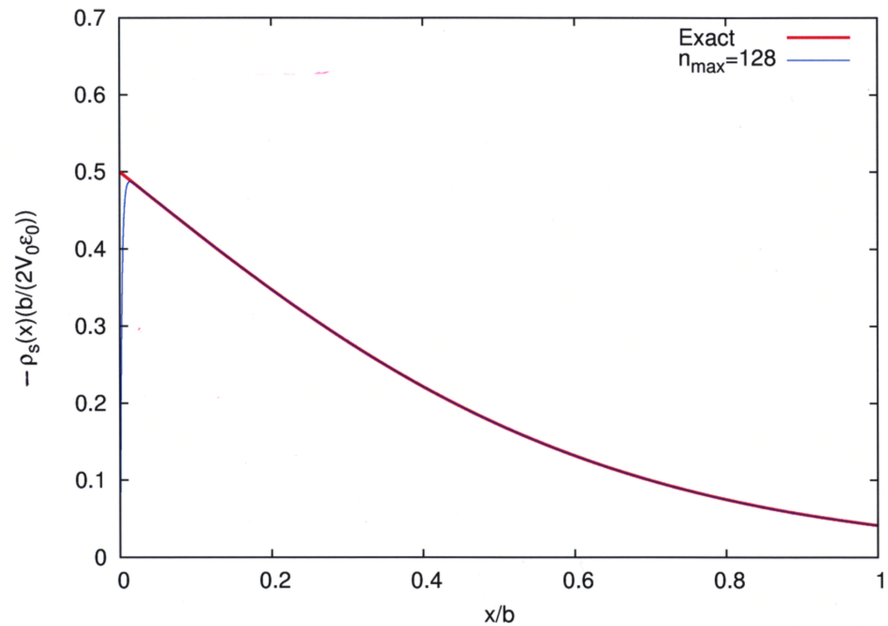
$$= -\frac{2V_0\epsilon_0}{b} \frac{e^{-\frac{\pi x}{b}}}{1 + e^{-\frac{\pi x}{b}}} = \rho_s(x)$$

Summuraðir hér eru á mörkum þess að vera samleitnar, eins og gröfin sýna. Analýtísk summuna má gera með samleitni þáttum sem síðan eru látnir hverfa ($\epsilon \rightarrow 0$).

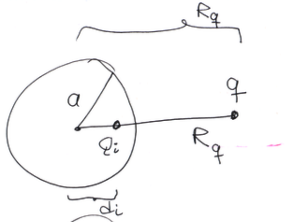
Athugun með grafík til gamans

Rétt er að nefna að jaðarskilyrðið fyrir endaplötuna er ekki alveg í samræmi við venjur í rafstöðufræði. Þannig er ekki hægt að setja upp í kjörleiðara. Ef endaplatan er annað en kjörleiðari vaknar spurningin hvað er $\bar{D}$ innan hennar. Svona kerfi má útbúa með þunnum samhliða vírum á þunnum einangrara. Vírarnir eru einangraðir frá hverjum öðrum og bakvið þunna einangrarann má vera kjörleiðari. Á stórsæjum skala sést þá mættið $V(y) = V_0 \frac{y}{b}$. Það er líka óvenjulegt að þessi jaðarskilyrði leiða til rafsvið samhliða plötunni.





② Kraftur milli kúlunnar og hleðslunnar q



Hægt er að setja spegilhleðslu í stað kúlunnar

Spegilhleðslan verður í fjarlægð $d_i = \frac{a^2}{R_q}$ frá miðju

stærð hennar er $Q_i = -\frac{a}{R_q} q$

Því er rétt að beast við einföldu Coulombslögmáli

$$|F| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 \frac{a}{R_q}}{\left(R_q - \frac{a^2}{R_q}\right)^2}$$

Aðdráttar kraftur milli þeirra

Þessi lausn er fundin í samræmi við aðferðina sýnda í dæmi 4-3 (Example 4-3, bls 161) í bók.

Önnur lengri leið væri að reikna

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \epsilon E^2 dv$$

og finna kraftinn með því að hnika til fjarlægð hleðslunnar frá kúlunni

① Þunn einangrandi kúluskel er með yfirborðshleðslu

$\rho_s(\theta) = \rho_{s0}\sin(3\theta)$, geisli a

finna $V(R\theta)$ innan og utan skeljar

Ég reyni eina lausnaraðferð í ætt við fyrri dæmi

Hér er verkefninu lýst með jöfnu Poissons

$$\nabla^2 V(R\theta) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho_s(R,\theta)$$

utan og innan kúlunnar verður jafnan að jöfnu Laplace við leysum hana þar og skeytum síðan saman lausnunum t.þ.a. taka tillit til ρ_s á kúluyfirborðinu

Almenna lausnin fyrir φ-einsleitkerfi er samanlagt

$$V_n(R,\theta) = \left\{A_n R^n + B_n R^{-(n+1)}\right\} P_n(\cos\theta)$$

Innan kúlu er engin punkthleðsla → $B_n = 0$ þar f. $\forall n$

$$V_n^i(R,\theta) = A_n R^n P_n(\cos\theta)$$

utan kúlu getur lausnin ekki vaxið án takmarkana → $A_n = 0$, bundið líka við að $V(R\to\infty) = 0$

$$V_n^o(R,\theta) = B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

Samskeyting lausnanna fyrir $R=a$ verður að uppfylla

$$\boxed{\hat{a}_{n2}\cdot(\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s}$$

(3)

Við nýtum $\bar{E} = -\bar{\nabla} V$ og $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E}$ ástand $\hat{a}_{n2} = \hat{a}_R$

på veðar skilyrðin

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial R} V^o(R,\theta) - \frac{\partial}{\partial R} V^i(R,\theta) \right\}\Bigg|_{R=a} = -\frac{\rho_{so}}{\epsilon_0} \sin(3\theta) \qquad (*)$$

þ.s.

$$\boxed{V^o(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) \qquad \underline{R > a}}$$

og

$$\boxed{V^i(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos\theta) \qquad \underline{R < a}}$$

(4)

Við þurfum að umskifa $\sin(3\theta)$ yfir í P_n-röð

$$\boxed{\sin(3\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta)}$$

P_n-in eru hornrétt

$$\boxed{\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, P_n(\cos\theta) P_{n'}(\cos\theta) = \frac{\delta_{n,n'} \cdot 2}{2n+1}}$$

$$\rightarrow C_\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, P_\ell(\cos\theta) \sin(3\theta)$$

nýtum $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$$\rightarrow C_\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_0^{\pi} d\theta \, P_\ell(\cos\theta) \left\{ 3\sin^2\theta + 4\sin^4\theta \right\}$$

(5)

$$C_\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^{1} dx \, P_\ell(x) \left\{ 3\sqrt{1-x^2} + 4(1-x^2)^{3/2} \right\}$$

á bilinu $[-1,1]$ eru $\sqrt{1-x^2}$ og $(1-x^2)^{3/2}$ jöfnstæð föll

Um $P_n(x)$ gildir að $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

því eru aðeins $C_\ell \neq 0$ fyrir $\ell = 0, 2, 4, 6, 8, \dots$ möguleg

$P_0(\theta) = 1$

$$C_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \cdot \sin(3\theta) = 0$$

því er kúluskelin í heild óhlaðin og hefur ekkert einskautsvægi

þetta er líka sama heildið u.þ.b. og til þess að finna heildarhleðsluna

$$\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, \rho_s(a,\theta) = 0$$

(6)

Heildið er nokkuð snúið, öll C_ℓ fyrir jöfn $\ell \geq 2$ koma í summuna. Ég reikna nokkur með maxima

$$C_2 = \frac{5}{2} \frac{3\pi}{16}$$

$$C_4 = -\frac{9}{2} \frac{15\pi}{256}$$

$$C_6 = -\frac{13}{2} \frac{21\pi}{2048}$$

$$C_8 = -\frac{17}{2} \frac{63\pi}{16384}$$

$$C_{10} = -\frac{21}{2} \frac{495\pi}{262144}$$

Á næstu síðu sýni ég grafið af samanburðinum fyrir

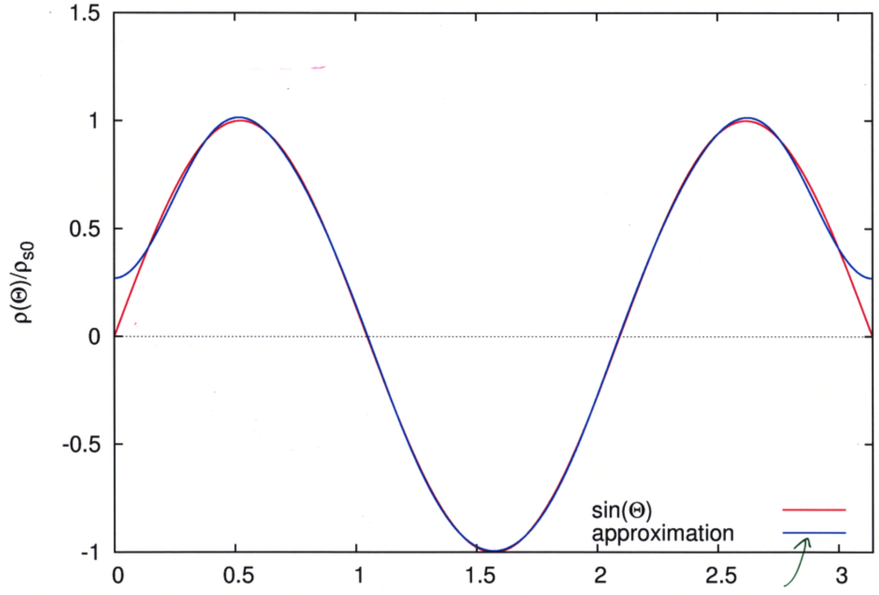
$$\rho(\theta) = \rho_{so} \sin(3\theta)$$

og

$$\sum_{n=2,4,6,8}^{8} C_n P_n(\cos\theta) \cdot \rho_{so}$$

Þar kemur í ljós að þessir liðir nægja vel nema rétt þegar $\theta \rightarrow 0$ eða $\theta \rightarrow \pi$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{í kringum N og} \\ \text{S-skaut} \end{array} \right\}$

