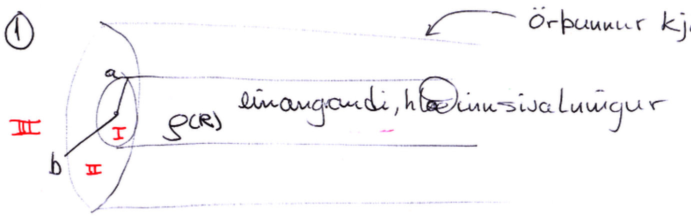
①



$\varrho(R) = \varrho_0 \frac{R}{a}$, Notum Gauß lögmálið þ.s. ϱ er aðeins háð R

$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Til þess að nota lögmál Gauß á svæði I þurfum við $Q(R)$, þá heildarhleðslu sem er innan geisla R

$$Q(R) = L\cdot\int_0^R R'dR'd\phi\, \varrho(R')$$

mjög langur vír, þ.a. við horfum fram hjá því sem gerist á endunum

②

$$Q(R) = \frac{L\cdot 2\pi \varrho_0}{a}\int_0^R dR'\, R'^2 = 2\pi\varrho_0 \frac{L}{a}\frac{R^3}{3}$$

rétt við

Rafsviðið er einungis í $\hat{a}_R$-átt óháð ϕ eða z

$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{Q(R)}{\epsilon_0} = \frac{2\pi}{3\epsilon_0}\frac{L}{a}(\varrho_0 R^3)$$

$$L\cdot 2\pi R E_R = \frac{2\pi}{3\epsilon_0}\frac{L}{a}(\varrho_0 R^3) \rightarrow \boxed{\bar{E} = \frac{1}{3a\epsilon_0}\varrho_0 R^2 \hat{a}_R}$$

á svæði I

Á svæði II er $Q = Q(a) = \frac{2\pi}{3}\frac{L}{a}\varrho_0 a^3 = \frac{2\pi}{3}\varrho_0 a^2 L$

Gauß leiðir þá til

$$L\cdot 2\pi R E_R = \frac{2\pi}{3\epsilon_0}\varrho_0 a^2 L \rightarrow \boxed{\bar{E} = \frac{1}{3R\epsilon_0}\varrho_0 a^2 \hat{a}_R}$$

á svæði II

③

Ytri sívalningurinn er í upphafi óhlaðinn.
Innan á honum verður að jafndreifast öll hleðslan $-Q(a)$ (Í rafstöðufræði enda allar sviðslínur á hleðslum) utan á honum skaudast því ytri-borðshleðsla sem jafngildir $+Q(a)$ (óhlaðinn í upphafi).

Séð utan frá er heildarhleðsla kerfisins $+Q(a)$ og hún er með sívalningssamhverfu

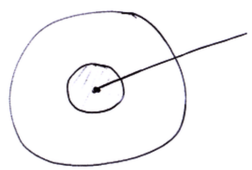
→ á svæði III leiðir lögmál Gauß til

$$\boxed{\bar{E} = \frac{1}{3R\epsilon_0}\varrho_0 a^2 \hat{a}_R}$$

Eins og á svæði II

④

Rafmættið



Vel beinan heildunarveg í $\hat{a}_R$ átt
Byrjum í miðju og veljum spennu 0 á samhverfuás

$$V_2 - V_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \bar{E}\cdot d\bar{l}$$

Á svæði I fæst þá

$d\bar{l} = \hat{a}_R dR$

$$V(R) - 0 = -\int_0^R \bar{E}_I\cdot d\bar{l} = -\int_0^R dR'\, \frac{\varrho_0}{3a\epsilon_0} R'^2$$

$$= -\frac{\varrho_0}{3a\epsilon_0}\left\{\frac{R^3}{3}\right\}\Big|_0^R = \boxed{-\frac{\varrho_0 R^3}{9a\epsilon_0}}$$

5

á ytriborðinu í $R=a$ er þá $V(a) = -\frac{\rho_0 a^2}{9}$

því reiknum við á svæði II

$$V(R) - V(a) = -\int_a^R \bar{E}_{II}\cdot d\bar{l} = -\int_a^R dR' \,\frac{\rho_0 a^2}{3R'\epsilon_0}$$

$$\to V(R) = -\frac{\rho_0 a^2}{9\epsilon_0} - \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\int_a^R dR' \frac{1}{R'} = -\frac{\rho_0 a^2}{9\epsilon_0} - \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\ln\left(\frac{R}{a}\right)$$

$$\boxed{V(R) = -\frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\left\{\frac{1}{3} + \ln\left(\frac{R}{a}\right)\right\}}$$

því fæst $V(b) = -\frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\left\{\frac{1}{3} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right\}$ sem er spennan á ytri sívalningnum, skelinni. Kjörleiðari spennan alls staðar á honum

6

Á svæði III fæst því

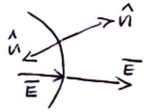
$$V(R) - V(b) = -\int_b^R \bar{E}_{III}\cdot d\bar{l} = -\int_b^R dR' \,\frac{\rho_0 a^2}{3R'\epsilon_0}$$

$$V(R) = -\frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\left\{\frac{1}{3} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right\} - \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\ln\left(\frac{R}{b}\right)$$

$$\boxed{V(R) = -\frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\left\{\frac{1}{3} + \ln\left(\frac{R}{a}\right)\right\}}$$

sama og fékkst á svæði II

ytri sívalningurinn fellur saman við jafnspennuflöt frá þeim fyrir, hann hefur því engin bein áhrif. Á honum stendur ytriborðs hleðsla með sitthvort formerkið



7

$$V(R) = -\frac{\rho_0 R^3}{9a\epsilon_0} \qquad R<a$$

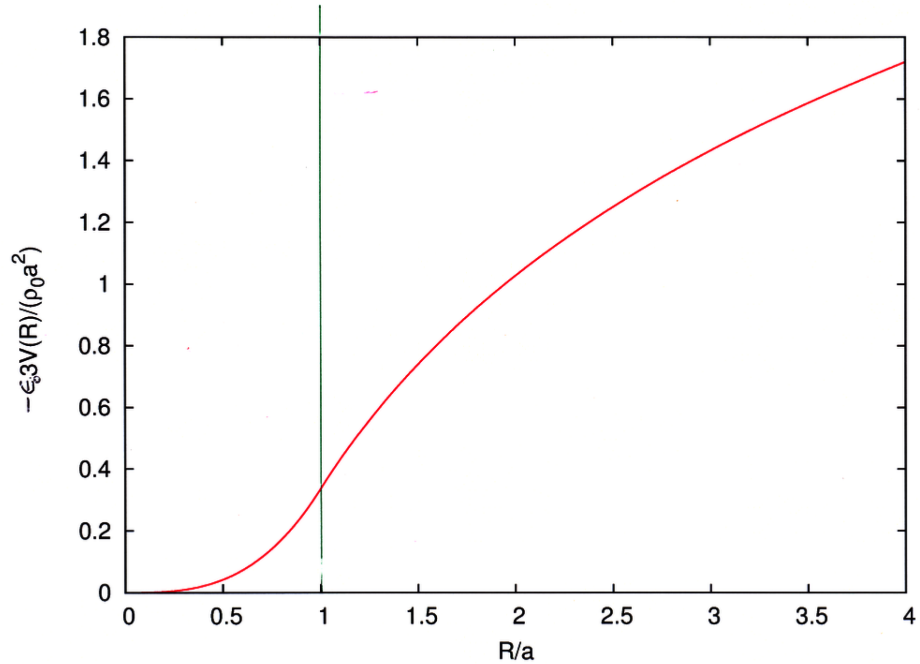
$$V(R) = -\frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\left\{\frac{1}{3} + \ln\left(\frac{R}{a}\right)\right\} \qquad R>a$$

Endurritum sem

$$V(R) = -\frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\left(\frac{R}{a}\right)^3\frac{1}{3} \qquad R<a$$

$$V(R) = -\frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\left\{\frac{1}{3} + \ln\left(\frac{R}{a}\right)\right\} \qquad R>a$$

8



② Rafsvið gefið sem

$$\bar{E}(x,y,z) = \left(0,\ E_0 \frac{x}{L},\ 0\right)$$

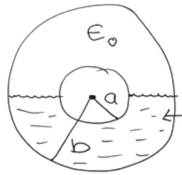
Athugum $\bar{\nabla} \times \bar{E} = \hat{a}_z \cdot \frac{\partial E_y}{\partial x}$ hér

$$= \hat{a}_z \cdot \frac{E_0}{L} \neq 0$$

Uppfyllir ekki skilyrðið fyrir Rafstöðufræði

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = 0$$

① Tveir sammiðja sívalningar



$a, b << L$ lengd þeirra

Rafsvarinn brýtur ekki „radial"-samhverfu $\bar{E}$

① Finna rýmd

Nota verður almenna framsetn Gauß lögmáls

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q \quad \leftarrow \text{hleðslan á innri sívl}$$

N: Norður
S: Suður

$$\rightarrow \epsilon_0 \pi R L\, E(R) + \epsilon_r \epsilon_0 \pi R L\, E(R) = Q$$

$$\rightarrow (1+\epsilon_r)\epsilon_0 \pi R L\, E(R) = Q$$

$$\rightarrow E(R) = \frac{Q}{\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0 R L} = \frac{(Q/L)}{\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0 R}$$

Við þurfum spennumun flatanna

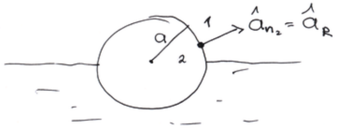
$$V_b - V_a = -\int_a^b \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\int_a^b dR\, E(R) = -\frac{(Q/L)}{\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0} \int_a^b \frac{dR}{R}$$

$$= -\frac{(Q/L)}{\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0} \left\{ \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right\}$$

$$\frac{C}{L} = \frac{Q/L}{|V_b - V_a|} = \frac{\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

② Hve stór hluti Q er á hvorum hálf sívalningi

$$\hat{a}_{n_2} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s$$



$$\hat{a}_R \cdot \bar{D}_N(a) = \rho_s$$

$$\rightarrow \epsilon_0 E(a) = \rho_s$$

$$\rightarrow \frac{Q/L}{\pi(1+\epsilon_r)a} = \rho_s^N$$

og á suður sívalningi fæst

$$\epsilon_0 \epsilon_r E(a) = \rho_s^S \rightarrow \frac{\epsilon_r Q/L}{\pi(1+\epsilon_r)a} = \rho_s^S$$

(4)

Heildarhleðslan á sívalningshelming er því

$$Q_N = \pi a L \cdot \rho_s^N = \frac{Q}{(1+\epsilon_r)}$$

$$Q_S = \pi a L\, \rho_s^S = \frac{\epsilon_r Q}{(1+\epsilon_r)}$$

$$Q_N + Q_S = Q$$

---

(3) Rúmhleðsla?

Hún væri skilgreind með

$$\rho_P = -\bar{\nabla}\cdot\bar{P}$$

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$$

$$\to \bar{P} = \bar{D} - \epsilon_0 \bar{E}$$

Í N-helmingi er $\bar{P} = 0$

Í S-helmingi, í rafsvara er

$$E(R) = \frac{(Q/L)}{\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0 R}$$

$$D_s(R) = \epsilon_r E(R)$$

(5)

$$\bar{P}_N(R) = \frac{(Q/L)}{\pi(1+\epsilon_r)}\left(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_0} - 1\right)\frac{1}{R}\,\hat{a}_R$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{P}_N(R) = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R P_R^N\right) = 0$$

---

(4) Af þessu sést að hleðslan á ytri sívalningi er $-Q$, $\rho_P = 0$

---

(5) Hér er eðlilegt að nota

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V dv\, \bar{D}\cdot\bar{E} = \frac{1}{2}\int_N dv\, \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\int_S dv\, \epsilon_r\epsilon_0 E^2$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{(1+\epsilon_r)}{2}\int_V dv\, E^2 = \epsilon_0\frac{(1+\epsilon_r)}{4}\, 2\pi \int_a^b R\,dR\, \frac{1}{R^2}\frac{(Q/L)^2 L}{\{\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0\}^2}$$

(6)

$$W_e = \frac{\epsilon_0(1+\epsilon_r)}{2\{\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0\}^2}\pi\left(\frac{Q}{L}\right)^2 L \int_a^b dR\,\frac{1}{R} = \frac{\epsilon_0(1+\epsilon_r)}{\{\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0\}^2}\pi\left(\frac{Q}{L}\right)^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ef Q er haldið föstu og hæð rafsvarandi vökva haldið fastri þá er ljóst að W_e eykst ef b ykist aðeins eða a minnkaði aðeins

$$W_e = \frac{1}{2\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0}\left(\frac{Q^2}{L}\right)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

sem líka mátti finna með því að nota (3-180a-c)

Krafturinn á ytra sívalninginn er

$$\bar{F}_Q = -\bar{\nabla} W_e = -\hat{a}_R\left\{\frac{Q^2}{2\pi(1+\epsilon_r)\epsilon_0\, b\, L}\right\}$$

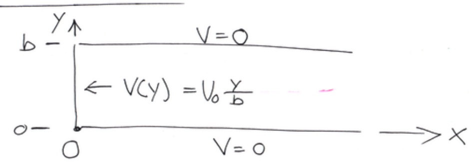
m.t.t. b

með stefnu að innri sívalningi

(1)

3. skammtur

(1)



Dæmið er hliðstætt við dæmi í fyrirlestri, nema hvað mættið á endaplötunni er $V(y) = V_0 \frac{y}{b}$ hér

Eins og áður fæst því lausn sem er línuleg samantekt grunnlausna jöfnu Laplace

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n x}\sin(k_n y), \quad k_n = \frac{n\pi}{b}$$

Lausnin uppfyllir jaðarskilyrðin á láréttu plötunum. En við þurfum að ákvarða liðunarstuðlana t.þ.a.

$$V(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n y) = V_0 \frac{y}{b}, \quad 0 < y < b$$

2

Við notum enn að föllin Sin$(k_m y)$ mynda hornréttan fullkominn grunn á bilinu.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^b dy\, C_n \sin(k_n y)\sin(k_m y) = \frac{V_0}{b}\int_0^b dy\, y \sin(k_m y)$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n b\int_0^b \frac{dy}{b}\sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right)\sin\left(m\pi\frac{y}{b}\right) = V_0 b\int_0^b \frac{dy}{b}\frac{y}{b}\sin\left(m\pi\frac{y}{b}\right)$$

breytuskipti „$\frac{y}{b} \rightarrow u$" gefa

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^1 du \sin(n\pi u)\sin(m\pi u) = V_0\int_0^1 du\, u \sin(m\pi u)$$

3

$$\rightarrow C_m \frac{1}{2} = -V_0\frac{\cos(m\pi)}{m\pi} = \frac{V_0}{m\pi}(-1)^{m+1}$$

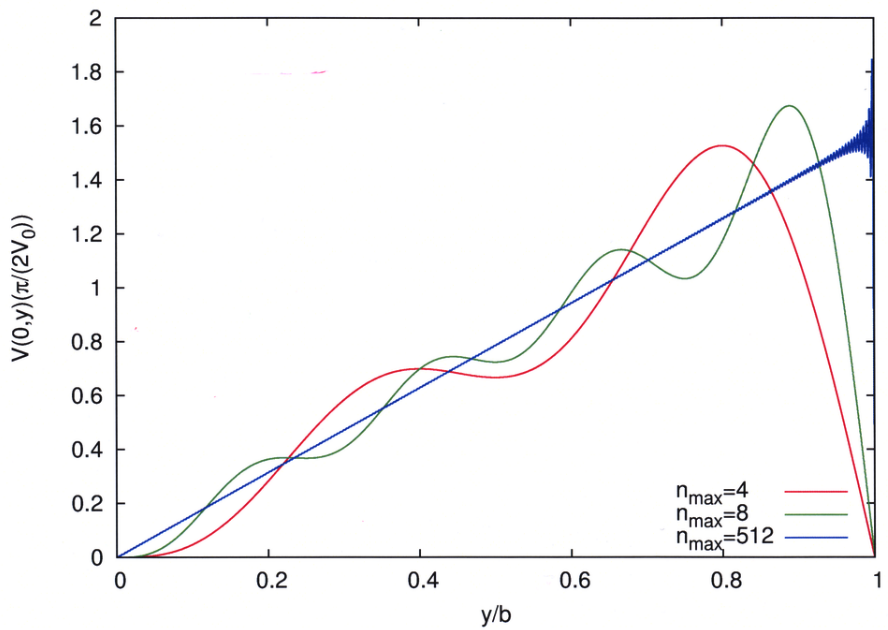
$$\left\{ \text{því} \int_0^1 du \sin(n\pi u)\sin(m\pi u) = \frac{1}{2}\delta_{n,m} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ef } n=m \\ 0 & \text{ef } n\neq m \end{cases} \right\}$$

$$\rightarrow C_m = \frac{2V_0}{m\pi}(-1)^{m+1}$$ og lausnin verður

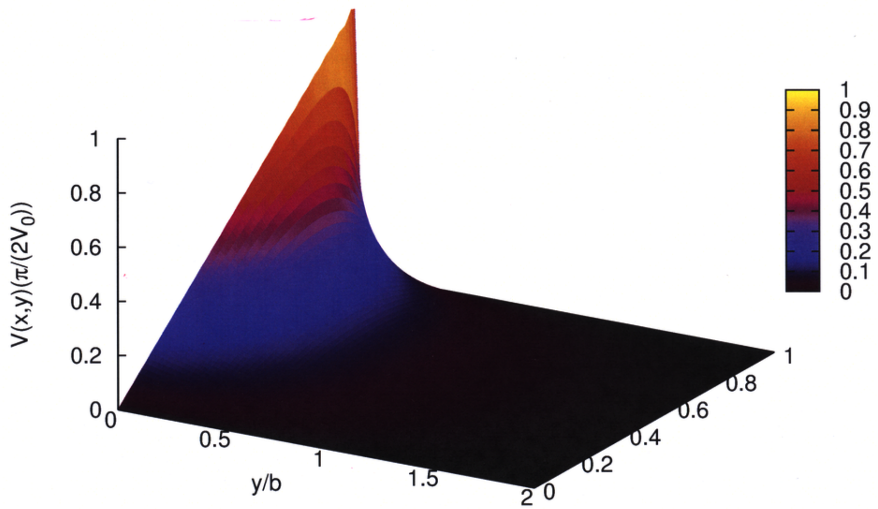
$$V(x,y) = \frac{2V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n\pi\frac{x}{b}}\sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right)$$

Reynum í grafík, áður en áfram er haldið

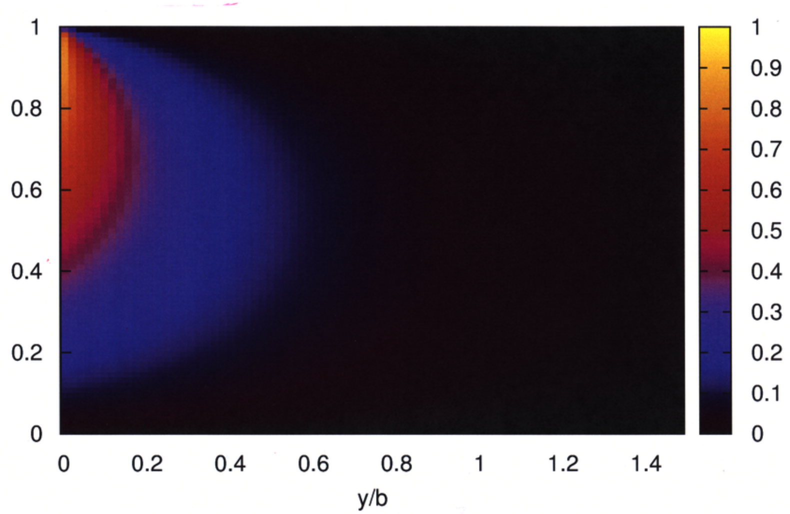
4



5



⑥



⑦

(2) Yfirborðshleðsla á endaplötu

Jaðarskilyrðin eru $\hat{a}_{n_2}\cdot(\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s$

þ.s. $\hat{a}_{n_2}$ er vigur út úr efni númer 2

$$\rightarrow \quad \hat{a}_x \cdot \bar{D} = \rho_s \quad \rightarrow \quad \hat{a}_x \cdot \epsilon_0 \bar{E} = \rho_s$$

Eða $\epsilon_0 E_x = \rho_s$ og $\bar{E} = -\bar{\nabla} V$

$$V(x,y) = \frac{2V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-n\pi\frac{x}{b}}\sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right)$$

$$\rightarrow \quad E_x(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}V(x,y) = \frac{2V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{n\pi}{b}e^{-n\pi\frac{x}{b}}\sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right)$$

$$\rho_s(y) = \frac{2V_0\epsilon_0}{b}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right)$$

⑧

þessa röð má summa

$$\rho_s(y) = \frac{2V_0\epsilon_0}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}\sin\left((n+1)\pi\frac{y}{b}\right) = \frac{2V_0\epsilon_0}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\sin\left((n+1)\pi\frac{y}{b}\right)$$

$$= \frac{2V_0\epsilon_0}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{e^{i\frac{(n+1)\pi y}{b}} - e^{-i\frac{(n+1)\pi y}{b}}\right\}\frac{1}{2i}$$

$$= \frac{2V_0\epsilon_0}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{e^{\frac{i\pi y}{b}}\left(-e^{\frac{i\pi y}{b}}\right)^n - e^{-\frac{i\pi y}{b}}\left(-e^{-\frac{i\pi y}{b}}\right)^n\right\}\frac{1}{2i}$$

$$= \frac{2V_0\epsilon_0}{2bi}\left\{\frac{e^{\frac{i\pi y}{b}}}{1+e^{\frac{i\pi y}{b}}} - \frac{e^{-\frac{i\pi y}{b}}}{1+e^{-\frac{i\pi y}{b}}}\right\}$$

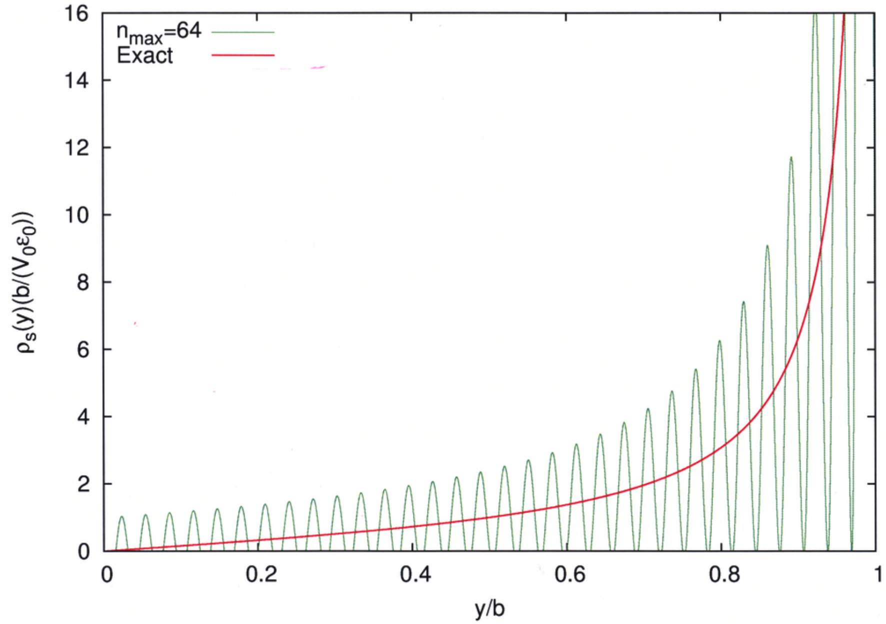
þ.s. notað er $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}$, $|q|<1$

⑨

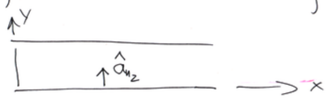
$$\rho_s(y) = \frac{2V_0\epsilon_0}{b\cdot 2i}\left\{\frac{e^{\frac{i\pi y}{b}} - e^{-\frac{i\pi y}{b}}}{2 + e^{\frac{i\pi y}{b}} + e^{-\frac{i\pi y}{b}}}\right\} = \frac{2V_0\epsilon_0}{b\,2}\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)}\right\}$$

$$= \frac{V_0\epsilon_0}{b}\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)}{\left\{1+\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right\}}$$

Reynum þetta með grafík. Hér er rétt að búast við að samleitni raðarinnar sé ekki góð og nákvæma lausnin er með sérstöðupunkt í $y = b$



(3) yfirborðshleðsla neðri láréttu plötunnar



$$\hat{a}_{n_2}\cdot(\bar{D}_1-\bar{D}_2)=\rho_s$$

$$\to\ \hat{a}_y\cdot\bar{D}=\rho_s\ \to\ \epsilon_0 E_y=\rho_s$$

$$E_y(x,y)=-\frac{\partial}{\partial y}V(x,y)\Big|_{y=0}=-\frac{2V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-n\pi\frac{x}{b}}\frac{n\pi}{b}$$

$$\to\ \rho_s(x)=-\frac{2V_0\epsilon_0}{b}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{-n\pi\frac{x}{b}}$$

$$=-\frac{2V_0\epsilon_0}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}e^{-(n+1)\pi\frac{x}{b}}$$

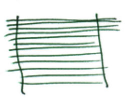
$$=-\frac{2V_0\epsilon_0}{b}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{\pi x}{b}}\left(-e^{-\frac{\pi x}{b}}\right)^n$$

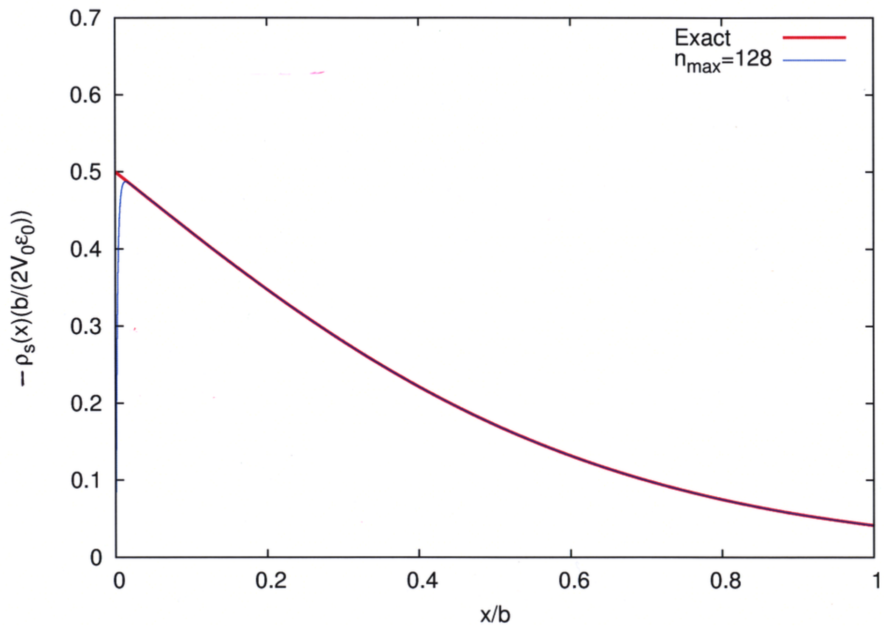
$$=-\frac{2V_0\epsilon_0}{b}\,\frac{e^{-\frac{\pi x}{b}}}{1+e^{-\frac{\pi x}{b}}}=\rho_s(x)$$

Summur raðir hér eru á mörkum þess að vera samleitnar, eins og gröfin sýna. Analýtíska summuna má gera með samleitnu þáttum sem síðan eru látnir hverfa ($\epsilon\to 0$).

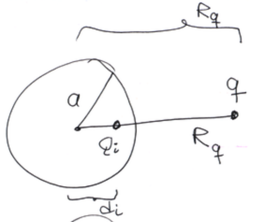
Athugun með grafík til gamans

Rétt er að nefna að jaðarskilyrðið fyrir endaplötuna er ekki alveg í samræmi við venjur í rafstöðufræði. Þannig er ekki hægt að setja upp í kjörleiðara. Ef endaplatan er annað en kjörleiðari vaknar spurningin hvað er $\bar{D}$ innan hennar. Svona kerfi má útbúa með þunnum samhliða vírum á þunnum einangrara. Vírarnir eru einangraðir frá hverjum öðrum og bakvið þunna einangrarann má vera kjörleiðari. Á stórsæjum skala sést þá mættið $V(y)=V_0\frac{y}{b}$. Það er líka óvenjulegt að þessi jaðarskilyrði leiða til rafsviðs samhliða plötunni.





(2) 14



Kraftur milli kúlunnar og hleðslunnar q

Hægt er að setja spegil hleðslu í kúlunnar

Spegilhleðslan verður í fjarlægð $d_i = \frac{a^2}{R_q}$ frá miðju

stærð hennar er $Q_i = -\frac{a}{R_q} q$

Því er rétt að byrja við einföldu Coulombslögmáli

$$|F| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 \frac{a}{R_q}}{\left(R_q - \frac{a^2}{R_q}\right)^2}$$

Aðdráttar Kraftur milli þeirra

15

Þessi lausn er fundin í samræmi við aðferðina sýnda í dæmi 4-3 (Example 4-3, bls 161) í bók.