7



Nálgun með liðum upp í C_{10}

8

Við þurfum að uppfylla (*)

$$-\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\frac{B_n}{a^{n+2}}P_n(\cos\theta) - \sum_{n=2}^{\infty} n A_n a^{n-1} P_n(\cos\theta) = -\frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0}\sum_{n=2}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta) \qquad (**)$$

fyrir $n = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

Það að auki verður mættið að vera samfellt í $R=a$

$$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n a^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

$$\rightarrow \boxed{B_n = A_n a^{2n+1}}$$ fyrir hvern lið

$$(**) \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)A_n a^{n-1} P_n(\cos\theta) = \frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0}\sum_{n=2}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta)$$

9

Hér þarf að raða saman liðum með sama P_n

$$\rightarrow (2n+1) A_n a^{n-1} = \frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0} C_n$$

$$\rightarrow \boxed{A_n = \frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0}\frac{C_n}{(2n+1)a^{n-1}}}$$

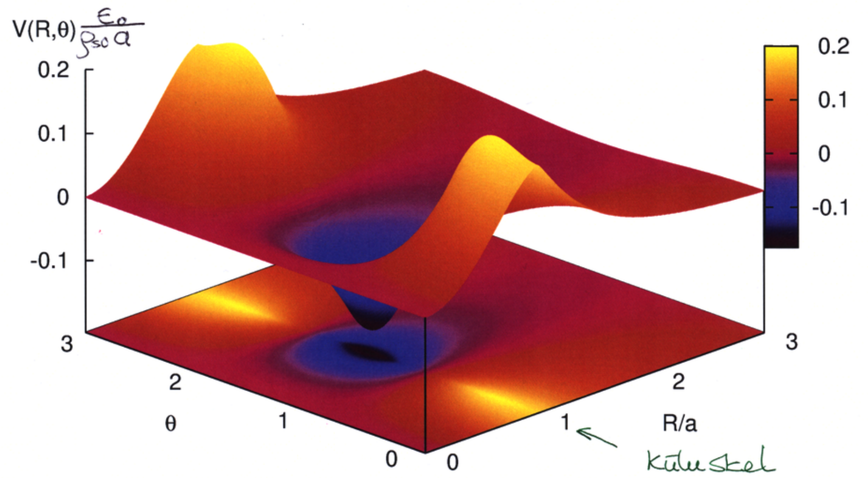
$$\rightarrow \boxed{B_n = \frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0}\frac{C_n}{(2n+1)} a^{n+2}}$$

því fæst

$$\boxed{\begin{aligned} V^i(R,\theta) &= \frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0} a \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{2n+1}\left(\frac{R}{a}\right)^n P_n(\cos\theta) \\ V^o(R,\theta) &= \frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0} a \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{2n+1}\left(\frac{a}{R}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \end{aligned}}$$

10

Nálgun með liðum upp í C_{10}



Ytri loysnin er

$$V^o(R,\theta) = \frac{\rho_{s0}a}{\epsilon_0}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_n}{2n+1}\left(\frac{a}{R}\right)^{n+1}P_n(\cos\theta) \qquad \underline{R>a}$$

þegar $R/a \gg 1$ þá er loysnin

$$V^o(R,\theta) \longrightarrow \frac{\rho_{s0}a}{\epsilon_0}\;\frac{c_2}{5}\left(\frac{a}{R}\right)^3 P_2(\cos\theta)$$

mátti fjórskauts, þegar nær kemur kúluni birtast allir hinir liðir sum deyja annars hvørt út.


```
/* [wxMaxima batch file version 1] [ DO NOT EDIT BY HAND! ]*/
/* [ Created with wxMaxima version 13.04.2 ] */

/* [wxMaxima: input   start ] */
integrate(sin(x)*sin(3*x)*P(x), x, 0, %pi);
/* [wxMaxima: input   end   ] */

/* [wxMaxima: input   start ] */
integrate(sin(x)*sin(3*x)*((3*(cos(x))**2-1)/2), x, 0, %pi);
/* [wxMaxima: input   end   ] */

/* [wxMaxima: input   start ] */
integrate(sin(x)*sin(3*x)*((35*(cos(x))**4-30*(cos(x))**2+3)/8), x, 0, %pi);
/* [wxMaxima: input   end   ] */

/* [wxMaxima: input   start ] */
integrate(sin(x)*sin(3*x)*((231*(cos(x))**6-315*(cos(x))**4+105*(cos(x))**2-5)/16), x, 0, %pi);
/* [wxMaxima: input   end   ] */

/* [wxMaxima: input   start ] */
integrate(sin(x)*sin(3*x)*((6435*(cos(x))**8-12012*(cos(x))**6+6930*(cos(x))**4-1260*(cos(x))**2+35)/128), x, 0, %pi);
/* [wxMaxima: input   end   ] */

/* [wxMaxima: input   start ] */
integrate(sin(x)*sin(3*x)*((46189*(cos(x))**10-109395*(cos(x))**8+90090*(cos(x))**6-30030*(cos(x))**4+3465*(cos(x))**2-63)/256), x, 0, %pi);
/* [wxMaxima: input   end   ] */

/* Maxima can't load/batch files which end with a comment! */
"Created with wxMaxima"$
```

Heildin til þess at finna liðunarstuðla


```
set term post landscape enhanced color solid 'Helvetica' 18
set output 'Pl-lidun.ps'

set key right bottom Left

set xlabel "{/Symbol Q}"
set xlabel  offset character 0, 0, 0 font "" textcolor lt -1 norotate

set ylabel "{/Symbol r}({/Symbol Q})/{/Symbol r}_{s0}"
set ylabel  offset character 0, 0, 0 font "" textcolor lt -1 rotate by -270

set xzeroaxis
set samples 5000

P2(x)  = (3*x**2-1)/2.0
P4(x)  = (35*x**4-30*x**2+3)/8.0
P6(x)  = (231*x**6-315*x**4+105*x**2-5)/16.0
P8(x)  = (6435*x**8-12012*x**6+6930*x**4-1260*x**2+35)/128.0
P10(x) = (46189*x**10-109395*x**8+90090*x**6-30030*x**4+3465*x**2-63)/256.0

c2  =  (5*3*pi)/(2*16.0)
c4  = -(9*15*pi)/(2*256.0)
c6  = -(13*21*pi)/(2*2048.0)
c8  = -(17*63*pi)/(2*16384.0)
c10 = -(21*495*pi)/(2*262144.0)

f(x) = c2*P2(x) + c4*P4(x) + c6*P6(x) + c8*P8(x) + c10*P10(x)

plot [0:pi] sin(3*x) w l lt 1 lw 2 title 'sin({/Symbol Q})',\
            f(cos(x)) w l lt 3 lw 2 title 'approximation'
#    EOF
```

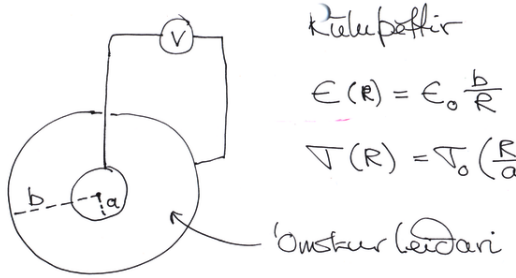
Gnuplot
Skrifta til at tekna samleitni røðar fyrir $\rho_s(a,\theta)$


```
set term post landscape enhanced color solid 'Helvetica' 18
set output 'V-Pl-lidun.ps'

unset key

set xlabel "R/a"
set xlabel  offset character 0, 0, 0 font "" textcolor lt -1 norotate

set ylabel "{/Symbol q}"
set ylabel  offset character 0, 0, 0 font "" textcolor lt -1 rotate by -270

set zlabel "V(R,{/Symbol q})"
set zlabel  offset character 4, 7, 0 font "" textcolor lt -1 norotate

set ytics border in scale 1,0.5 mirror norotate  offset character -2, 0, 0
set ytics 0,1,3
set xtics 0,1,3
set ztics  -0.2,0.1,0.2
set cbtics -0.2,0.1,0.2

set samples    200
set isosamples 200

P2(y)  = (3*y**2-1)/2.0
P4(y)  = (35*y**4-30*y**2+3)/8.0
P6(y)  = (231*y**6-315*y**4+105*y**2-5)/16.0
P8(y)  = (6435*y**8-12012*y**6+6930*y**4-1260*y**2+35)/128.0
P10(x) = (46189*x**10-109395*x**8+90090*x**6-30030*x**4+3465*x**2-63)/256.0

c2  =  (5*3*pi)/(2*16.0)
c4  = -(9*15*pi)/(2*256.0)
c6  = -(13*21*pi)/(2*2048.0)
c8  = -(17*63*pi)/(2*16384.0)
c10 = -(21*495*pi)/(2*262144.0)


Vo(x,y) = c2*P2(y)/(5.0*x**3) + c4*P4(y)/(9.0*x**5) + c6*P6(y)/(13.0*x**7) + c8*P8(y)/(17.0*x**9) + c10*P10(y)/(21.0*x**11)
Vi(x,y) = x**2*c2*P2(y)/5.0 + x**4*c4*P4(y)/9.0 + x**6*c6*P6(y)/13.0 + x**8*c8*P8(y)/17.0 + x**10*c10*P10(y)/21.0

V(x,y) = x>1 ? Vo(x,y) : Vi(x,y)

set view 57,315
set ticslevel 0.1
set pm3d at bs
splot [0:3][0:pi] V(x,cos(y)) w pm3d
#    EOF
```