Ólíka lengri leið væri að nota

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \epsilon E^2 dv$$

og finna kraftinn með því að hnika til fjarlægð hleðslunnar frá kúlunni

(1) 1

Þunn einangrandi kúluskel er með yfirborðshleðslu

$\rho_s(\theta) = \rho_{s0}\sin(3\theta)$, geisli a

finna $V(R\theta)$ innan og utan skeljar

Ég reyni eina lausnar aðferð í ætt við fyrri dæmi

Hér er verkefninu lýst með jöfnu Poissons

$$\nabla^2 V(R\theta) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho_s(R,\theta)$$

utan og innan kúlunnar verður jafnan að jöfnu Laplace
Við leysum hana fyrir og steypum síðan saman lausnunum
t.þ.a. taka tillit til ρ_s á kúluyfirborðinu

(2)

Almenna lausnin fyrir ϕ-einsleitkerfi er samanlekt

$$V_n(R,\theta) = \left\{A_n R^n + B_n R^{-(n+1)}\right\} P_n(\cos\theta)$$

Innan kúlu er engin punkthleðsla $\rightarrow B_n = 0$ fyrir f. $\forall n$

$$V_n^i(R,\theta) = A_n R^n P_n(\cos\theta)$$

utan kúlu getur lausnin ekki vaxið án takmarkana $\rightarrow A_n = 0$, bundið líka við að $V(R \rightarrow \infty) = 0$

$$V_n^o(R,\theta) = B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

Samsteyfing lausnanna fyrir $R=a$ verður að uppfylla

$$\boxed{\hat{a}_{n2}\cdot(\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s}$$

3

Við notum $\vec{E} = -\nabla V$ og $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ ástand $\hat{a}_{n2} = \hat{a}_R$

þá verða skilyrðin

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial R} V^o(R,\theta) - \frac{\partial}{\partial R} V^i(R,\theta) \right\}\Bigg|_{R=a} = -\frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0}\sin(3\theta) \qquad (*)$$

þ.s.

$$\boxed{V^o(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) \qquad \underline{R > a}}$$

og

$$\boxed{V^i(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos\theta) \qquad \underline{R < a}}$$

4

Við þurfum að umskrifa $\sin(3\theta)$ yfir í P_n-röð

$$\boxed{\sin(3\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta)}$$

P_n-in eru hornrétt

$$\boxed{\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, P_n(\cos\theta) P_{n'}(\cos\theta) = \frac{\delta_{n,n'} \cdot 2}{2n+1}}$$

$$\rightarrow C_\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, P_\ell(\cos\theta) \sin(3\theta)$$

notum $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$$\rightarrow C_\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_0^{\pi} d\theta \, P_\ell(\cos\theta) \left\{ 3\sin^2\theta + 4\sin^4\theta \right\}$$

5

$$C_\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^{1} dx \, P_\ell(x) \left\{ 3\sqrt{1-x^2} + 4(1-x^2)^{3/2} \right\}$$

á bilinu $[-1,1]$ eru $\sqrt{1-x^2}$ og $(1-x^2)^{3/2}$ jöfnstæð föll

Um $P_n(x)$ gildir að $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

því eru aðeins $C_\ell \neq 0$ fyrir $\ell = 0, 2, 4, 6, 8, \dots$ mögulega

$P_0(\theta) = 1$

$$C_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \cdot \sin(3\theta) = 0$$

því er kúluskelin í heild óhlaðin og hefur ekkert einskautsvægi

þetta er líka sama heildið u.þ.b. og til þess að finna heildarhleðsluna

$$\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, \rho_s(a,\theta) = 0$$

6

Heildið er nokkuð snúið, öll C_ℓ fyrir jöfn $\ell \geq 2$ koma í summuna. Ég reikna nokkur með maxima

$$C_2 = \frac{5}{2} \, \frac{3\pi}{16}$$

$$C_4 = -\frac{9}{2} \, \frac{15\pi}{256}$$

$$C_6 = -\frac{13}{2} \, \frac{21\pi}{2048}$$

$$C_8 = -\frac{17}{2} \, \frac{63\pi}{16384}$$

$$C_{10} = -\frac{21}{2} \, \frac{495\pi}{262144}$$

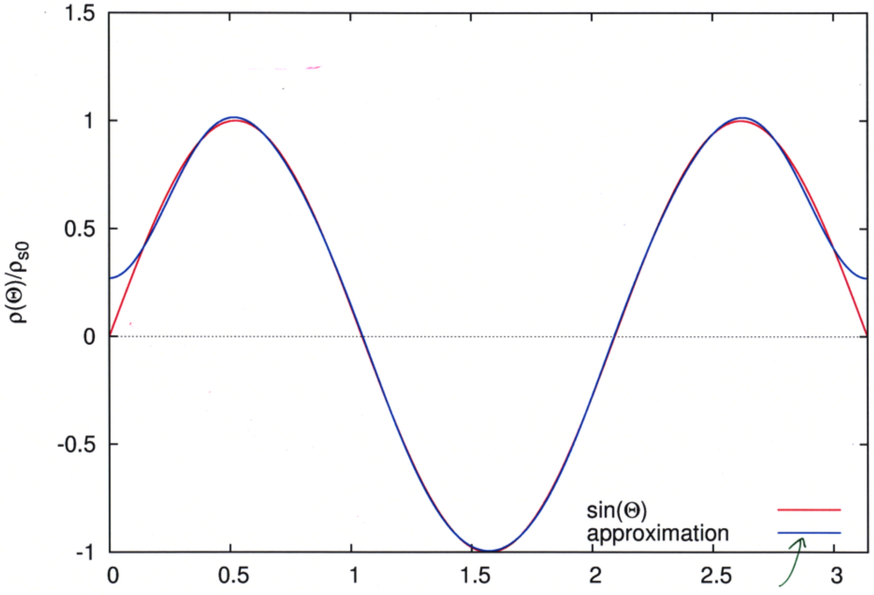
Á næstu síðu sýni ég grafið af samanburðinum fyrir

$$\rho(\theta) = \rho_{s0} \sin(3\theta)$$

og

$$\sum_{n=2,4,6,8}^{8} C_n P_n(\cos\theta) \cdot \rho_{s0}$$

Þar kemur í ljós að þessir liðir nægja vel nema rétt þegar $\theta \to 0$ eða $\theta \to \pi$ {í kringum N og S-skaut}



Nálgun með liðum upp í C_{10}

Við þurfum að uppfylla (*)

$$-\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\frac{B_n}{a^{n+2}}P_n(\cos\theta)-\sum_{n=2}^{\infty}nA_n a^{n-1}P_n(\cos\theta)=-\frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0}\sum_{n=2}^{\infty}C_nP_n(\cos\theta) \qquad (**)$$

fyrir $n=\{2,4,6,8,10,\dots\}$

Þar að auki verður mættið að vera samfellt í $R=a$

$$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}A_n a^n P_n(\cos\theta)=\sum_{n=2}^{\infty}B_n a^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$$

$$\rightarrow \boxed{B_n = A_n a^{2n+1}}$$ fyrir hvern lið

$$(**) \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)A_n a^{n-1}P_n(\cos\theta)=\frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0}\sum_{n=2}^{\infty}C_nP_n(\cos\theta)$$

Hér þarf að vera saman liðum með sama P_n

$$\rightarrow (2n+1)A_n a^{n-1}=\frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0}C_n$$

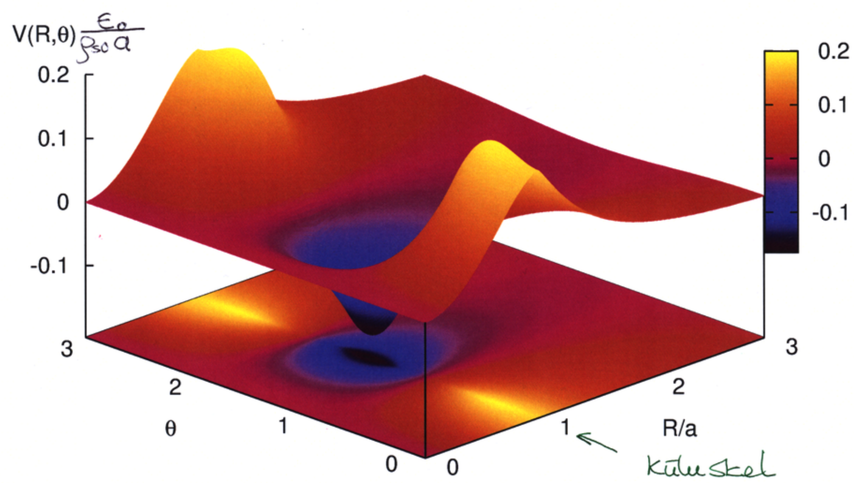
$$\rightarrow \boxed{A_n=\frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0}\frac{C_n}{(2n+1)a^{n-1}}}$$

$$\rightarrow \boxed{B_n=\frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0}\frac{C_n}{(2n+1)}a^{n+2}}$$

því fæst

$$\boxed{\begin{aligned} V^i(R,\theta)&=\frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0}a\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n}{2n+1}\left(\frac{R}{a}\right)^n P_n(\cos\theta)\\ V^o(R,\theta)&=\frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0}a\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n}{2n+1}\left(\frac{a}{R}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta)\end{aligned}}$$

Nálgun með liðum upp í C_{10}



Ytri loysnin er

$$V^{o}(R,\theta) = \frac{\rho_{so} a}{\epsilon_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{2n+1} \left(\frac{a}{R}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \qquad \underline{R > a}$$

Þegar $R/a >> 1$ þá er loysnin

$$V^{o}(R,\theta) \longrightarrow \frac{\rho_{so} a}{\epsilon_0} \quad \frac{c_2}{5} \left(\frac{a}{R}\right)^{3} P_2(\cos\theta)$$

mátti fjórstauts, þegar nær kemur kúluni birtast allir hinir liðir sum deyja annars hratt út.

File: /home2/vidar/Instruado/RSF/Da...adæmi_2014/Grafik/Pl-lidun.wxm   Page 1 of 1

```
/* [wxMaxima batch file version 1] [ DO NOT EDIT BY HAND! ]*/
/* [ Created with wxMaxima version 13.04.2 ] */

/* [wxMaxima: input   start ] */
integrate(sin(x)*sin(3*x)*P(x), x, 0, %pi);
/* [wxMaxima: input   end   ] */

/* [wxMaxima: input   start ] */
integrate(sin(x)*sin(3*x)*((3*(cos(x))**2-1)/2), x, 0, %pi);
/* [wxMaxima: input   end   ] */

/* [wxMaxima: input   start ] */
integrate(sin(x)*sin(3*x)*((35*(cos(x))**4-30*(cos(x))**2+3)/8), x, 0, %pi);
/* [wxMaxima: input   end   ] */

/* [wxMaxima: input   start ] */
integrate(sin(x)*sin(3*x)*((231*(cos(x))**6-315*(cos(x))**4+105*(cos(x))**2-5)/16), x, 0, %pi);
/* [wxMaxima: input   end   ] */

/* [wxMaxima: input   start ] */
integrate(sin(x)*sin(3*x)*((6435*(cos(x))**8-12012*(cos(x))**6+6930*(cos(x))**4-1260*(cos(x))**2+35)/128), x, 0, %pi);
/* [wxMaxima: input   end   ] */

/* [wxMaxima: input   start ] */
integrate(sin(x)*sin(3*x)*((46189*(cos(x))**10-109395*(cos(x))**8+90090*(cos(x))**6-30030*(cos(x))**4+3465*(cos(x))**2-63)/256), x, 0, %pi);
/* [wxMaxima: input   end   ] */

/* Maxima can't load/batch files which end with a comment! */
"Created with wxMaxima"$
```

Heildin til þess at finna liðanar støddir

File: /home2/vidar/Instruado/RSF/Da...adæmi_2014/Grafik/Pl-lidun.gnu   Page 1 of 1

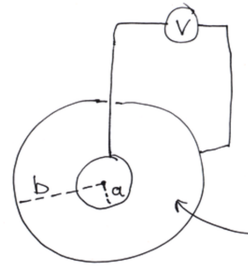
```
set term post landscape enhanced color solid 'Helvetica' 18
set output 'Pl-lidun.ps'

set key right bottom Left

set xlabel "{/Symbol Q}"
set xlabel  offset character 0, 0, 0 font "" textcolor lt -1 norotate

set ylabel "{/Symbol r}({/Symbol Q})/{/Symbol r}_{s0}"
set ylabel  offset character 0, 0, 0 font "" textcolor lt -1 rotate by -270

set xzeroaxis
set samples 5000

P2(x)  = (3*x**2-1)/2.0
P4(x)  = (35*x**4-30*x**2+3)/8.0
P6(x)  = (231*x**6-315*x**4+105*x**2-5)/16.0
P8(x)  = (6435*x**8-12012*x**6+6930*x**4-1260*x**2+35)/128.0
P10(x) = (46189*x**10-109395*x**8+90090*x**6-30030*x**4+3465*x**2-63)/256.0

c2  =  (5*3*pi)/(2*16.0)
c4  = -(9*15*pi)/(2*256.0)
c6  = -(13*21*pi)/(2*2048.0)
c8  = -(17*63*pi)/(2*16384.0)
c10 = -(21*495*pi)/(2*262144.0)

f(x) = c2*P2(x) + c4*P4(x) + c6*P6(x) + c8*P8(x) + c10*P10(x)

plot [0:pi] sin(3*x) w l lt 1 lw 2 title 'sin({/Symbol Q})',\
        f(cos(x)) w l lt 3 lw 2 title 'approximation'
#    EOF
```