Gnuplot
Skrifta fyrir $V(R,\theta)$

1

Kúluþéttir



$$\epsilon(R) = \epsilon_0 \frac{b}{R}$$

$$\sigma(R) = \sigma_0 \left(\frac{R}{a}\right)^2$$

① Finna leiðni þéttisins

Við höfum engar upplýsingar um dreifingu hleðslu um kerfið, því getum við ekki notað

$$\oint \bar{D}\cdot d\bar{s} = Q$$

Við gerum ráð fyrir spennunni V og notum

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0$$

Innan þéttis gildir $\bar{\nabla}\times\bar{E} = 0$, engar uppsprettur þar fyrir orku

Rafstöðufræði -> $\bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0$ vegna samfelldnijöfnu

Ómskt efni $\bar{J} = \sigma\bar{E}$

Eða á heildisformi

$$\oint \bar{J}\cdot d\bar{s} = 0$$

$\epsilon(R)$, $\sigma(R)$ og öll uppsetning brjóta ekki radíal samhverfu

2

$$\oint \bar{J}\cdot d\bar{s} = 0$$

Til baka straumurinn fer um einn vír. Innstraumurinn jafn, óháður θ og ϕ milli kúluskeljanna

$$\to \bar{J} = \frac{I}{4\pi R^2}\hat{a}_R$$

þ.s. I er heildarstraumurinn um þéttinn (við þekkjum hann ekki)

$$\bar{E} = \frac{\bar{J}}{\sigma} = \frac{I}{4\pi R^2}\frac{a^2}{\sigma_0 R^2}\hat{a}_R = \frac{Ia^2}{4\pi\sigma_0 R^4}\hat{a}_R$$

Spennan tengist $\bar{E}$

$$\Delta V = -\int_b^a \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\int_b^a \frac{Ia^2}{4\pi\sigma_0 R^4}\,dr$$

$$\Delta V = -\frac{Ia^2}{4\pi\sigma_0}\left\{-\frac{1}{3R^3}\right\}_b^a = \frac{Ia^2}{4\pi\sigma_0 3}\left\{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}\right\} = \frac{I}{12\pi\sigma_0 a}\left\{1-\frac{a^3}{b^3}\right\} = \frac{I}{12\pi a\sigma_0}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^3\right\}$$

$$G = \frac{I}{\Delta V} = 12\pi a\sigma_0\frac{1}{\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^3\right)}$$

Leiðni þéttisins, aðeins háð lögun kerfisins og σ_0

3

② Frjálsar hleðslur í þéttinum?

Þær finnast frá $\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho$

$$\bar{D} = \epsilon(R)\bar{E} = \epsilon_0\frac{b}{R}\cdot\frac{Ia^2}{4\pi\sigma_0 R^4}\hat{a}_R = \frac{Ia^2 b\epsilon_0\hat{a}_R}{4\pi\sigma_0 R^5}$$

$$\rho(R) = \bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left\{R^2 D(R)\right\}$$

$$= -\frac{3Ia^2 b\epsilon_0}{4\pi\sigma_0 R^6}$$

Sem er frjálsa bolhleðslan

Yfirborðshleðslur?

Notum

$$\hat{a}_{n_2}\cdot(\bar{D}_1-\bar{D}_2) = \rho_s$$

$R=a^+$

$$\rho_{sa}(a^+) = \epsilon(a)\bar{E}(a)\cdot\hat{a}_R = \epsilon_0\frac{b}{a}\frac{I}{4\pi\sigma_0 a^2} = \epsilon_0\frac{Ib}{4\pi\sigma_0 a^3}$$

$R=b^-$

$$\rho_{sb}(b^-) = -\epsilon(b)\bar{E}(b)\cdot\hat{a}_R = -\frac{Ia^2\epsilon_0}{4\pi\sigma_0 b^4}$$

4

③ Skautunarhleðslur?

Í rafsvaranum

$$\bar{D} = \epsilon_0\bar{E} + \bar{P}$$

$$\to \bar{P} = \bar{D} - \epsilon_0\bar{E} = \left\{\epsilon(R)-\epsilon_0\right\}\bar{E}$$

$$\bar{P} = \epsilon_0\left\{\frac{b}{R}-1\right\}\frac{Ia^2}{4\pi\sigma_0 R^4}\hat{a}_R = \epsilon_0\frac{Ia^2}{4\pi\sigma_0}\left\{\frac{b}{R^5}-\frac{1}{R^4}\right\}$$

Bolhleðslur eru

$$\rho_P = -\bar{\nabla}\cdot\bar{P}$$

$$= -\frac{1}{R^2}\left[\frac{d}{dR}\left\{\frac{b}{R^3}-\frac{1}{R^2}\right\}\right]\frac{\epsilon_0 I a^2}{4\pi\sigma_0}$$

$$= \left\{\frac{3b}{R^6}-\frac{2}{R^5}\right\}\frac{\epsilon_0 I a^2}{4\pi\sigma_0}$$

$$= \left\{\frac{3ba^5}{R^6}-\frac{2a^5}{R^5}\right\}\frac{\epsilon_0 I}{4\pi\sigma_0 a^3} = \left(\frac{a}{R}\right)^5\left\{\frac{3b}{R}-2\right\}\frac{\epsilon_0 I}{4\pi\sigma_0 a^3}$$

(5)

Yfirborðs skautunarhleðsla á rafsvaranum

$R = a^+$

$$\rho_{ps} = \bar{P} \cdot \hat{a}_n$$

$$\rightarrow \quad \rho_{ps}(a) = -P(a) = -\frac{\epsilon_0 I}{4\pi \sigma_0 a^2}\left\{\frac{b}{a} - 1\right\}$$

$R = b^-$

$$\rho_{ps}(b) = P(b) = \frac{\epsilon_0 I a^2}{4\pi \sigma_0 b^4}\left\{1 - \frac{1}{1}\right\} = 0$$

④ Heildar frjáls hleðslan?

Bol hleðsla

$$\rho(R) = -\frac{3 I a^2 b \epsilon_0}{4\pi \sigma_0 R^6}$$

$$Q_{bol} = \int_{rafsvari} dv' \rho(R')$$

$$= -\frac{3 I a^2 b \epsilon_0}{\sigma_0}\int_a^b R^2 \frac{dR}{R^6}$$

$$= -\frac{I b \epsilon_0}{\sigma_0 a}\left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right)$$

(6)

Á innra borði

$$Q_{sa}(a) = 4\pi a^2 \rho_{sa}(a) = \frac{\epsilon_0 I b}{\sigma_0 a}$$

$$Q_{sb}(b) = 4\pi b^2 \rho_{sb}(b) = -\frac{\epsilon_0 I a^2}{\sigma_0 b^2}$$

Í heild frjálsar hleðslur

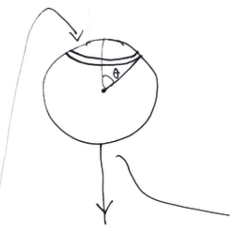
$$Q = Q_{bol} + Q_{sa}(a) + Q_{sb}(b)$$

$$= -\frac{I b \epsilon_0}{\sigma_0 a}\left\{1 - \frac{a^3}{b^3}\right\} + \frac{\epsilon_0 I b}{\sigma_0 a} - \frac{\epsilon_0 I a^2}{\sigma_0 b^2} = 0$$

Engin heildar frjáls hleðsla er á þéttinum

(7)

⑤ Yfirborðsstraumur á innri kúluskel



Jafnt á kúluna úr öllum áttum kemur/fer straumþéttleiki

$$\bar{J} = \frac{I}{4\pi R^2}\hat{a}_R$$

setjum að straumur fari af kúlunni í $\theta = \pi$

Alls staðar á kúlunni er þá straumþéttleiki (yfirborðs) í stefnu $\hat{\theta}$

yfirborð hettu er $\int_0^\theta \sin\theta' d\theta' \, 2\pi a^2 = 2\pi a^2(1-\cos\theta) = S(\theta)$

Heildarstraumurinn af hettunni er $S(\theta) \cdot J$ sem þarf að streyma þvert á jaðar hettu með lengd $\lambda(\theta) = 2\pi a \sin\theta$

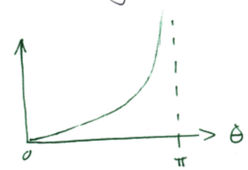
(8)

því er straumurinn í lengd

$$\frac{S(\theta) \cdot J}{\lambda(\theta)} = \frac{2\pi a^2(1-\cos\theta)}{2\pi a \sin\theta}\,\frac{I}{4\pi a^2}$$

yfirborðsstraumþéttleikinn (straumur á lengd) er því

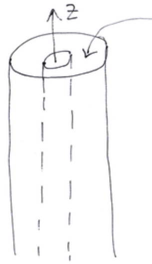
$$\rightarrow \quad \frac{I}{a}\,\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\,\frac{1}{4\pi}\,\hat{\theta} \longrightarrow$$



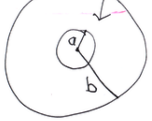
Sem er með sérstöðupunkt í suður pól þar sem straum safnast í einn punkt til að fara af kúlunni (það er enginn sérstöðup. í $\theta = 0$!)

Eins og rafsviðið er sett upp í upphafi ætti straumurinn hér að hafa öfugt formerki. Hann kemur inn í gegnum línuna að S-skauti innri kúlu og streymir um rafsvara að ytri kúluskel

6. Skammtar (1)



$$\rho(r) = \rho_0\left(\frac{r}{a}\right)^2$$



Finna $\bar{B}$ allsstaðar

Óendanlegur holur sívalningur snýst um samhverfuás, z-ás

-> straumþéttleiki $\bar{J}$ $\hat{\varphi}$-stefnu

Styðumst við lögmál Ampères

$$\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I$$

og

$$\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A}$$

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} d\bar{r}'^3 \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$$

-> $\bar{A}(\bar{r}) = A(r)\cdot\hat{a}_\varphi$

↑ ekki háð φ og z

---

(2)

$$\bar{\nabla}\times\bar{A} = \hat{a}_z\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\{rA(r)\}$$

með alla aðra þætti jafna 0 i. $\bar{B}$ getur bara haft $\hat{z}$-þátt

Hraði punkts með hnit $\bar{r}'$ í þykka sívalningsskelinni er

$$\bar{v}(\bar{r}') = \omega\hat{a}_z\times\bar{r}'$$

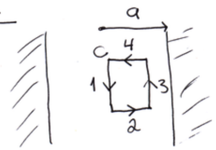
í sívalningshnitum

$$\bar{v}(r) = \omega r\,\hat{a}_\varphi \quad \rightarrow \quad \bar{J}(r) = \rho(r)\bar{v}(r) = \rho_0\left(\frac{r}{a}\right)^2\omega r\,\hat{a}_\varphi$$

Notum

$$\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I$$

Inni í holi $r<a$



Hér er heildið yfir 4 og 2 núll því þar er $\bar{B}\cdot d\bar{l}=0$, þau eru hornrétt. Enginn straumur er um lykkjuna -> heildin um 1 og 3 verða að styttast út hvar sem C er innan holsins

---

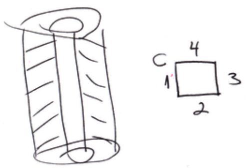
(3)

því getur $\bar{B}$ að eins verið fasti innan hols

$$\bar{B} = B_0\hat{a}_z, \quad B_0 = \text{fasti}$$

en fastinn B_0 er ekki þekktur

Utan sívalningsskeljar $r>b$



Hér er einnig enginn straumur um C og hægt er að nota sömu röksemdu og fyrir $r<a$

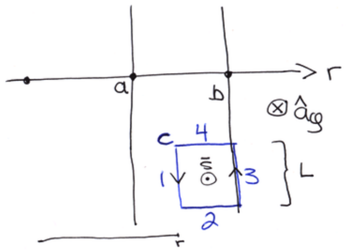
Segulflæðisviðið $\bar{B}$ er fast og einsleitt utan skeljar. Lykkjan getur verið mjög fjarri skeljunni eða mjög nærri

-> við búumst við að utan skeljar sé $\bar{B}=0$

---

(4)

Innan skeljar $a<r<b$



Nú er straumur um C og að eins heildið um C_1 skilar einhverju. Veljum lengd heildisvegs C_1 sem L

$$\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I$$

Vinstri hliðin getur

$$-B(r)L$$

Hægri hliðin

$\bar{s}$ er út úr blaðinu andsælis við $\hat{a}_\varphi$

$$I = \oint_S \bar{J}\cdot d\bar{s}$$

$$\rightarrow I_{enc} = -L\int_r^b dr'\,J(r)$$

$$I_{enc} = -L\rho_0\omega a^2 \int_r^b \frac{dr'}{a}\left(\frac{r'}{a}\right)^3 = -L\rho_0\omega a^2 \int_{r/a}^{b/a} du\, u^3 = -\frac{La^2\rho_0\omega}{4}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \left(\frac{r}{a}\right)^4\right\}$$

$$\rightarrow \quad -B(r)L = -\mu_0\frac{La^2\rho_0\omega}{4}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \left(\frac{r}{a}\right)^4\right\}$$

$$\rightarrow \quad B(r) = \mu_0\frac{a^2\rho_0\omega}{4}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \left(\frac{r}{a}\right)^4\right\}$$

$$\bar B = \mu_0\frac{a^2\rho_0\omega}{4}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \left(\frac{r}{a}\right)^4\right\}\hat a_\varphi \qquad \text{fyrir } a<r<b$$

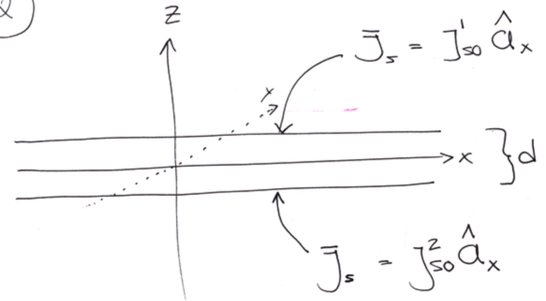
$\bar B(b) = 0$

$$\bar B(a) = \mu_0\frac{a^2\rho_0\omega}{4}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^4 - 1\right\}\hat a_\varphi \quad \rightarrow \quad B_0 = \mu_0\frac{a^2\rho_0\omega}{4}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^4 - 1\right\}$$

fyrir $r<a$

(5)

(2)



Finna allstaðar $\bar B$

fyrir $J^1_{s0} = J^2_{s0}$

og $J^1_{s0} = -J^2_{s0}$

$$\bar A(\bar r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} d^3r' \frac{\bar J(\bar r')}{|\bar r - \bar r'|}, \qquad \bar B = \bar\nabla\times\bar A$$

~~við~~ þessum straum fæst

~~að~~ $\bar A = \bar A_x(z) = A(z)\hat a_x$ $\rightarrow$ $\bar B = \hat a_y \frac{\partial}{\partial z}A(z)$

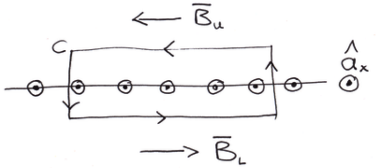
$\bar B$ er aðeins með $\hat a_y$ átt

(6)

(7)

Rétt ein og í dæminu á undan er hægt að sýna að $\bar B$ sé alstaðar fasti, milli plötunnar og fyrir utan þær.

Skoðum eina plötu



Straumur í $\hat a_x$-átt þá er ljóst að segulflóðsvið er í sitthvora áttina, sitthvoru megin við plötuna

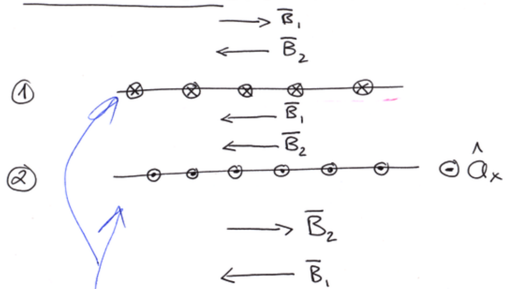
$$\oint_C \bar B\cdot d\bar l = \mu_0 I \quad\rightarrow\quad 2LB_0 = \mu_0 L J_{s0}$$

$$\rightarrow \quad B_0 = \frac{\mu_0 J_{s0}}{2}$$

$$\bar B_u = -\hat a_y\frac{\mu_0 J_{s0}}{2} \qquad \bar B_L = +\hat a_y\frac{\mu_0 J_{s0}}{2}$$

(8)

Andsamsíða straumar



0

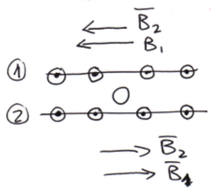
$\bar B = -\hat a_y \mu_0 J_{s0}$ $\quad +\frac{d}{2}$ $\quad -\frac{d}{2}$