Gnuplot skrifta til at reyna samleitni røðar fyrir $\rho_s(a,\theta)$

File: /home2/vidar/Instruado/RSF/Da...æmi_2014/Grafik/V-Pl-lidun.gnu   Page 1 of 1

```
set term post landscape enhanced color solid 'Helvetica' 18
set output 'V-Pl-lidun.ps'

unset key

set xlabel "R/a"
set xlabel  offset character 0, 0, 0 font "" textcolor lt -1 norotate

set ylabel "{/Symbol q}"
set ylabel  offset character 0, 0, 0 font "" textcolor lt -1 rotate by -270

set zlabel "V(R,{/Symbol q})"
set zlabel  offset character 4, 7, 0 font "" textcolor lt -1 norotate

set ytics border in scale 1,0.5 mirror norotate  offset character -2, 0, 0
set ytics 0,1,3
set xtics 0,1,3
set ztics  -0.2,0.1,0.2
set cbtics -0.2,0.1,0.2

set samples    200
set isosamples 200

P2(y)  = (3*y**2-1)/2.0
P4(y)  = (35*y**4-30*y**2+3)/8.0
P6(y)  = (231*y**6-315*y**4+105*y**2-5)/16.0
P8(y)  = (6435*y**8-12012*y**6+6930*y**4-1260*y**2+35)/128.0
P10(x) = (46189*x**10-109395*x**8+90090*x**6-30030*x**4+3465*x**2-63)/256.0

c2  =  (5*3*pi)/(2*16.0)
c4  = -(9*15*pi)/(2*256.0)
c6  = -(13*21*pi)/(2*2048.0)
c8  = -(17*63*pi)/(2*16384.0)
c10 = -(21*495*pi)/(2*262144.0)


Vo(x,y) = c2*P2(y)/(5.0*x**3) + c4*P4(y)/(9.0*x**5) + c6*P6(y)/(13.0*x**7) + c8*P8(y)/(17.0*x**9) + c10*P10(y)/(21.0*x**11)
Vi(x,y) = x**2*c2*P2(y)/5.0 + x**4*c4*P4(y)/9.0 + x**6*c6*P6(y)/13.0 + x**8*c8*P8(y)/17.0 + x**10*c10*P10(y)/21.0

V(x,y) = x>1 ? Vo(x,y) : Vi(x,y)

set view 57,315
set ticslevel 0.1
set pm3d at bs
splot [0:3][0:pi] V(x,cos(y)) w pm3d
#    EOF
```

Gnuplot skrifta fyrir $V(R,\theta)$



Kúluþéttir

$$\epsilon(R) = \epsilon_0 \frac{b}{R}$$

$$\sigma(R) = \sigma_0 \left(\frac{R}{a}\right)^2$$

Ómskur leiðari

① Finna leiðni þéttisins

Við höfum engar upplýsingar um dreifingu hleðslu um kerfið, því getum við ekki notað

$$\oint \bar{D}\cdot d\bar{S} = Q$$

Við gerum ráð fyrir spennunni V og notum

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0$$

Innan þéttis gildir $\bar{\nabla}\times\bar{E} = 0$, engar uppsprettur þar fyrir orku

Rafstöðufræði $\to \bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0$ vegna samfelldnijöfnu

Ómskt efni $\bar{J} = \sigma\bar{E}$

Sést á heildisformi

$$\oint \bar{J}\cdot d\bar{S} = 0$$

$\epsilon(R)$, $\sigma(R)$ og öll uppsetning brjóta ekki radial samhverfu

$$\oint \bar{J}\cdot d\bar{S} = 0$$

Til baka straumurinn fer um einn vír. Innstraumurinn jafn, óháður θ og ϕ milli kúluskeljanna

$$\to \bar{J} = \frac{I}{4\pi R^2}\hat{a}_R$$

þ.s. I er heildarstraumurinn um þéttinn (við þekkjum hann ekki)

$$\bar{E} = \frac{\bar{J}}{\sigma} = \frac{I}{4\pi R^2}\frac{a^2}{\sigma_0 R^2}\hat{a}_R = \frac{Ia^2}{4\pi\sigma_0 R^4}\hat{a}_R$$

Spennan tengist $\bar{E}$

$$\Delta V = -\int_b^a \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\int_b^a \frac{Ia^2}{4\pi\sigma_0 R^4}dr$$

$$\Delta V = -\frac{Ia^2}{4\pi\sigma_0}\left\{-\frac{1}{3R^3}\Big|_b^a\right\}$$

$$= \frac{Ia^2}{4\pi\sigma_0 3}\left[\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right]$$

$$= \frac{I}{12\pi\sigma_0 a}\left\{1 - \frac{a^3}{b^3}\right\}$$

$$= \frac{I}{12\pi a\sigma_0}\left\{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^3\right\}$$

$$G = \frac{I}{\Delta V} = 12\pi a\sigma_0 \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^3\right)}$$

Leiðni þéttisins, aðeins háð lögun kerfisins og σ_0

② Frjálsar hleðslur í þéttinum?

Þær finnast frá $\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho$

$$\bar{D} = \epsilon(R)\bar{E} = \epsilon_0 \frac{b}{R}\cdot\frac{Ia^2}{4\pi\sigma_0 R^4}\hat{a}_R$$

$$= \frac{Ia^2 b\epsilon_0 \hat{a}_R}{4\pi\sigma_0 R^5}$$

$$\rho(R) = \bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left\{R^2 D(R)\right\}$$

$$= -\frac{3Ia^2 b\epsilon_0}{4\pi\sigma_0 R^6}$$

Sem er frjálsa bolhleðslan

Yfirborðshleðslur?

Notum

$$\hat{a}_{n_2}\cdot(\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s$$

$R = a^+$

$$\rho_{sa}(a^+) = \epsilon(a)\bar{E}(a)\cdot\hat{a}_R$$

$$= \epsilon_0\frac{b}{a}\frac{I}{4\pi\sigma_0 a^2}$$

$$= \epsilon_0\frac{Ib}{4\pi\sigma_0 a^3}$$

$R = b^-$

$$\rho_{sb}(b^-) = -\epsilon(b)\bar{E}(b)\cdot\hat{a}_R$$

$$= -\frac{Ia^2\epsilon_0}{4\pi\sigma_0 b^4}$$

③ Skautunarhleðslur?

Í rafsvaranum

$$\bar{D} = \epsilon_0\bar{E} + \bar{P}$$

$$\to \bar{P} = \bar{D} - \epsilon_0\bar{E}$$

$$= \{\epsilon(R) - \epsilon_0\}\bar{E}$$

Bolhleðslur eru

$$\rho_P = -\bar{\nabla}\cdot\bar{P}$$

$$\bar{P} = \epsilon_0\left\{\frac{b}{R} - 1\right\}\frac{Ia^2}{4\pi\sigma_0 R^4}\hat{a}_R$$

$$= \epsilon_0\frac{Ia^2}{4\pi\sigma_0}\left\{\frac{b}{R^5} - \frac{1}{R^4}\right\}$$

$$= -\frac{1}{R^2}\left[\frac{d}{dR}\left\{\frac{b}{R^3} - \frac{1}{R^2}\right\}\right]\frac{\epsilon_0 I a^2}{4\pi\sigma_0}$$

$$= \left\{\frac{3b}{R^6} - \frac{2}{R^5}\right\}\frac{\epsilon_0 I a^2}{4\pi\sigma_0}$$

$$= \left\{\frac{3ba^5}{R^6} - \frac{2a^5}{R^5}\right\}\frac{\epsilon_0 I}{4\pi\sigma_0 a^3} = \left(\frac{a}{R}\right)^5\left[\frac{3b}{R} - 2\right]\frac{\epsilon_0 I}{4\pi\sigma_0 a^3}$$

Yfirborðs skautunarhleðsla á rafsvaranum

$R = a^+$

$$\rho_{ps} = \bar{P} \cdot \hat{a}_n$$

$$\rightarrow \quad \rho_{ps}(a) = -P(a) = -\frac{\epsilon_0 I}{4\pi \sigma_0 a^2}\left\{\frac{b}{a} - 1\right\}$$

$R = b^-$

$$\rho_{ps}(b) = P(b) = \frac{\epsilon_0 I a^2}{4\pi \sigma_0 b^4}\left\{1 - \frac{1}{1}\right\} = 0$$

④ Heildar frjálsa hleðslan?

Bolhleðsla

$$\rho(R) = -\frac{3 I a^2 b \epsilon_0}{4\pi \sigma_0 R^6}$$

$$Q_{bol} = \int_{rafsvari} dv' \rho(R')$$

$$= -\frac{3 I a^2 b \epsilon_0}{\sigma_0} \int_a^b R^2 \frac{dR}{R^6}$$

$$= -\frac{I b \epsilon_0}{\sigma_0 a}\left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right)$$

Á innra borði

$$Q_{sa}(a) = 4\pi a^2 \rho_{sa}(a) = \frac{\epsilon_0 I b}{\sigma_0 a}$$

$$Q_{sb}(b) = 4\pi b^2 \rho_{sb}(b) = -\frac{\epsilon_0 I a^2}{\sigma_0 b^2}$$

Í heild frjálsar hleðslur

$$Q = Q_{bol} + Q_{sa}(a) + Q_{sb}(b)$$

$$= -\frac{I b \epsilon_0}{\sigma_0 a}\left\{1 - \frac{a^3}{b^3}\right\} + \frac{\epsilon_0 I b}{\sigma_0 a} - \frac{\epsilon_0 I a^2}{\sigma_0 b^2} = 0$$

Engin heildar frjáls hleðsla er á þéttinum

⑤ Yfirborðsstraumur á innri kúluskel

Jafnt á kúluna úr öllum áttum kemur/fer straumþéttleiki

$$\bar{J} = \frac{I}{4\pi R^2}\hat{a}_R$$

setjum að straumur fari af kúlunni í $\theta = \pi$

Alls staðar á kúlunni er þá straumþéttleiki (yfirborðs) í stefnu $\hat{\theta}$

yfirborð hettu er $\int_0^\theta \sin\theta' d\theta' \, 2\pi a^2 = 2\pi a^2(1-\cos\theta) = S(\theta)$

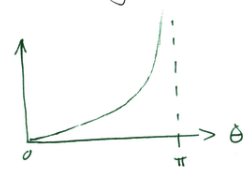
Heildarstraumurinn af hettunni er $S(\theta)\cdot J$ sem þarf að streyma þvert á jaðar hettu með lengd $\lambda(\theta) = 2\pi a \sin\theta$

því er straumurinn á lengd

$$\frac{S(\theta)\cdot J}{\lambda(\theta)} = \frac{2\pi a^2(1-\cos\theta)}{2\pi a \sin\theta}\,\frac{I}{4\pi a^2}$$

yfirborðsstraumþéttleikinn (straumur á lengd) er því

$$\frac{I}{a}\,\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\,\frac{1}{4\pi}\,\hat{\theta} \longrightarrow$$

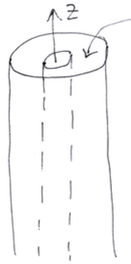


Sem er með sérstöðupunkt í suður pól þar sem hann safnast í einn punkt til að fara af kúlunni (það er enginn sérstöðup. í $\theta = 0$!)

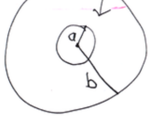
Eins og rafsviðið er sett upp í upphafi ætti straumurinn hér að hafa öfugt formerki. Hann kemur inn í gegnum línuna að S-skauti innri kúlu og streymir um rafsvara að ytri kúluskel

6. Skammtar

(1)



$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{a}\right)^2$$



Finna $\bar{B}$ allsstaðar

Óendanlegur holur sívalningur snýst um samhverfuás, z-ás

-> straumþéttleiki $\bar{J}$ $\hat{\varphi}$-stefnu

Styðjumst við Lögmál Ampères

$$\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I$$

og

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} d^3r' \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$$

$$\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A}$$

$$\rightarrow \bar{A}(\bar{r}) = A(r)\cdot\hat{a}_\varphi$$

↑ ekki háð φ og z

(2)

$$\bar{\nabla}\times\bar{A} = \hat{a}_z \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\{r A(r)\}$$

með alla aðra þætti jafna 0 i.

$\bar{B}$ getur bara haft $\hat{z}$-þátt

Hraði punkts með hnit $\bar{r}'$ í þykka sívalningsskelinni er

$$\bar{v}(\bar{r}') = \omega\hat{a}_z\times\bar{r}'$$

í sívalningshnitum

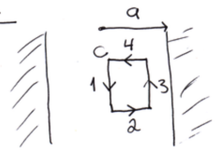
$$\bar{v}(r) = \omega r\hat{a}_\varphi \quad \rightarrow \bar{J}(r) = \rho(r)\bar{v}(r) = \rho_0\left(\frac{r}{a}\right)^2\omega r\hat{a}_\varphi$$

Notum

$$\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I$$

Inni í holi

$r<a$



Hér er heildið yfir 4 og 2 núll því þar er $\bar{B}\cdot d\bar{l} = 0$, þau eru hornrétt. Enginn straumur er um lykkjuna -> heildin um 1 og 3 verða að styttast út hvar sem C er innan holsins

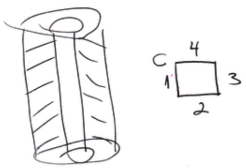
(3)

því getur $\bar{B}$ að eins verið fasti innan hols

$$\bar{B} = B_0\hat{a}_z, \quad B_0 = \text{fasti}$$

en fastinn B_0 er ekki þekktur

Utan sívalningsskeljar $r>b$



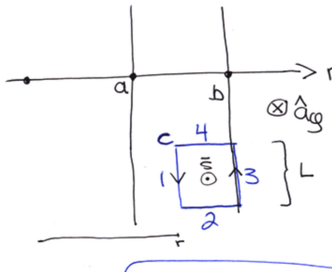
Hér er einnig enginn straumur um C og hægt er að nota sömu röksemdu og fyrir $r<a$

Segulflæðisviðið $\bar{B}$ er fast og einsleitt utan skeljar. Lykkjan getur verið mjög fjarri skeljar eða mjög nærri

-> við búumst við að utan skeljar sé $\bar{B}=0$

(4)

Innan skeljar $a<r<b$



Nú er straumur um C og að eins heildið um C_1 skilar einhverju. Veljum lengd heildisvegs C_1 sem L

$$\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I$$

Vinstri hliðin getur

$$-B(r)L$$

Hægri hliðin

$$I = \oint_S \bar{J}\cdot d\bar{s}$$

$$\rightarrow I_{enc} = -L\int_r^b dr'\, J(r)$$

$\bar{s}$ er út úr blaðinu andsamsíða $\hat{a}_\varphi$

(5)

$$I_{enc} = -L\rho_0\omega a^2 \int_r^b \frac{dr'}{a}\left(\frac{r'}{a}\right)^3 = -L\rho_0\omega a^2 \int_{r/a}^{b/a} du\, u^3 = -\frac{La^2\rho_0\omega}{4}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \left(\frac{r}{a}\right)^4\right\}$$

$$\rightarrow \quad -B(r)L = -\mu_0 \frac{La^2\rho_0\omega}{4}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \left(\frac{r}{a}\right)^4\right\}$$

$$\rightarrow \quad B(r) = \mu_0 \frac{a^2\rho_0\omega}{4}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \left(\frac{r}{a}\right)^4\right\}$$

$$\bar{B} = \mu_0 \frac{a^2\rho_0\omega}{4}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \left(\frac{r}{a}\right)^4\right\}\hat{a}_\varphi \quad \text{fyrir } a<r<b$$

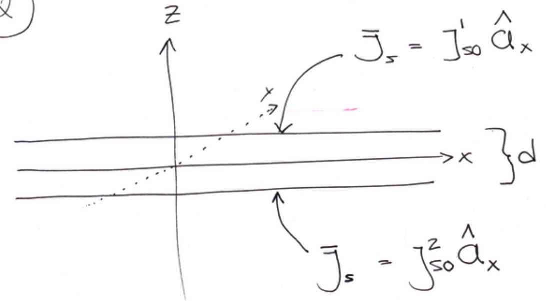
$\bar{B}(b) = 0$

$$\bar{B}(a) = \mu_0 \frac{a^2\rho_0\omega}{4}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^4 - 1\right\}\hat{a}_\varphi \quad \rightarrow \quad B_0 = \mu_0 \frac{a^2\rho_0\omega}{4}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^4 - 1\right\}$$

fyrir $r<a$

(6)

(2)



Finna allstaðar $\bar{B}$

fyrir $J^1_{s0} = J^2_{s0}$

og $J^1_{s0} = -J^2_{s0}$

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} d^3r' \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}, \qquad \bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A}$$

~~við~~ þessum streym fæst

~~at~~ $\bar{A} = \bar{A}_x(z) = A(z)\hat{a}_x$

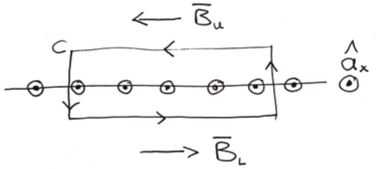
$$\rightarrow \quad \bar{B} = \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial z} A(z)$$

$\bar{B}$ er aðeins með $\hat{a}_y$ þátt

(7)

Rætt ein og í dømum á undan er hógt at sýna at $\bar{B}$ sé allstaðar fasti, milli plátuanna og fyrir utan þær.

Skoðum eina plötu



Streymur í $\hat{a}_x$-átt þá er ljóst at segulflóðsvið er í sitthvørja áttina, sitthvørumegin við plötuna

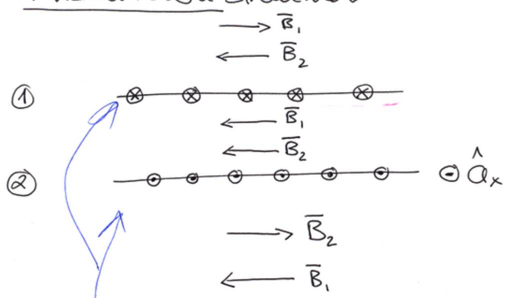
$$\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I \quad \rightarrow \quad 2LB_0 = \mu_0 L J_{s0}$$

$$\rightarrow \quad B_0 = \frac{\mu_0 J_{s0}}{2}$$

$$\bar{B}_u = -\hat{a}_y \frac{\mu_0 J_{s0}}{2} \qquad \bar{B}_L = +\hat{a}_y \frac{\mu_0 J_{s0}}{2}$$

(8)

Andsamsíða streymar



0

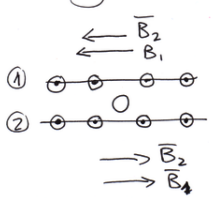
$\bar{B} = -\hat{a}_y \mu_0 J_{s0}$ $\quad +\frac{d}{2}$ $\quad -\frac{d}{2}$

0

Í anda þess sum við fundum fyri spóluna áðan

Samsíða streymar

$\rightarrow$ Ekkert segulflóðsvið milli plátuanna

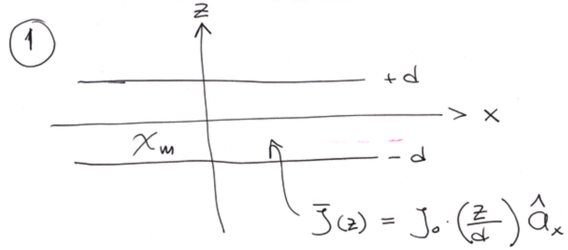


$\bar{B} = -\hat{a}_y \mu_0 J_{s0}$

0

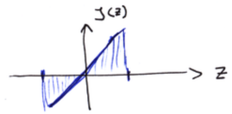
$\bar{B} = +\hat{a}_y \mu_0 J_{s0}$

(1)



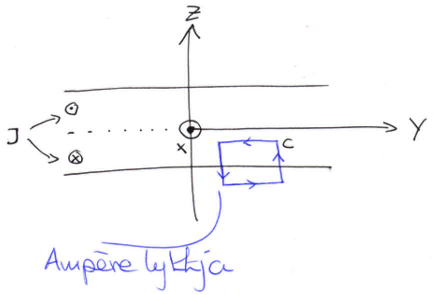
$\bar{J}(z) = J_0 \left(\frac{z}{d}\right) \hat{a}_x$

finna $\bar{H}, \bar{M}$ og $\bar{B}$ allsstaðar



samanburður við dæmið í síðustu viku, það dæmin, leiðir til þess að bæði má við að $\bar{H} = 0$ utan efnisbúts (Ampère)

Reiknum þá innan hans :



$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = I = \int_{S_C^{enc}} d\bar{s} \cdot \bar{J}(z)$$

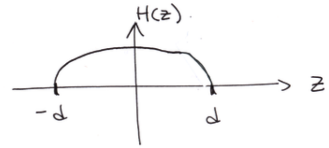
$$-L\,H(z) = L J_0 \int_{-d}^{z} dz' \frac{z'}{d}$$

(2)

$$-L\,H(z) = L \frac{J_0}{d} \left\{ \frac{z^2}{2} - \frac{d^2}{2} \right\}$$

$$H(z) = \frac{J_0}{2} \left\{ d - \frac{z^2}{d} \right\} = \frac{J_0 d}{2} \left\{ 1 - \frac{z^2}{d^2} \right\}$$

$$\bar{H}(z) = \hat{a}_y \frac{J_0 d}{2} \left\{ 1 - \frac{z^2}{d^2} \right\}$$



fyrir $-d < z < d$

$\bar{H}(z)$ er núll fyrir utan

$\bar{M} = 0$ fyrir utan

þar gildir því $\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} \rightarrow \bar{B} = \mu_0 \bar{H} = 0$

Innan efnis $-d < z < +d$

Ef það er línulegt $\rightarrow \bar{M} = \chi_m \bar{H}$

(3)

$$\bar{M} = \hat{a}_y \frac{J_0 d \chi_M}{2} \left\{ 1 - \frac{z^2}{d^2} \right\}$$

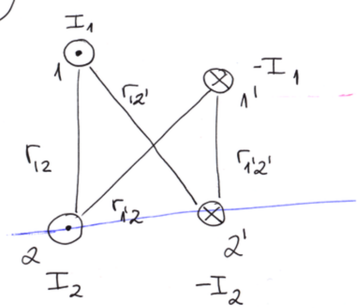
$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \rightarrow \frac{\bar{B}}{\mu_0} = \bar{H} + \bar{M}$$

$$\rightarrow \bar{B} = \mu_0 (1 + \chi_M) \bar{H} = \hat{a}_y \frac{J_0 d}{2} \mu_0 (1 + \chi_M) \left\{ 1 - \left(\frac{z}{d}\right)^2 \right\}$$

innan efnis

(4)

(2)



Finna víxlspan „víranna" (leiðslanna 2 og 2 saman)

þurfum að finna flæði Φ_{21} um línu 2 vegna straums í línu 1

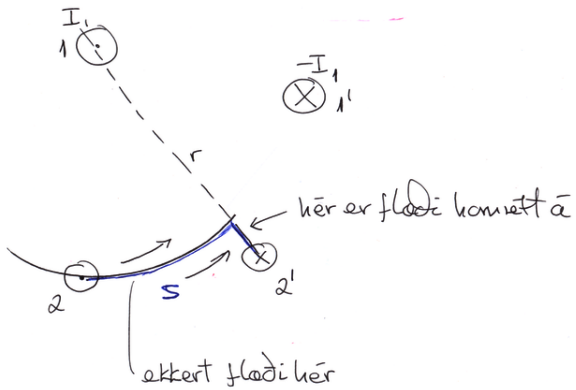
T.d. fyrir einn þátt leiðara 1 er segulsviðið

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{a}_\theta$$

p.s. $\hat{a}_\theta$ miðast við vír 1. Erfitt er að reikna flæðið um flöt leiðara 2 (milli víra 2 og 2')

(Hér gæti verið sniðugt að hugsa um $\bar{A}$)

Reiknum því annarstaðar flöt



$$\Phi_{21} = \oint_S d\bar{s}\cdot\bar{B} = L\int_{r_{12}}^{r_{12'}} dr\,\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi}\ln\left(\frac{r_{12'}}{r_{12}}\right)$$

5

Eins fæst

$$\Phi_{21'} = \oint_{S'} d\bar{s}\cdot\bar{B} = -\frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi}\ln\left(\frac{r_{1'2'}}{r_{1'2}}\right)$$

Lagt saman

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{21'} = \frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi}\ln\left(\frac{r_{12'}\cdot r_{1'2}}{r_{12}\cdot r_{1'2'}}\right)$$

Víxlspanið á lengdareiningu er því

$$L'_{21} = \frac{\Phi_2}{L I_1} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{r_{12'}\cdot r_{1'2}}{r_{12}\cdot r_{1'2'}}\right)$$

6

Eins mætti nota $\bar{A}$ hér. Til þess að finna $\bar{A}$ má nota aðferð sem sýnd var í 5. Stoðtíma 2012 seinna dæmi. $\bar{A}$ liggur alltaf samsíða straumi. Það er því fasti við báðarana. Síðan er einfalt að nýta

$$\Phi = \oint_C \bar{A}\cdot d\bar{l}$$

Þessi leið er einfaldari því ekki þarf að ummynda neitt yfir það.

7

1

Jöfnur Maxwells

1

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1)\ \bar{\nabla}\times\bar{E} = -\partial_t\bar{B} & (2)\ \bar{\nabla}\times\bar{H} = \bar{J} + \partial_t\bar{D} \\ (3)\ \bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho & (4)\ \bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0 \end{array}}$$

Samfelldnijafnan er

$$\partial_t\rho + \bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0 \quad (5)$$

Stærðfræðilega í lagi, en eðlisfræðilega þekkjum við engar uppsprettur sem væru alltaf fastar í rúminu $\rightarrow C(\bar{r}) = 0$

Verkum með div á (2)

$$\underbrace{\bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{H})}_{=0} = \underbrace{\bar{\nabla}\cdot\bar{J}}_{= -\partial_t\rho} + \partial_t\bar{\nabla}\cdot\bar{D}$$

vegna (5)

$$\rightarrow \partial_t\left\{\bar{\nabla}\cdot\bar{D} - \rho\right\} = 0$$

$$\rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{D} - \rho(\bar{r}) = C(\bar{r})$$

$$\rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho$$

2

Verkum með div á 1

$$\bar\nabla\cdot\underbrace{(\bar\nabla\times\bar E)}_{=0} = -\partial_t\,\bar\nabla\cdot\bar B$$

þarf að gilda fyrir alla tíma t

$$\rightarrow \quad \bar\nabla\cdot\bar B = 0$$

$\bar B$ hefur einungis þverþátt, þar sem engar uppsprettur eða segulhleðslur eru til fyrir það

$$\bar\nabla\cdot\bar D = \rho$$

$\bar D$ hefur Langsþátt vegna hleðslna

3

Á heildisformi

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1)\ \oint_C \bar E\cdot d\bar l = -\dfrac{d\Phi}{dt}, & (2)\ \oint_C \bar H\cdot d\bar l = I + \oint_S \partial_t\bar D\cdot d\bar s \\ (3)\ \oint_S \bar D\cdot d\bar s = Q & (4)\ \oint_S \bar B\cdot d\bar s = 0 \end{array}}$$

samfelldni jafnan heildað yfir rúmmál V er þá

$$\oint_S \bar J\cdot d\bar s = -d_t Q \quad (5)$$

Hér er S opið yfirborð með C sem jaðar

Hér er S lokað yfirborð

4

tökum 2

$$\oint_C \bar H\cdot d\bar l = I + \oint_S \partial_t\bar D\cdot d\bar s$$

leyfum S að lokast !

þá stendur eftir

$$0 = I + \oint_S \partial_t\bar D\cdot d\bar s$$

notum 5

$$\oint_S \bar J\cdot d\bar s = -d_t Q$$

$$I = -d_t Q$$

$$\rightarrow \quad d_t\oint_S \bar D\cdot d\bar s = d_t Q$$

$$d_t\left\{\oint_S \bar D\cdot d\bar s - Q\right\} = 0$$

Aftur, hér þurfum við að höfða til þess að eðlisfræðilega eru allar okkar frjálsu hleðslur faldar í Q

$$\rightarrow \quad \oint_S \bar D\cdot d\bar s = Q$$

5

Reynum líka 1

leyfum S að lokast aftur

$$\oint_C \bar E\cdot d\bar l = -d_t\Phi$$

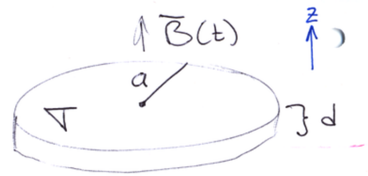
$$0 = -d_t\Phi = -d_t\oint_S d\bar s\cdot\bar B$$

$$\rightarrow \quad d_t\left\{\oint_S d\bar s\cdot\bar B\right\} = 0$$

eðlisfræðilega eru engar uppsprettur fyrir B þekktar, engin segul einskaut eru til

$$\rightarrow \quad \oint_S d\bar s\cdot\bar B = 0$$

fyrir lokað S



Lögmál Faradays

$$\nabla\times\bar E = -\frac{\partial\bar B}{\partial t} \qquad \oint_C \bar E\cdot d\bar l = -\int_S \frac{\partial\bar B}{\partial t}\cdot d\bar s$$

↑ skífan er hreyfingarlaus

Gerum þá nálgun að sleppa sjálfspani, sjá endann á dæmi

$$\oint_C \bar E\cdot d\bar l = -\frac{d}{dt}\int_S d\bar s\cdot\bar B(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(t)$$

Kerfið er Ohmskt → $\bar J = \sigma\bar E$, σ er fasti hér

$$\oint_C \sigma\bar E\cdot d\bar l = -\sigma\frac{d}{dt}\int_S d\bar s\cdot\bar B(t)$$

$$\oint \bar J\cdot d\bar l = -\sigma\frac{d}{dt}\int_S d\bar s\cdot\bar B(t) \qquad (*)$$