0

Í anda þess sem við fundum fyrir spóluna áður

Samsíða straumar

$\rightarrow$ Ekkert segulflóðsvið milli plötunna

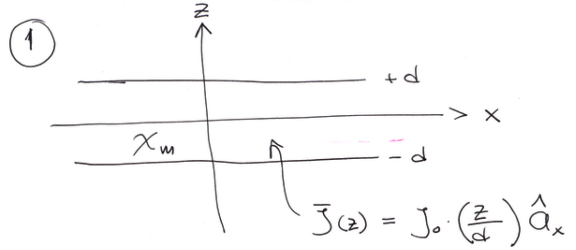


$\bar B = -\hat a_y \mu_0 J_{s0}$

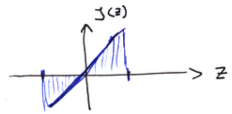
0

$\bar B = +\hat a_y \mu_0 J_{s0}$

1

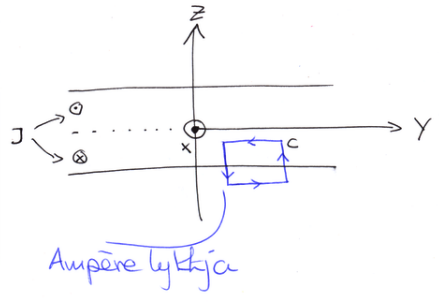


Finna $\bar{H}$, $\bar{M}$ og $\bar{B}$ allsstaðar



Samanburður við dæmið í síðustu viku, það dæmi, leiðir til þess að ljóst má vera að $\bar{H} = 0$ utan efnisbúts (Ampère)

Reiknum þá innan hans:



$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = I = \int_{S_C^{enc}} d\bar{s} \cdot \bar{J}(z)$$

$$-L\,H(z) = L J_0 \int_{-d}^{z} dz' \frac{z'}{d}$$

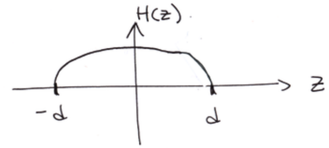
2

$$-L\,H(z) = L \frac{J_0}{d}\left\{\frac{z^2}{2} - \frac{d^2}{2}\right\}$$

$$H(z) = \frac{J_0}{2}\left\{d - \frac{z^2}{d}\right\} = \frac{J_0 d}{2}\left\{1 - \frac{z^2}{d^2}\right\}$$

$$\bar{H}(z) = \hat{a}_y \frac{J_0 d}{2}\left\{1 - \frac{z^2}{d^2}\right\}$$

fyrir $-d < z < d$



$\bar{H}(z)$ er núll fyrir utan

$\bar{M} = 0$ fyrir utan

Þar gildir því $\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} \rightarrow \bar{B} = \mu_0 \bar{H} = 0$

Innan efnis $-d < z < +d$

Ef það er línulegt $\rightarrow \bar{M} = \chi_m \bar{H}$

3

$$\bar{M} = \hat{a}_y \frac{J_0 d \chi_M}{2}\left\{1 - \frac{z^2}{d^2}\right\}$$

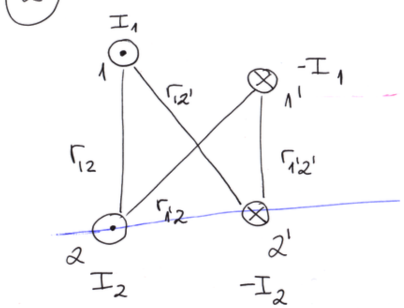
$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \rightarrow \frac{\bar{B}}{\mu_0} = \bar{H} + \bar{M}$$

$$\rightarrow \bar{B} = \mu_0(1+\chi_M)\bar{H} = \hat{a}_y \frac{J_0 d}{2} \mu_0 (1+\chi_M)\left\{1 - \left(\frac{z}{d}\right)^2\right\}$$

innan efnis

4

2



Finna víxlspan „víranna" (leiðslanna 2 og 2 saman)

Þurfum að finna flæði Φ_{21} um línu 2 vegna straums í línu 1

T.d. fyrir einn þátt leiðara 1 er segulsviðið

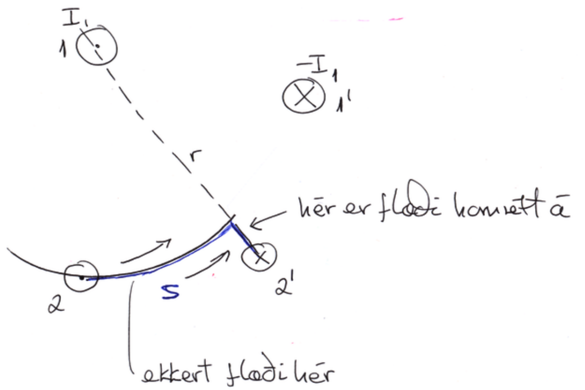
$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{a}_\theta$$

p.s. $\hat{a}_\theta$ miðast við vír 1. Erfitt er að reikna flæðið um flöt leiðara 2 (milli víra 2 og 2')

(Hér gæti verið snjallt að hugsa um $\bar{A}$)

5

Reiknum því annarstaðar flöt



$$\Phi_{21} = \oint_s d\bar{s}\cdot\bar{B} = L\int_{r_{12}}^{r_{12'}} dr\,\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi}\ln\left(\frac{r_{12'}}{r_{12}}\right)$$

6

Eins fæst

$$\Phi_{21'} = \oint_{s'} d\bar{s}\cdot\bar{B} = -\frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi}\ln\left(\frac{r_{1'2'}}{r_{1'2}}\right)$$

Lagt saman

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{21'} = \frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi}\ln\left(\frac{r_{12'}\cdot r_{1'2}}{r_{12}\cdot r_{1'2'}}\right)$$

Víxlspanið á lengdareiningu er því

$$L'_{21} = \frac{\Phi_2}{L I_1} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{r_{12'}\cdot r_{1'2}}{r_{12}\cdot r_{1'2'}}\right)$$

7

Eins mætti nota $\bar{A}$ hér. Til þess að finna $\bar{A}$ má nota að það sem sýnt var í 5. Stammti 2012 seinna dæmi. $\bar{A}$ liggur alltaf samsíða straumi. Það er því fasti við leiðarana. Síðan er einfallt að nýta

$$\Phi = \oint_C \bar{A}\cdot d\bar{l}$$

þessi leið er einfaldari því ekki þarf að ímynda neitt yfirborð.

1

Jöfnur Maxwells

① $\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\partial_t\bar{B}$	$\bar{\nabla}\times\bar{H} = \bar{J} + \partial_t\bar{D}$ ②
③ $\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho$	$\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0$ ④

Samfelldnijafnan er $\partial_t\rho + \bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0$ ⑤

Stærð fræðilega í lagi, en eðlisfræðilega þekkjum við engar uppsprettur sem væru alltaf fastar í rúminu → $C(\bar{r})=0$

Verkum með div á ②

$$\underbrace{\bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{H})}_{=0} = \underbrace{\bar{\nabla}\cdot\bar{J}}_{=-\partial_t\rho\ \text{vegna ⑤}} + \partial_t\bar{\nabla}\cdot\bar{D}$$

$$\rightarrow \partial_t\left\{\bar{\nabla}\cdot\bar{D} - \rho\right\} = 0$$

$$\rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{D} - \rho(\bar{r}) = C(\bar{r})$$

$$\rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho$$

Verkum með div á ①

$$\underbrace{\bar\nabla\cdot(\bar\nabla\times\bar E)}_{=0} = -\partial_t \bar\nabla\cdot\bar B$$

þarf að gilda fyrir alla tíma t

$$\rightarrow \bar\nabla\cdot\bar B = 0$$

$\bar B$ hefur einungis þverþátt, þar sem engar uppsprettur eða segulhleðslur eru til fyrir það

$$\bar\nabla\cdot\bar D = \rho$$

$\bar D$ hefur langsþátt vegna hleðslna

Á heildisformi

① $$\oint_C \bar E\cdot d\bar l = -\frac{d\Phi}{dt},$$ ② $$\oint_C \bar H\cdot d\bar l = I + \int_S \partial_t \bar D\cdot d\bar s$$

③ $$\oint_S \bar D\cdot d\bar s = Q$$ ④ $$\oint_S \bar B\cdot d\bar s = 0$$

Hér er S opið yfirborð með C sem jaðar

Hér er S lokað yfirborð

samfelldnijafnan heilduð yfir rúmmál V er þá

$$\oint_S \bar J\cdot d\bar s = -d_t Q \quad ⑤$$

tökum ②

$$\oint_C \bar H\cdot d\bar l = I + \int_S \partial_t \bar D\cdot d\bar s$$

leyfum S að lokast!