$\bar B(t) = B(t)\hat a_z$ leiðir til hringstrauma í skífunni

Notum (*) fyrir hring með $r<a$

$$J\cdot 2\pi r = -\sigma\pi r^2\frac{d}{dt}B(t)$$

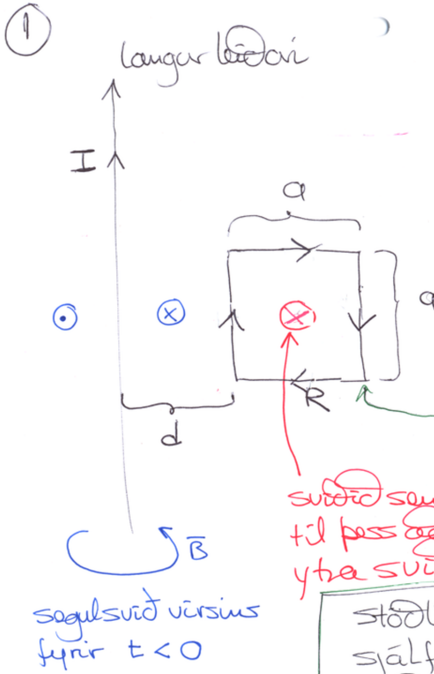
$$\rightarrow\quad J(r) = -\frac{\sigma r\dot B(t)}{2}$$

og

$$\bar J(r) = -\frac{\sigma r\dot B(t)}{2}\hat a_\varphi$$

straumþéttleikinn breytist ekki með d, en straumurinn i(r) gerir það því með auknu d minnkar viðnámið

Augljóst skiptir sjálfspan dæmisins máli þegar straumþéttleikinn er reiknaður. Til þess að skilja þann þátt bið ég ykkur um að skoða lausnir fyrir 8. skammt 2013, bæði dæmin. Fyrra dæmið er reiknað með og án L, en þá fæst sama niðurstaðan fyrir Q, en ekki fyrir I! Hér er líka hugt að bæta við L, en B(t) var ekki gefið nákvæmlega. Til þess að reikna L hér þarf að nota $\bar A$ og nákvæmu lausnina sem sett er saman úr sporbaugs-föllum. Sleppum því, en skoðum dæmin 2013. Ég hengi þær lausnir hér við.



svið sem spólan spanar til þess að reyna að viðhalda ytra sviðinu

Straumurinn í leiðaranum er

$$I(t) = I\,\Theta(-t)$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{ef } x<0 \\ 1 & \text{ef } x>0\end{cases}$$

a) straumstefnan í lykkjunni klukkan $t = 0^+$

Stöðluð textabókar lausn sleppir oft sjálfspani, skoðum eftir dæmi 2 hvað gerist ef við tökum það með á síðum (10) – (12)

2

b) Lögmál Ampères gefur $\bar{B}$ í kringum vír þ. $t<0$

$$\bar{B} = \hat{\phi}\,\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Því má finna flæðið um lykkjuna

$$\Phi = \oint_S d\bar{s}\cdot\bar{B} = a\int_d^{d+a} dr\,\frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln(r)\Big|_d^{d+a}$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\left\{\ln(d+a)-\ln(d)\right\} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left[\frac{d+a}{d}\right]$$

Í lykkjunni spanast I_{Ly}, íspennan í lykkjunni er

$$\mathcal{E} = I_{Ly}\cdot R = -\frac{d}{dt}\Phi$$

$$\hookrightarrow \quad I_{Ly} = \frac{d}{dt}Q$$

3

$$\to \quad I_{Ly}\cdot R = -\frac{d}{dt}\Phi$$

$$R\frac{d}{dt}Q = -\frac{d}{dt}\Phi = -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left\{\frac{d+a}{d}\right\}\frac{d}{dt}I$$

$$\frac{d}{dt}Q = -\frac{\mu_0 a}{2\pi R}\ln\left\{\frac{d+a}{d}\right\}\frac{d}{dt}I$$

heildum

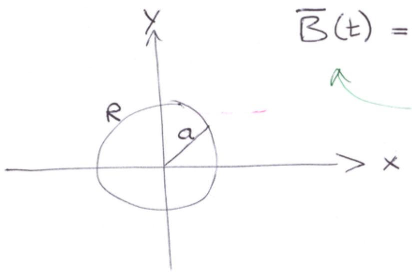
$$\int_0^Q dQ' = -\frac{\mu_0 a}{2\pi R}\ln\left\{\frac{d+a}{d}\right\}\int_I^0 dI'$$

$$\to \quad Q = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R}\ln\left\{\frac{d+a}{d}\right\}$$

Hleðslan sem flæðir um hvern punkt lykkjunnar þegar slökkt er á I í langa leiðaranum

2

4



$$\bar{B}(t) = \frac{B_0}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x+\hat{a}_z)\left\{1-e^{-\lambda t}\right\}\theta(t)$$

flæði þessa ytra sviðs í gegnum lykkju

a) Finna $i(t)$ í lykkjunni

$$\Phi_B(t) = \frac{B_0 a\pi}{\sqrt{2}}\left\{1-e^{-\lambda t}\right\}\theta(t)$$

Upp í gegnum lykkjuna

{Er í raun óþarft því $|B(0)|=0$}

$$\frac{d\Phi_B}{dt}(t) = \frac{B_0 a^2\pi}{\sqrt{2}}\left[\left\{1-e^{-\lambda t}\right\}\delta(t)+\theta(t)\lambda e^{-\lambda t}\right]$$

Keðjuregla og $\frac{d\theta(t)}{dt} = \delta(t)$

→ Heaviside step function

→ Dirac delta function

5

Heildarsegulflæðið um lykkjuna er vegna breytinga á þessu "ytra" segulsviði B og breytinga segulflæðis sem straumur um lykkjuna mynda

$$\Phi = \Phi_B + \Phi_L = \Phi_B + Li$$

sjálfspan lykkju

$\Phi = Li$

$$\oint_C \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\hookrightarrow = Ri$$

því fæst

$$Ri = -\frac{d\Phi_B}{dt} - L\frac{di}{dt}$$

eða

$$L\frac{di}{dt} + Ri = -\frac{d}{dt}\Phi_B$$

(6)

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = -\frac{B_0 a^2\pi}{L\sqrt{2}}\left[\{1-e^{-\lambda t}\}\delta(t) + \theta(t)\lambda e^{-\lambda t}\right]}$$

Hliðruð 1. stigs afleiðujafna sem við verðum að leysa

Jafnan $y' + p(t)y = q(t)$

hefur lausnina

$$y(t) = y(t_0)e^{-P(t)} + e^{-P(t)}\int_{t_0}^{t} ds\, e^{P(s)} q(s)$$

með

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} ds\, p(s)$$

Hjá okkur

$$P(t) = \int_0^t ds \frac{R}{L} = \frac{Rt}{L}$$

(7)

$$\to i(t) = i(0)e^{-\frac{Rt}{L}} - e^{-\frac{Rt}{L}}\frac{B_0 a^2\pi}{L\sqrt{2}}\lambda\int_{0^-}^{t} ds\, e^{\frac{Rs}{L}-\lambda s}$$

$$= i(0)e^{-\frac{Rt}{L}} - e^{-\frac{Rt}{L}}\lambda\frac{B_0 a^2\pi}{L\sqrt{2}}\left\{\frac{e^{\frac{R}{L}t-\lambda t}-1}{(\frac{R}{L}-\lambda)}\right\}$$

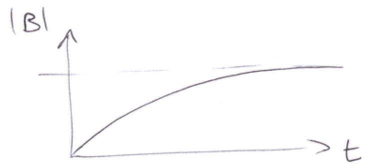
$$= \underbrace{i(0)}_{0}e^{-\frac{Rt}{L}} - \frac{\lambda B_0 a^2\pi}{L\sqrt{2}}\left(\frac{e^{-\lambda t}-e^{-\frac{Rt}{L}}}{(\frac{R}{L}-\lambda)}\right)$$

$$= \frac{\lambda B_0 a^2\pi}{L\sqrt{2}}\left\{\frac{e^{-\frac{R}{L}t}-e^{-\lambda t}}{(\frac{R}{L}-\lambda)}\right\}$$

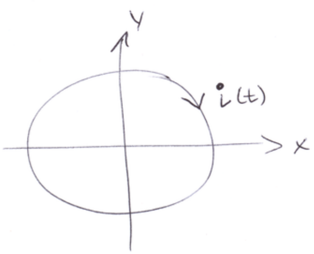
L má velja, en hér skiptir aðeins máli hvernig hlutfall $\frac{R}{L}$ er miðað við λ svo ég sleppi því

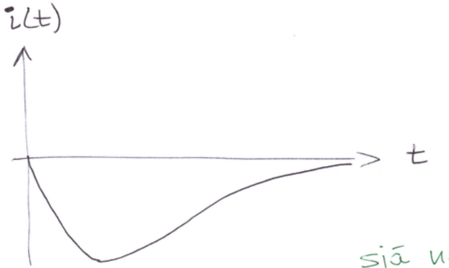
(8)

Fall $\bar{B}(t)$ af t er með þeim hætti að kveikt er hægt á $\bar{B}$ sem nær síðan max. gildi



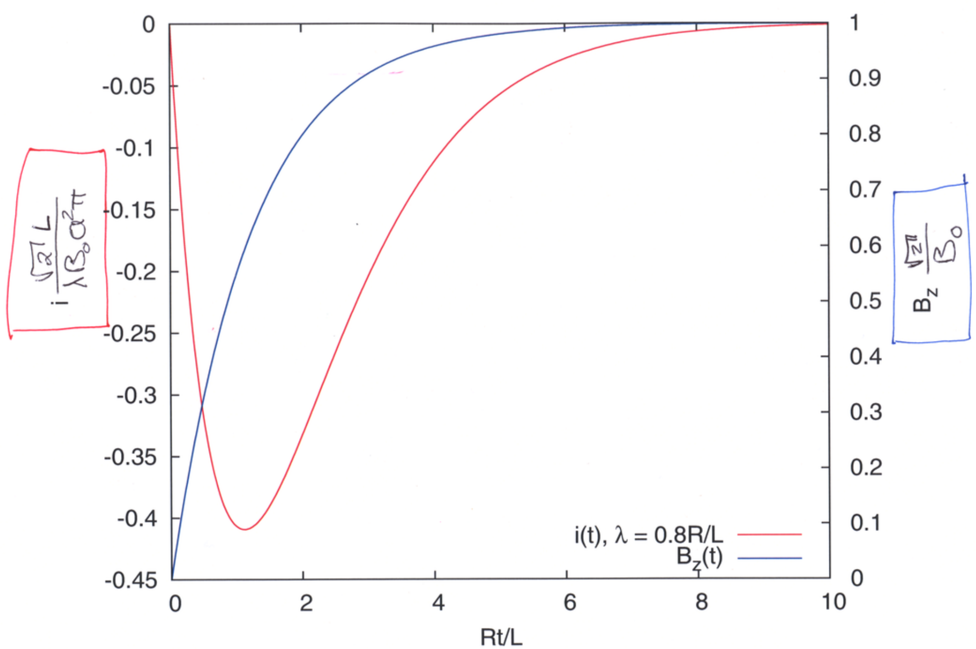
Svar lykkjunnar er íspenna sem vinnur á móti ~~þessu~~ sviði





sjá næstu síðu

(9)



Skoðum aftur 1. dæmið hvað gerist ef sjálfspan lykkju er tekið til greina?

$$\Phi = \Phi_{vír} + \Phi_{lykkja} = \underbrace{\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left\{\frac{d+a}{d}\right\}}_{MI} + L I_{Ly}$$

$$V = -\frac{d}{dt}\Phi$$

$$\to I_{Ly}\cdot R = -M\frac{d}{dt}I - L\frac{d}{dt}I_{Ly}$$

$$L\frac{d}{dt}I_{Ly}(t) + I_{Ly}(t)R = -M\frac{d}{dt}I(t)$$

$$I(t) = I\Theta(-t) \to \frac{d}{dt}I(t) = -\delta(t)\cdot I$$

$$L\frac{d}{dt}I_{Ly}(t) + I_{Ly}(t)R = MI\delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}I_{Ly}(t) + \frac{R}{L}I_{Ly}(t) = \frac{MI}{L}\delta(t)$$

Lausnin er $y(t) = y(t_0)e^{-P(t)} + e^{-P(t)}\int_{t_0}^{t} ds\, e^{P(s)} q(s)$

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} ds\, p(s) = \frac{Rt}{L}$$

$$q(s) = MI\delta(t)$$

$$I_{Ly}(t) = I_{Ly}(0)e^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{R}{L}t}\frac{MI}{L}\int_{0^-}^{t} ds\, e^{\frac{Rs}{L}}\delta(s)$$

$$I_{Ly}(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\frac{MI}{L}$$

Heildar hleðsla um sérhvern punkt í rás (lykkju)

$$Q = \int_0^\infty dt\, I_{Ly}(t) = \frac{MI}{L}\int_0^\infty dt\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

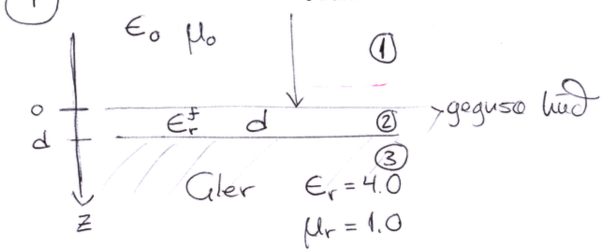
$$= \frac{MI}{L}\left\{-\frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{R/L}\Big|_0^\infty\right\} = \frac{MI}{L}\left\{0 + \frac{L}{R}\right\} = \frac{MI}{R}$$

óháð L!

$$= \frac{\mu_0 a I}{2\pi R}\ln\left\{\frac{d+a}{d}\right\}$$

Sama svar og áður! Hvernig gátum við búist við því!

1



Þetta er því dæmi um ferð geisla um þunnt lag milli tveggja efniskerta, þ.e. loft - lag - gler. Sýnidæmi 8-12 í bók og Mynd 8-15 eiga við það.