Þá stendur eftir

$$0 = I + \oint_S \partial_t \bar D\cdot d\bar s$$

notum ⑤

$$\oint_S \bar J\cdot d\bar s = -d_t Q$$

$$I = -d_t Q$$

$$\rightarrow d_t \oint_S \bar D\cdot d\bar s = d_t Q$$

$$d_t\left\{\oint_S \bar D\cdot d\bar s - Q\right\} = 0$$

Aftur, hér þurfum við að höfða til þess að eðlisfræðilega eru allar okkar frjálsu hleðslur faldar í Q

$$\rightarrow \oint_S \bar D\cdot d\bar s = Q$$

Reynum líka ①

leyfum S að lokast aftur

$$\oint_C \bar E\cdot d\bar l = -d_t\Phi$$

$$0 = -d_t\Phi = -d_t\oint_S d\bar s\cdot\bar B$$

$$\rightarrow d_t\left\{\oint_S d\bar s\cdot\bar B\right\} = 0$$

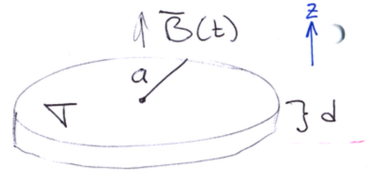
$$\rightarrow \oint_S d\bar s\cdot\bar B = 0$$

fyrir lokað S

eðlisfræðilega eru engar uppsprettur fyrir B vektor, engin segul einskaut eru til

6

Lögmál Faradays



skífan er hreyfingarlaus

$$\nabla\times\bar E = -\frac{\partial \bar B}{\partial t} \qquad \oint_C \bar E\cdot d\bar l = -\int_S \frac{\partial \bar B}{\partial t}\cdot d\bar S$$

Gerum þá nálgun að sleppa sjálfspani, sjá endadæmi

$$\oint_C \bar E\cdot d\bar l = -\frac{d}{dt}\int_S d\bar S\cdot\bar B(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(t)$$

Kerfið er Ohmskt → $\bar J = \sigma\bar E$, σ er fasti hér

$$\oint_C \sigma\bar E\cdot d\bar l = -\sigma\frac{d}{dt}\int_S d\bar S\cdot\bar B(t)$$

$$\oint \bar J\cdot d\bar l = -\sigma\frac{d}{dt}\int_S d\bar S\cdot\bar B(t) \qquad (*)$$

7

$\bar B(t) = B(t)\hat a_z$ leiðir til hringstrauma í skífunni

Notum (*) fyrir hring með $r<a$

$$J\cdot 2\pi r = -\sigma\pi r^2\frac{d}{dt}B(t)$$

$$\rightarrow J(r) = -\frac{\sigma r\dot B(t)}{2}$$

og

$$\bar J(r) = -\frac{\sigma r\dot B(t)}{2}\hat a_\varphi$$

straumþéttleikinn breytist ekki með d, en straumurinn i(r) gerir það því með auknu d minnkar viðnámið

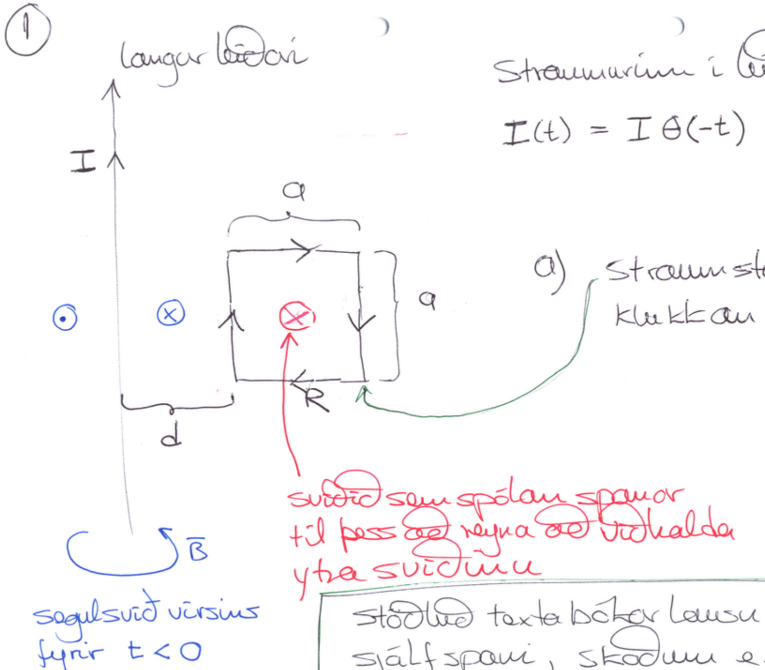
8

Auðvitað skiptir sjálfspan dæmisins máli þegar straumþéttleikinn er reiknaður. Til þess að skilja þann þátt bið ég ykkur um að skoða lausnir fyrir 8. skammt 2013, bæði dæmin. Fyrra dæmið er reiknað með og án L, en þá fæst sama niðurstaðan fyrir Q, en ekki fyrir I! Hér er líka hægt að bæta við L, en B(t) var ekki gefið nákvæmlega. Til þess að reikna L hér þarf að nota $\bar A$ og nákvæmu lausnina sem sett er saman úr sporbaugs-föllum. Sleppum því, en skoðum dæmin 2013. Ég hengi þær lausnir hér við.

1

Straumurinn í leiðaranum er

$$I(t) = I\Theta(-t) \qquad \Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{ef } x<0 \\ 1 & \text{ef } x>0 \end{cases}$$



a) straumstefnan í lykkjunni klukkan $t = 0^+$

Stöðluð textabókar lausn sleppir oft sjálfspani, skoðum eftir dæmi 2 hvað gerist ef við tökum það með á síðum (10) – (12)

b) Lögmál Ampères gefur $\bar{B}$ í kringum vír þ. $t<0$

$$\bar{B} = \hat{\phi}\,\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Því má finna flæðið um lykkjuna

$$\Phi = \oint_S d\bar{s}\cdot\bar{B} = a\int_d^{d+a} dr\,\frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln(r)\Big|_d^{d+a}$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\left\{\ln(d+a) - \ln(d)\right\} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left[\frac{d+a}{d}\right]$$

Í lykkjunni spanast I_{Ly}, íspennan í lykkjunni er

$$\mathcal{E} = I_{Ly}\cdot R = -\frac{d}{dt}\Phi$$

$$\hookrightarrow \quad I_{Ly} = \frac{d}{dt}Q$$

$$\rightarrow \quad I_{Ly}\cdot R = -\frac{d}{dt}\Phi$$

$$R\frac{d}{dt}Q = -\frac{d}{dt}\Phi = -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left\{\frac{d+a}{d}\right\}\frac{d}{dt}I$$

$$\frac{d}{dt}Q = -\frac{\mu_0 a}{2\pi R}\ln\left\{\frac{d+a}{d}\right\}\frac{d}{dt}I$$

heildum

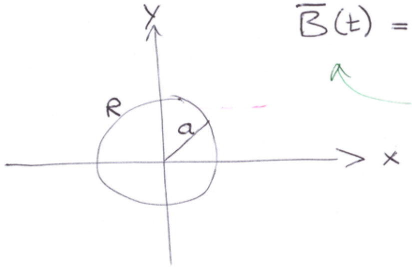
$$\int_0^Q dQ' = -\frac{\mu_0 a}{2\pi R}\ln\left\{\frac{d+a}{d}\right\}\int_I^0 dI'$$

$$\rightarrow \quad Q = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R}\ln\left\{\frac{d+a}{d}\right\}$$

Hleðslan sem flæðir um hvern punkt lykkjunnar þegar slökkt er á I í langa leiðaranum

②

$$\bar{B}(t) = \frac{B_0}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x + \hat{a}_z)\left\{1-e^{-\lambda t}\right\}\theta(t)$$



flæði þessa ytra sviðs í gegnum lykkju

a) Finna $i(t)$ í lykkjunni

$$\Phi_B(t) = \frac{B_0 a^2\pi}{\sqrt{2}}\left\{1-e^{-\lambda t}\right\}\theta(t)$$

Upp í gegnum lykkjuna

{Er í raun óþarft því $|B(0)| = 0$}

$$\frac{d\Phi_B}{dt}(t) = \frac{B_0 a^2\pi}{\sqrt{2}}\left[\left\{1-e^{-\lambda t}\right\}\delta(t) + \theta(t)\lambda e^{-\lambda t}\right]$$

Keðjuregla og $\frac{d\theta(t)}{dt} = \delta(t)$

→ Heaviside step function

→ Dirac delta function

Heildarsegulflæðið um lykkjuna er vegna breytinga á þessu "ytra" segulsviði B og breytinga segulflæðis sem straumur um lykkjuna myndar

$$\Phi = \Phi_B + \Phi_L = \Phi_B + Li$$

sjálfspan lykkju

$\Phi = Li$

$$\oint_C \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\hookrightarrow = Ri$$

því fæst

$$Ri = -\frac{d\Phi_B}{dt} - L\frac{di}{dt}$$

eða

$$L\frac{di}{dt} + Ri = -\frac{d}{dt}\Phi_B$$

6

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = -\frac{B_0 a^2 \pi}{L\sqrt{2}}\left[\{1-e^{-\lambda t}\}\delta(t) + \theta(t)\lambda e^{-\lambda t}\right]}$$

Hliðræn 1. stigs afleiðujafna sem við verðum að leysa

Jafnan $y' + p(t)y = q(t)$

hefur lausnina

$$y(t) = y(t_0)e^{-P(t)} + e^{-P(t)}\int_{t_0}^{t} ds\, e^{P(s)} q(s)$$

með

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} ds\, p(s)$$

Hjá okkur

$$P(t) = \int_{0}^{t} ds\, \frac{R}{L} = \frac{Rt}{L}$$

7

$$\to i(t) = i(0)e^{-\frac{Rt}{L}} - e^{-\frac{Rt}{L}}\frac{B_0 a^2\pi}{L\sqrt{2}}\lambda\int_{0^-}^{t} ds\, e^{\frac{Rs}{L}-\lambda s}$$

$$= i(0)e^{-\frac{Rt}{L}} - e^{-\frac{Rt}{L}}\lambda\frac{B_0 a^2\pi}{L\sqrt{2}}\left\{\frac{e^{\frac{R}{L}t-\lambda t}-1}{(\frac{R}{L}-\lambda)}\right\}$$