Hér þarf að skeyta saman lausnum

1

$$\bar{E}_1 = \hat{a}_x\left\{E_{i0}e^{-i\beta_1 z} + E_{r0}e^{+i\beta_1 z}\right\}$$

$$\bar{H}_1 = \hat{a}_y\frac{1}{\eta_1}\left\{E_{i0}e^{-i\beta_1 z} - E_{r0}e^{+i\beta_1 z}\right\}$$

2

$$\bar{E}_2 = \hat{a}_x\left\{E_2^+ e^{-i\beta_2 z} + E_2^- e^{+i\beta_2 z}\right\}$$

$$\bar{H}_2 = \hat{a}_y\frac{1}{\eta_2}\left\{E_2^+ e^{-i\beta_2 z} - E_2^- e^{+i\beta_2 z}\right\}$$

3

$$\bar{E}_3 = \hat{a}_x E_3^+ e^{-i\beta_3 z}$$

$$\bar{H}_3 = \hat{a}_y\frac{E_3^+}{\eta_3}e^{-i\beta_3 z}$$

2

Með jaðarskilyrðum

$$\bar{E}_1(0) = \bar{E}_2(0) \qquad \bar{E}_2(d) = \bar{E}_3(d)$$

og

$$\bar{H}_1(0) = \bar{H}_2(0) \qquad \bar{H}_2(d) = \bar{H}_3(d)$$

Eg fer með höfundum bókar og skilgreini heildar samviðnám bylgju

$$Z(z) = \frac{E_x(z)}{H_y(z)}$$

heildar svið

Fyrir einn skilflöt er þá (í efni 1)

$$Z_1(z) = \eta_1 \frac{e^{-i\beta_1 z} + \Gamma e^{+i\beta_1 z}}{e^{-i\beta_1 z} - \Gamma e^{+i\beta_1 z}}, \quad \text{með } \Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

Cheng skrifar síðan $Z_1(-l)$ og í beinu framhaldi $Z_2(0) = Z_2(d-d)$

fyrir lóðrétta innkomu bylgju

3

$$Z_2(0) = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos(\beta_2 d) + i\eta_2 \sin(\beta_2 d)}{\eta_2 \cos(\beta_2 d) + i\eta_3 \sin(\beta_2 d)}$$

Speglunin í $z=0$ ræðst af

$$\Gamma_0 = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = -\frac{H_{r0}}{H_{i0}} = \frac{Z_2(0) - \eta_1}{Z_2(0) + \eta_1}$$

í stað η_2

Z_2 inniheldur upplýsingar um bylgjuna sem speglast í $z=d$

Best væri um enga speglun þ.e. $\Gamma_0 = 0$ fyrir vissa bylgjulengd.

Þá $\Gamma_0 = 0$. Til þess þarf $Z_2(0) = \eta_1$

$$\longrightarrow \eta_2\{\eta_3 \cos(\beta_2 d) + i\eta_2 \sin(\beta_2 d)\} = \eta_1\{\eta_2 \cos(\beta_2 d) + i\eta_3 \sin(\beta_2 d)\}$$

4

Í bókinni skrifar Cheng þessa jöfnu fyrir raun og þverhluta

$$\eta_3 \cos(\beta_2 d) = \eta_1 \cos(\beta_2 d) \qquad \text{Raun}$$

$$\eta_2^2 \sin(\beta_2 d) = \eta_1 \eta_3 \sin(\beta_2 d) \qquad \text{þver}$$

Við vitum að $\eta_3 \neq \eta_1$ (gler og loft)

$$\rightarrow \begin{cases} \cos(\beta_2 d) = 0 & \text{er lausn} \\ \text{og} & \\ \boxed{\eta_2^2 = \eta_1 \eta_3} & \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \beta_2 d &= (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ \text{Þá } d &= (2n+1)\frac{\pi}{2\beta_2} \\ &= (2n+1)\frac{\lambda_2}{4} \end{aligned}}$$

því $\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$

5

því fæst einhlítt

$$d = \frac{(2n+1)\lambda_2}{4} \quad \text{og} \quad \eta_2^2 = \eta_1 \eta_3 \rightarrow \frac{\mu_1}{\epsilon_2} = \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_1}{\epsilon_1 \epsilon_3}}$$

Þá $\epsilon_{2r} = \sqrt{\epsilon_{1r} \epsilon_{3r}}$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{\beta_2} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_1 \epsilon_2}} \rightarrow \lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{2r}}}, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Í okkar dæmi er $\epsilon_{1r} = 1 \rightarrow \epsilon_{2r} = \sqrt{\epsilon_{3r}}$

$$\rightarrow d = \frac{(2n+1)}{4} \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{2r}}} = \frac{(2n+1)\lambda_0}{4\sqrt{\sqrt{\epsilon_{3r}}}} \qquad \epsilon_{3r} = 4$$

$\rightarrow$ minnsta þykkt $d = \frac{\lambda_0}{4 \cdot \sqrt{2}} = \frac{700\,\text{nm}}{4\sqrt{2}} \approx 124$ nm

6

Reikna $\Gamma(\lambda_0)$. Við fundum áður í $z = 0$

$$\Gamma_0 = \frac{Z_2(0) - \eta_1}{Z_2(0) + \eta_1}, \quad 1 \text{ var loft } \to \eta_1 = \eta_0$$

$$\to \Gamma_0 = \frac{\left(\frac{Z_2(0)}{\eta_0}\right) - 1}{\left(\frac{Z_2(0)}{\eta_0}\right) + 1} \qquad \eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3} = \sqrt{\eta_0 \eta_3}$$

$$\frac{Z_2(0)}{\eta_0} = \frac{\eta_2}{\eta_0} \frac{\eta_3 \cos(\beta_2 d) + i\eta_2 \sin(\beta_2 d)}{\eta_2 \cos(\beta_2 d) + i\eta_3 \sin(\beta_2 d)} = \sqrt{\frac{\eta_3}{\eta_0}} \frac{\eta_3 + i\eta_2 \tan(\beta_2 d)}{\eta_2 + i\eta_3 \tan(\beta_2 d)}$$

$$= \sqrt{\frac{\eta_3}{\eta_0}} \frac{\frac{\eta_3}{\eta_0} + i\sqrt{\frac{\eta_3}{\eta_1}} \tan(\beta_2 d)}{\sqrt{\frac{\eta_3}{\eta_0}} + i\frac{\eta_3}{\eta_0} \tan(\beta_2 d)}$$

7

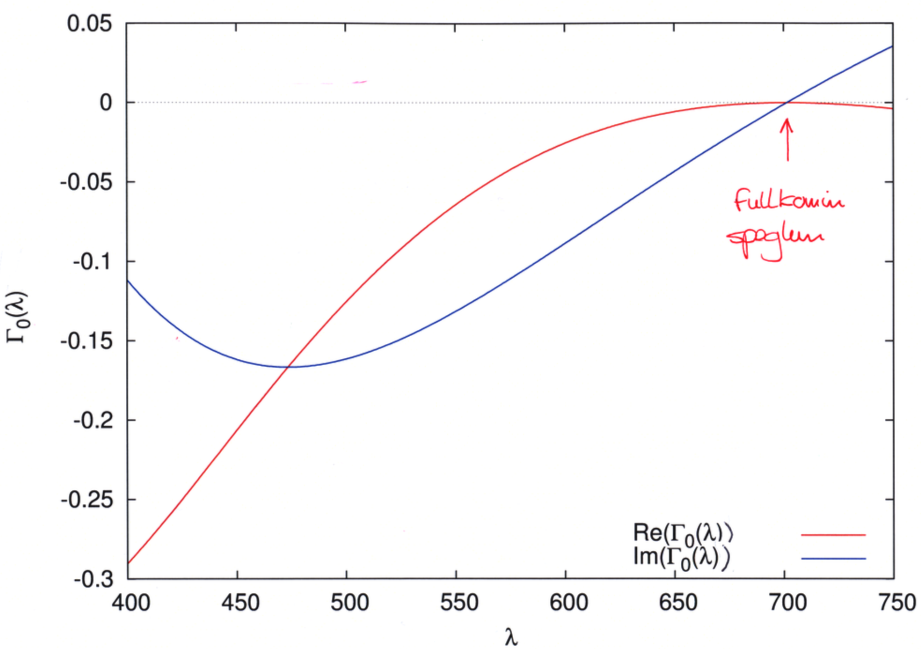
$$\frac{\eta_3}{\eta_0} = \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\epsilon_3 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{3r}}} = \frac{1}{2}$$

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi\sqrt{\epsilon_{2r}}}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\sqrt{\epsilon_{3r}}}$$

$$\to \beta_2 d = 2\pi\sqrt{\sqrt{\epsilon_{3r}}}\,\frac{d}{\lambda_0} = 2\pi\sqrt{2}\,\frac{d}{\lambda_0}$$

Sjá graf á næstu síðu

8



9

② Dæmi 8-45 í bók

$$\Gamma_\perp = \frac{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t}$$

$$\tau_\perp = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t}$$

umskrifa í ϵ_{r1}, ϵ_{r2} og θ_i

$$\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} = 2.25$$

Ljós úr þéttu efni í þunnt

gerum ráð fyrir að $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

Lögmál Snells

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \sin^2\theta_t} = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i} = \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}\sin^2\theta_i}$$

$$\Gamma_\perp = \frac{\frac{\eta_2}{\eta_1}\cos\theta_i - \cos\theta_t}{\frac{\eta_2}{\eta_1}\cos\theta_i + \cos\theta_t}$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2}} \quad \to \quad \frac{\eta_2}{\eta_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}$$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}}$$

(10)

$$\Gamma_\perp(\theta_i) = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}\cos\theta_i - \sqrt{1-\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}\sin^2\theta_i}}{\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}\cos\theta_i + \sqrt{1-\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}\sin^2\theta_i}}$$

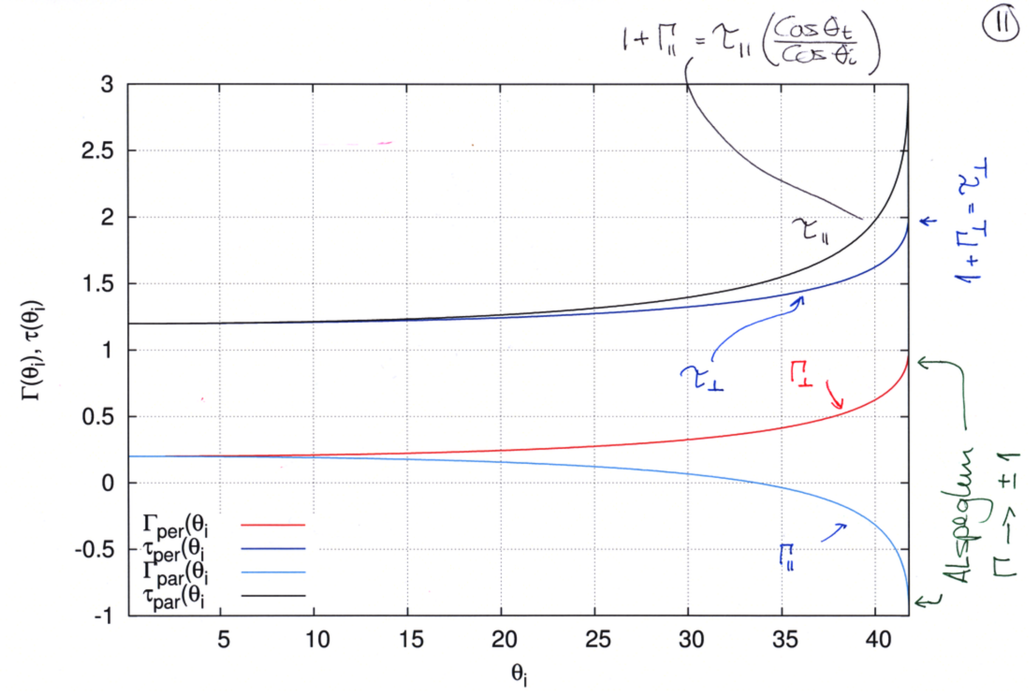
$$\tau_\perp(\theta_i) = \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}\cos\theta_i}{\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}\cos\theta_i + \sqrt{1-\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}\sin^2\theta_i}}$$

Eins fæst

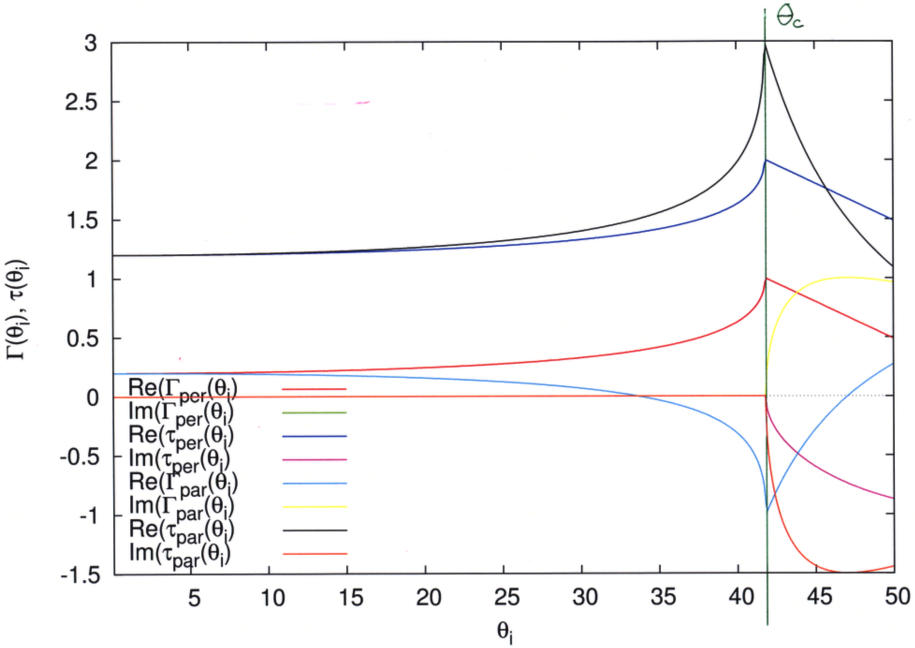
$$\Gamma_\parallel(\theta_i) = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}\sqrt{1-\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}\sin^2\theta_i} - \cos\theta_i}{\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}\sqrt{1-\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}\sin^2\theta_i} + \cos\theta_i}$$

$$\tau_\parallel(\theta_i) = \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}\cos\theta_i}{\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}\sqrt{1-\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}\sin^2\theta_i} + \cos\theta_i}$$

(11)



(12)



(1)

Sívalningsleið $\qquad d = a$

Skrifum

$$\bar{E} = \bar{E}_T + \hat{a}_z E_z$$
$$\bar{H} = \bar{H}_T + \hat{a}_z H_z$$
$$\bar{\nabla} = \bar{\nabla}_T + \hat{a}_z \partial_z$$

Við notum Maxwells jöfnurnar

(1) $\bar{\nabla}\times\bar{E} = -i\omega\mu\bar{H}$, $\bar{\nabla}\times\bar{H} = i\omega\epsilon\bar{E}$ (2)

(3) $\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0$, $\bar{\nabla}\cdot\bar{H} = 0$ (4)

Þetta sem gröter útlínur leiðara. Ég hef mestan áhuga á að sjá hvernig sviðin líta út í leiðinu

---

(3) $\rightarrow (\bar{\nabla}_T + \hat{a}_z\partial_z)\cdot(\bar{E}_T + \hat{a}_z E_z) = 0 \rightarrow \underline{\bar{\nabla}_T\cdot\bar{E}_T = -\partial_z E_z}$