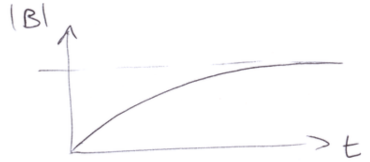
$$= \underbrace{i(0)}_{0}e^{-\frac{Rt}{L}} - \frac{\lambda B_0 a^2\pi}{L\sqrt{2}}\left(\frac{e^{-\lambda t}-e^{-\frac{Rt}{L}}}{(\frac{R}{L}-\lambda)}\right)$$

$$= \frac{\lambda B_0 a^2\pi}{L\sqrt{2}}\left\{\frac{e^{-\frac{R}{L}t}-e^{-\lambda t}}{(\frac{R}{L}-\lambda)}\right\}$$

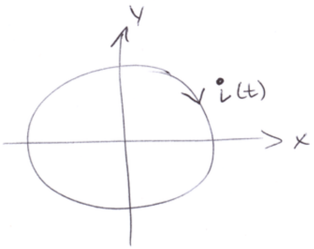
L má reikna, en hér skiptir aðeins máli hvernig hlutfall $\frac{R}{L}$ er miðað við λ svo ég sleppi því

8

Fall $\bar{B}(t)$ af t er með þeim hætti að kveikt er hægt á $\bar{B}$ sem nær síðan max. gildi

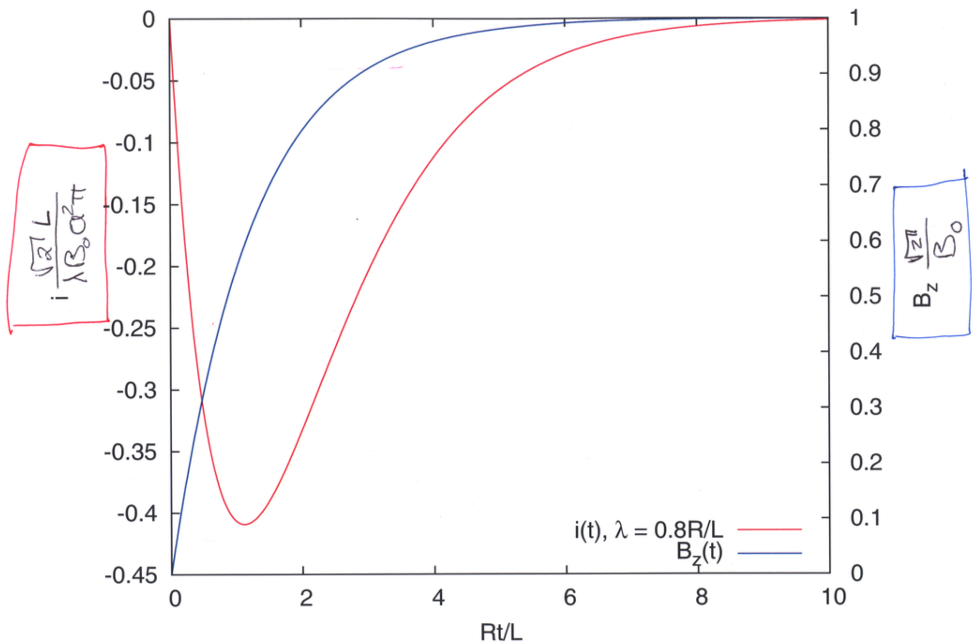


svar lykkjunnar er íspenna sem vinnur á móti þessu sviði



sjá næstu síðu

9



(10)

Skoðum aftur 1. dæmið hvað gerist af sjálfspan lykkju er tekið til greina?

$$\Phi = \Phi_{vír} + \Phi_{lykkja} = \underbrace{\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left\{\frac{d+a}{d}\right\}}_{MI} + L I_{Ly}$$

$$V = -\frac{d}{dt}\Phi$$

$$\to \quad I_{Ly}\cdot R = -M\frac{d}{dt}I - L\frac{d}{dt}I_{Ly}$$

$$L\frac{d}{dt}I_{Ly}(t) + I_{Ly}(t)R = -M\frac{d}{dt}I(t)$$

$$I(t) = I\Theta(-t) \quad \to \quad \frac{d}{dt}I(t) = -\delta(t)\cdot I$$

(11)

$$L\frac{d}{dt}I_{Ly}(t) + I_{Ly}(t)R = MI\delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}I_{Ly}(t) + \frac{R}{L}I_{Ly}(t) = \frac{MI}{L}\delta(t)$$

Lausnin er

$$y(t) = y(t_0)e^{-P(t)} + e^{-P(t)}\int_{t_0}^{t} ds\, e^{P(s)}q(s)$$

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} ds\, p(s) = \frac{Rt}{L}$$

$$q(s) = MI\delta(t)$$

$$I_{Ly}(t) = I_{Ly}(0)e^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{R}{L}t}\frac{MI}{L}\int_{0^-}^{t} ds\, e^{\frac{Rs}{L}}\delta(s)$$

(12)

$$I_{Ly}(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\frac{MI}{L}$$

Heildar hleðsla um sérhvern punkt í rás (lykkju)

$$Q = \int_0^\infty dt\, I_{Ly}(t) = \frac{MI}{L}\int_0^\infty dt\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$= \frac{MI}{L}\left\{-\frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{R/L}\Big|_0^\infty\right\} = \frac{MI}{L}\left\{0+\frac{L}{R}\right\} = \frac{MI}{R}$$

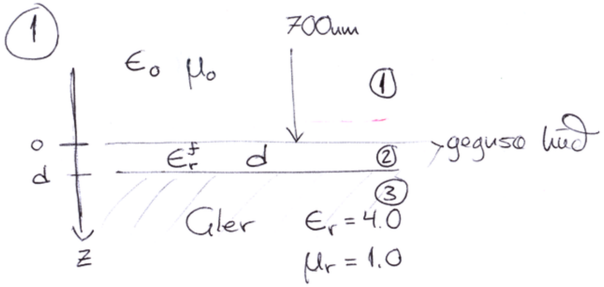
Óháð L!

$$= \frac{\mu_0 a I}{2\pi R}\ln\left\{\frac{d+a}{d}\right\}$$

Sama svar og áður! Hvernig gátum við búist við því!

(1)

(1)



Þetta er því dæmi um ferð geisla um þunnt lag milli tveggja efniskerfa, þ.e. loft – lag – gler. Sýnidæmi 8-12 í bók og Mynd 8-15 eiga við það.

Hér þarf að skeyta saman lausnum

(1)

$$\bar{E}_1 = \hat{a}_x\left\{E_{i0}e^{-i\beta_1 z} + E_{r0}e^{+i\beta_1 z}\right\}$$

$$\bar{H}_1 = \hat{a}_y\frac{1}{\eta_1}\left\{E_{i0}e^{-i\beta_1 z} - E_{r0}e^{+i\beta_1 z}\right\}$$

(2)

$$\bar{E}_2 = \hat{a}_x\left\{E_2^+e^{-i\beta_2 z} + E_2^-e^{+i\beta_2 z}\right\}$$

$$\bar{H}_2 = \hat{a}_y\frac{1}{\eta_2}\left\{E_2^+e^{-i\beta_2 z} - E_2^-e^{+i\beta_2 z}\right\}$$

(3)

$$\bar{E}_3 = \hat{a}_x E_3^+e^{-i\beta_3 z}$$

$$\bar{H}_3 = \hat{a}_y\frac{E_3^+}{\eta_3}e^{-i\beta_3 z}$$

2

Með jaðarskilyrðum

$$\bar{E}_1(0) = \bar{E}_2(0) \qquad \bar{H}_1(0) = \bar{H}_2(0)$$

og

$$\bar{E}_2(d) = \bar{E}_3(d) \qquad \bar{H}_2(d) = \bar{H}_3(d)$$

Ég fer með höfundum bókar og skilgreini heildar samviðnám bylgju

$$Z(z) = \frac{E_x(z)}{H_y(z)}$$

heildar svið

Fyrir einn skilflöt er þá (í efni 1)

$$Z_1(z) = \eta_1 \frac{e^{-i\beta_1 z} + \Gamma e^{+i\beta_1 z}}{e^{-i\beta_1 z} - \Gamma e^{+i\beta_1 z}}, \quad \text{með } \Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

Cheng skrifar síðan $Z_1(-l)$ og í beinu framhaldi $Z_2(0) = Z_2(d-d)$

fyrir lóðrétta innkomu bylgju

3

$$Z_2(0) = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos(\beta_2 d) + i\eta_2 \sin(\beta_2 d)}{\eta_2 \cos(\beta_2 d) + i\eta_3 \sin(\beta_2 d)}$$

Speglunin í $z=0$ ræðst af

$$\Gamma_0 = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = -\frac{H_{r0}}{H_{i0}} = \frac{Z_2(0) - \eta_1}{Z_2(0) + \eta_1}$$

í stað η_2

Z_2 inniheldur upplýsingar um bylgjuna sem speglast í $z=d$

Best væri ef engin speglun þ.e. $\Gamma_0 = 0$ fyrir vissa bylgjulengd.

Þá $\Gamma_0 = 0$. Til þess þarf $Z_2(0) = \eta_1$

$$\rightarrow \eta_2\{\eta_3 \cos(\beta_2 d) + i\eta_2 \sin(\beta_2 d)\} = \eta_1\{\eta_2 \cos(\beta_2 d) + i\eta_3 \sin(\beta_2 d)\}$$

4

Í bókinni skrifar Cheng þessa jöfnu fyrir raun og þverhluta

$$\eta_3 \cos(\beta_2 d) = \eta_1 \cos(\beta_2 d) \qquad \text{Raun}$$

$$\eta_2^2 \sin(\beta_2 d) = \eta_1 \eta_3 \sin(\beta_2 d) \qquad \text{þver}$$

Við vitum að $\eta_3 \neq \eta_1$ (gler og loft)

$$\rightarrow \begin{cases} \cos(\beta_2 d) = 0 \\ \text{og} \\ \boxed{\eta_2^2 = \eta_1 \eta_3} \end{cases} \quad \text{er lausn}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \beta_2 d &= (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0,1,2,\dots \\ \text{Þá } d &= (2n+1)\frac{\pi}{2\beta_2} \\ &= (2n+1)\frac{\lambda_2}{4} \end{aligned}}$$

því $\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$

5

því fæst einhlítt

$$d = \frac{(2n+1)\lambda_2}{4} \quad \text{og} \quad \eta_2^2 = \eta_1 \eta_3 \rightarrow \frac{\mu_1}{\epsilon_2} = \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_1}{\epsilon_1 \epsilon_3}}$$

Þá $\epsilon_{2r} = \sqrt{\epsilon_{1r} \epsilon_{3r}}$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{\beta_2} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_1 \epsilon_2}} \hookrightarrow \lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{2r}}}, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Í okkar dæmi er $\epsilon_{1r} = 1 \rightarrow \epsilon_{2r} = \sqrt{\epsilon_{3r}}$

$$\hookrightarrow d = \frac{(2n+1)}{4} \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{2r}}} = \frac{(2n+1)\lambda_0}{4\sqrt{\sqrt{\epsilon_{3r}}}} \qquad \epsilon_{3r} = 4$$

$\rightarrow$ minnsta þykkt $\quad d = \frac{\lambda_0}{4 \cdot \sqrt{2}} = \frac{700\ \text{nm}}{4\sqrt{2}} \approx 124\ \text{nm}$

Reikna $\Gamma(\lambda_0)$ Við fundum áður í $z=0$

$$\Gamma_0 = \frac{Z_2(0)-\eta_1}{Z_2(0)+\eta_1}, \quad 1 \text{ var loft} \rightarrow \eta_1 = \eta_0$$

$$\rightarrow \Gamma_0 = \frac{\left(\frac{Z_2(0)}{\eta_0}\right)-1}{\left(\frac{Z_2(0)}{\eta_0}\right)+1} \qquad \eta_2 = \sqrt{\eta_1\eta_3} = \sqrt{\eta_0\eta_3}$$

$$\frac{Z_2(0)}{\eta_0} = \frac{\eta_2}{\eta_0}\,\frac{\eta_3\cos(\beta_2 d)+i\eta_2\sin(\beta_2 d)}{\eta_2\cos(\beta_2 d)+i\eta_3\sin(\beta_2 d)} = \sqrt{\frac{\eta_3}{\eta_0}}\;\frac{\eta_3+i\eta_2\tan(\beta_2 d)}{\eta_2+i\eta_3\tan(\beta_2 d)}$$

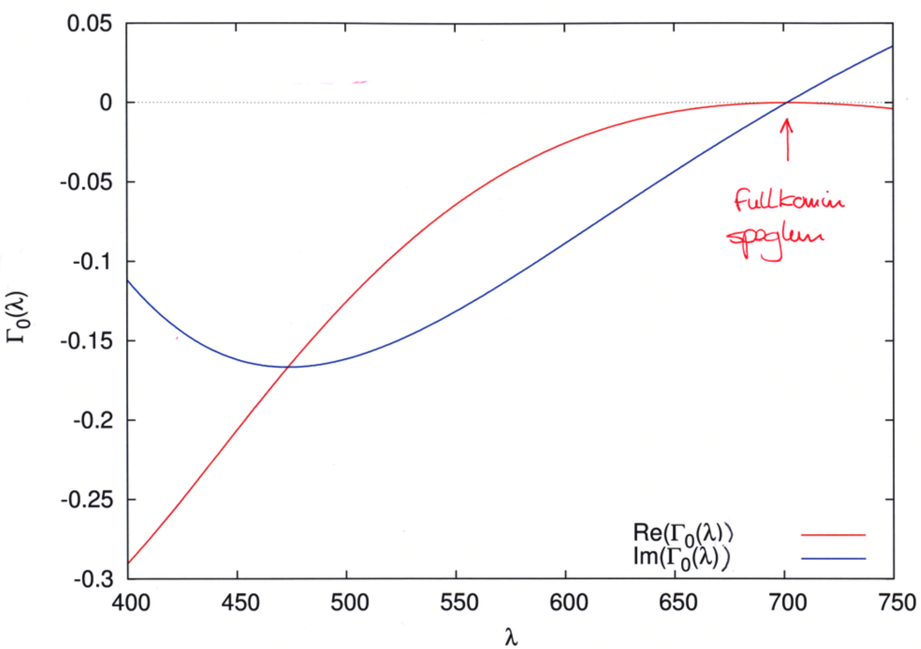
$$= \sqrt{\frac{\eta_3}{\eta_0}}\;\frac{\frac{\eta_3}{\eta_0}+i\sqrt{\frac{\eta_3}{\eta_1}}\tan(\beta_2 d)}{\sqrt{\frac{\eta_3}{\eta_0}}+i\frac{\eta_3}{\eta_0}\tan(\beta_2 d)}$$

$$\frac{\eta_3}{\eta_0} = \sqrt{\frac{\mu_0\epsilon_0}{\epsilon_3\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{3r}}} = \frac{1}{2}$$

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi\sqrt{\epsilon_{2r}}}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\sqrt{\epsilon_{3r}}}$$

$$\rightarrow \beta_2 d = 2\pi\sqrt{\sqrt{\epsilon_{3r}}}\,\frac{d}{\lambda_0} = 2\pi\sqrt{2}\,\frac{d}{\lambda_0}$$

Sjá graf á næstu síðu



② Dæmi 8-45 í bók

$$\Gamma_\perp = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}$$

$$\tau_\perp = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}$$

umskrifa í ϵ_{r1}, ϵ_{r2} og θ_i

$$\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} = 2.25$$

Ljós úr þéttu efni í þunnt

gerum ráð fyrir að $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

Lögmál Snells

$$\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t} = \sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i} = \sqrt{1-\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}\sin^2\theta_i}$$

$$\Gamma_\perp = \frac{\frac{\eta_2}{\eta_1}\cos\theta_i - \cos\theta_t}{\frac{\eta_2}{\eta_1}\cos\theta_i + \cos\theta_t}$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2}} \rightarrow \frac{\eta_2}{\eta_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}$$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}}$$

10

$$\Gamma_\perp(\theta_i) = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}\cos\theta_i - \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}\sin^2\theta_i}}{\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}\cos\theta_i + \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}\sin^2\theta_i}}$$

$$\tau_\perp(\theta_i) = \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}\cos\theta_i}{\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}\cos\theta_i + \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}\sin^2\theta_i}}$$

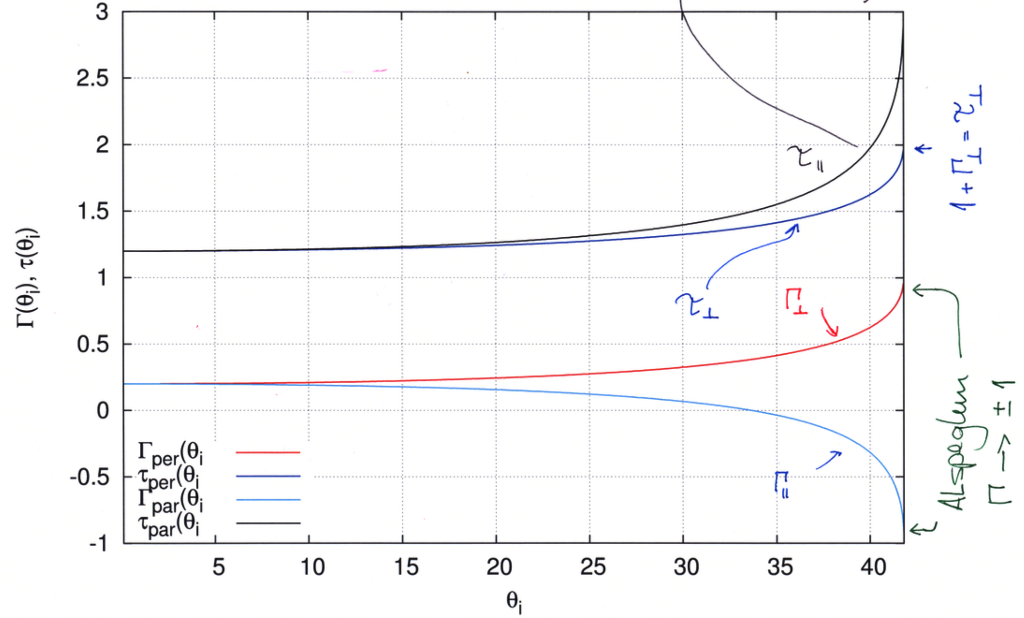
Eins fast

$$\Gamma_\parallel(\theta_i) = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}\sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}\sin^2\theta_i} - \cos\theta_i}{\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}\sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}\sin^2\theta_i} + \cos\theta_i}$$

$$\tau_\parallel(\theta_i) = \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}\cos\theta_i}{\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}\sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}\sin^2\theta_i} + \cos\theta_i}$$

11

$$1 + \Gamma_\parallel = \tau_\parallel\left(\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\right)$$



12