(4) $\rightarrow \underline{\bar{\nabla}_T\cdot\bar{H}_T = -\partial_z H_z}$

---

(1) $(\bar{\nabla}_T + \hat{a}_z\partial_z)\times(\bar{E}_T + \hat{a}_z E_z) = -i\omega\mu(\bar{H}_T + \hat{a}_z H_z)$

Sem leiðir til

{Byrjum eins og fyrir bylgjuleiðara og lokum síðar}

2

$$\bar\nabla_T \times \bar E_T = -i\omega\mu H_z \hat a_z \quad *$$

og

$$\bar\nabla_T \times (\hat a_z E_z) + \hat a_z \partial_z \times \bar E_T + \bar\nabla_T \times \bar E_T = -i\omega\mu \bar H_T - i\omega\mu \hat a_z H_z$$

notum $*$

$$\bar\nabla_T \times (\hat a_z E_z) + \hat a_z \partial_z \times \bar E_T = -i\omega\mu \bar H_T$$

eða

$$(\bar\nabla_T E_z)\times \hat a_z + \gamma \bar E_T \times \hat a_z = -i\omega\mu \bar H_T$$

Eins fæst

$$(\bar\nabla_T H_z)\times \hat a_z + \gamma \bar H_T \times \hat a_z = +i\omega\epsilon \bar E_T$$

$k^2 = \omega^2\mu\epsilon$

h^2 eigingildi jöfnu

$k^2 = \gamma^2 + h^2$

sem má skrifa sem

$$\boxed{\begin{aligned} \bar E_T &= -\frac{1}{h^2}\left\{\gamma \bar\nabla_T E_z - i\omega\mu\, \hat a_z \times \bar\nabla_T H_z\right\} \\ \bar H_T &= -\frac{1}{h^2}\left\{\gamma \bar\nabla_T H_z + i\omega\epsilon\, \hat a_z \times \bar\nabla_T E_z\right\} \end{aligned}}$$

3

Setjum enda lokin á 0 og d, þá fáum við til viðbótar við jaðarskilyrðin á bogna fletinum (bylgjustokknum)

$H_z = 0$ fyrir $z = 0$, $z = d$ TE

$\partial_z E_z = 0$ —||— TM

Lokum lokunum

$\gamma \to i\frac{p\pi}{d}$

$\omega^2 = \frac{1}{\mu\epsilon}\left(\left(\frac{x_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2\right)$

Lausnirnar eru því með hjálp 10-5.2 og 10-5.3 í bók

$$E_z(r,\phi,z) = A_{mnp} J_m\left(x_{mn}\frac{r}{a}\right)\cos(m\phi)\cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \qquad \boxed{TM_{mnp}}$$

x_{mn} er n-ta núllstöð J_m

$m = 0,1,2,\dots$ $n = 1,2,3,\dots$ $p = 0,1,2$

↑ uppfyllir jaðarskilyrði

4

$$\bar E_T = -\frac{1}{h^2}\gamma \bar\nabla_T E_z$$

$$\bar H_T = -\frac{i}{h^2}\omega\epsilon\, \hat a_z \times \bar\nabla_T E_z$$

$$\bar\nabla_T = \hat a_r \partial_r + \hat a_\phi \frac{1}{r}\partial_\phi$$

$$E_r = -A_{mnp}\frac{\gamma}{h} J_m'(hr)\cos(m\phi)\cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right)$$

$$h = \frac{x_{mn}}{a}$$

$$E_\phi = +A_{mnp}\frac{\gamma m}{h^2 r} J_m(hr)\sin(m\phi)\cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right)$$

$$H_\phi = -A_{mnp}\frac{i\omega\epsilon}{h} J_m'(hr)\cos(m\phi)\cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right)$$

$$H_r = A_{mnp}\frac{m}{r} J_m\left(x_{mn}\frac{r}{a}\right)\sin(m\phi)\cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right)$$

5

Fyrir TM010 er því

$$E_z = A_{010} J_0\left(x_{01}\frac{r}{a}\right)$$

$$H_\phi = -i A_{010}\frac{\omega\epsilon}{h} J_0'\left(x_{01}\frac{r}{a}\right) = i A_{010}\frac{\omega\epsilon}{h} J_1\left(x_{01}\frac{r}{a}\right)$$

Til eru TM_{110}, TM_{011} og TM_{111} en ég er forvitinn um TM_{110}

$$E_z = A_{110} J_1\left(x_{11}\frac{r}{a}\right)\cos(\phi)$$

$$H_\phi = -A_{110}\frac{i\omega\epsilon}{h} J_1'\left(x_{11}\frac{r}{a}\right)\cos(\phi)$$

$$H_r = A_{110}\frac{1}{r} J_1\left(x_{11}\frac{r}{a}\right)\sin(\phi)$$

p þarf að vera 1 til þess að fá E_r og E_ϕ

TE$_{mnp}$

$$\boxed{\bar E_T = \frac{i}{h^2}\omega\mu\,\hat a_z \times \bar\nabla_T H_z}$$

(6)

$$H_z(r,\phi,z) = B_{mnp}\, J_m\!\left(\frac{x'_{mn}}{a} r\right)\cos(m\phi)\sin\!\left(\frac{p\pi}{d} z\right)$$

$m = 0,1,2,\dots \qquad n = 1,2,3,\dots \qquad p = 1,2,3,\dots$

Skoða TE$_{111}$

$$H_z = B_{111}\, J_1\!\left(\frac{x'_{11}}{a} r\right)\cos(\phi)\sin\!\left(\frac{\pi z}{d}\right)$$

$$E_\phi = B_{mnp}\, J'_m\!\left(\frac{x'_{mn}}{a} r\right)\cos(m\phi)\sin\!\left(\frac{p\pi}{d} z\right)\frac{i}{h}\omega\mu$$

$$E_r = +\frac{i\omega\mu}{h^2} B_{mnp}\, J_m\!\left(\frac{x'_{mn}}{a} r\right)\sin(m\phi)\sin\!\left(\frac{p\pi}{d} z\right)$$

⋮

(7)

$$H_z = B_{111}\, J_1\!\left(\frac{x'_{11}}{a} r\right)\cos\phi\,\sin\!\left(\frac{\pi z}{d}\right)$$

$$E_\phi = \frac{i}{hr}\omega\mu\, B_{111}\, J'_1\!\left(\frac{x'_{11}}{a} r\right)\cos\phi\,\sin\!\left(\frac{\pi z}{d}\right)$$

$$E_r = \frac{i\omega\mu}{h^2} B_{111}\, J_1\!\left(\frac{x'_{11}}{a} r\right)\cos\phi\,\sin\!\left(\frac{\pi z}{d}\right)$$

$H_\phi = \dots\dots$

Er hugt at sjá hér tvær hringskautaðar bylgjur leggjast saman? Onnur fer í $+Z$ og hin í $-Z$ stefnu?

(1)

Loftnet, longd L við streymi

$$i(z,t) = \mathrm{Re}\left\{ I_0 \sin\!\left(\frac{2\pi|z|}{L}\right) e^{i\omega t}\right\} \qquad \text{fyrir } |z| \le \frac{L}{2}$$

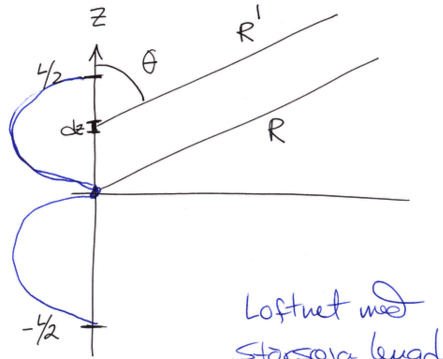
(1) Teikna graf af streymi $i(z)$

$$i(z) = I_0 \sin\left(\frac{2\pi|z|}{L}\right)$$

Teikna tað

$$\frac{i\left(\frac{z}{L}\right)}{I_0} = \sin\left(2\pi\left|\frac{z}{L}\right|\right)$$

Sjá næstu síðu



Loftnet við størsta longd

Kanna fjarsviðið

(2)

(2) Finna geislingarmynstur

$$i(z) = I_0 \sin\left(\frac{2\pi|z|}{L}\right)$$

fjarsvið, nýtum at fráða frá Cheng, $R \gg L$

$$R' = \left\{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta\right\}^{1/2} \simeq R - z\cos\theta \qquad \text{fyrir fasapart}$$

og $\quad \dfrac{1}{R'} \sim \dfrac{1}{R}$

$$dE_\theta = \eta_0\, dH_\phi = i\,\frac{i(z)\,dz}{4\pi}\left\{\frac{e^{-i\beta R'}}{R'}\right\}\eta_0\,\beta\sin\theta$$

og tí válgunum verður fjarsviðið

③

$$E_\theta = \eta_0 H_\phi = i\,\frac{I_0\eta_0\beta\sin\theta}{4\pi R}\, e^{-i\beta R}\int_{-L/2}^{+L/2} dz\, e^{i\beta z\cos\theta}\,\sin\left(\frac{2\pi|z|}{L}\right)$$

skoðum heildið

$$\int_{-L/2}^{L/2} dz\, e^{i\beta z\cos\theta}\,\sin\left(\frac{2\pi|z|}{L}\right) = -\int_{-L/2}^{0} dz\, e^{i\beta z\cos\theta}\,\sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right) + \int_{0}^{L/2} dz\, e^{i\beta z\cos\theta}\,\sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right)$$

$$= \int_{0}^{L/2} dz\,\sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right)\left\{e^{-i\beta z\cos\theta} + e^{i\beta z\cos\theta}\right\}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2i}\int_{0}^{L/2} dz\left\{e^{i\frac{2\pi z}{L}} - e^{-i\frac{2\pi z}{L}}\right\}\left\{e^{i\beta z\cos\theta} + e^{-i\beta z\cos\theta}\right\}}$$

④

$$= 2\int_{0}^{L/2} dz\,\sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right)\cos\left(\beta z\cos\theta\right)$$

$$= 2L\int_{0}^{1/2} du\,\sin(2\pi u)\cos(\beta L u\cos\theta)$$

$$= 2L\,\frac{2\pi\left\{1+\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right)\right\}}{(2\pi)^2 - (\beta L\cos\theta)^2}$$

þar sem ég notaði wxMaxima og bar saman við (GR- 2.533-1) með leiðréttingu

$$\int dx\,\sin(ax)\cos(bx) = -\frac{\cos\{(a+b)x\}}{2(a+b)} - \frac{\cos\{(a-b)x\}}{2(a-b)}$$

ef $a \neq b$

⑤

því fæst

$$E_\theta = i\,\frac{L I_0\eta_0\beta}{R}\, e^{-i\beta R}\,\frac{\left\{1+\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right)\right\}}{(2\pi)^2 - (\beta L\cos\theta)^2}\,\sin\theta$$

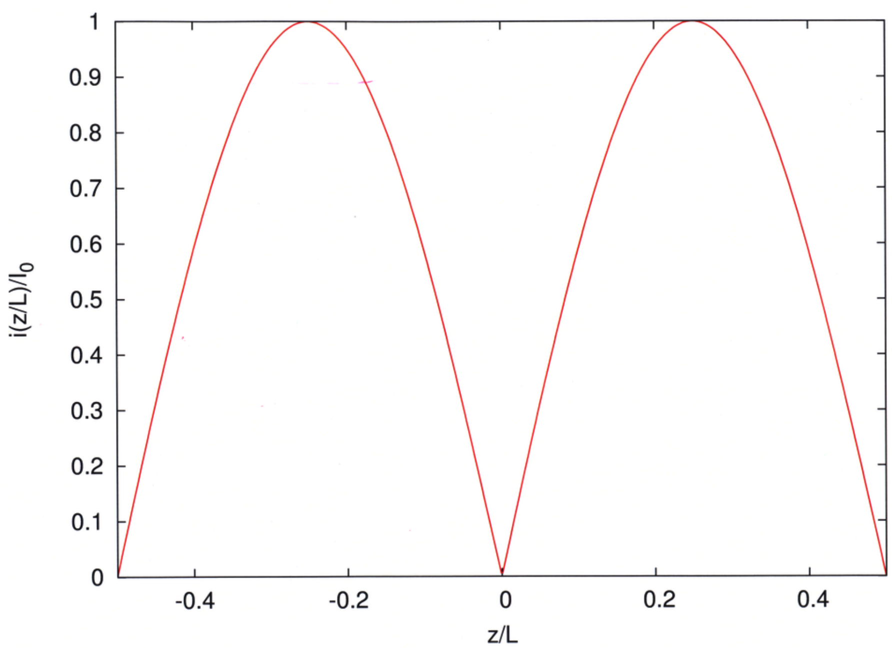
Ef loftnetið er lítið $L \ll \lambda$, $\beta L \ll 1$ þá fæst

$$E_\theta \sim \frac{i\eta_0 I_0\beta L}{2\pi^2 R}\, e^{-i\beta R}\,\sin\theta$$

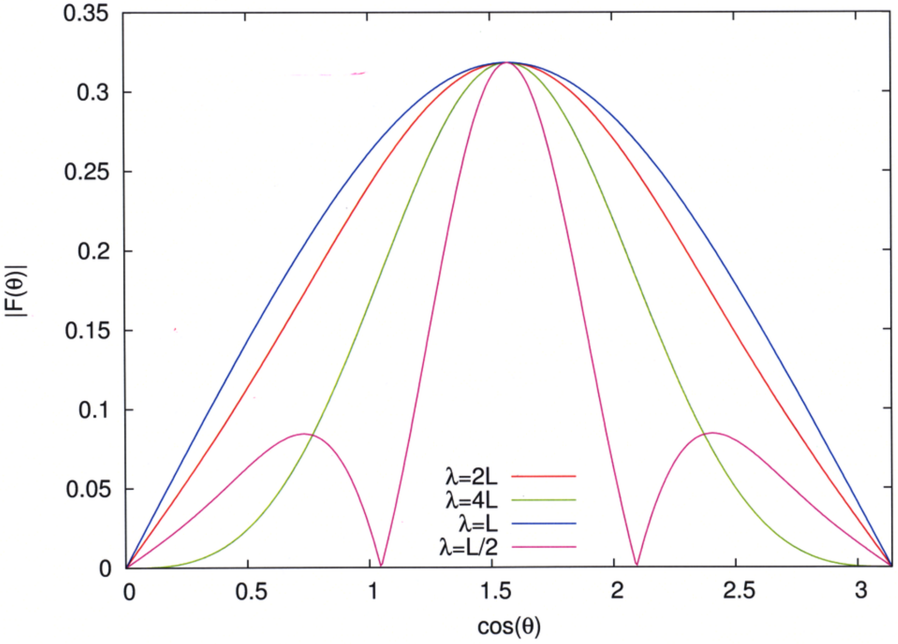
þá geislar loftnetið eins og tvískaut

skoðum önnur tilvik á næstu gröfum

⑥

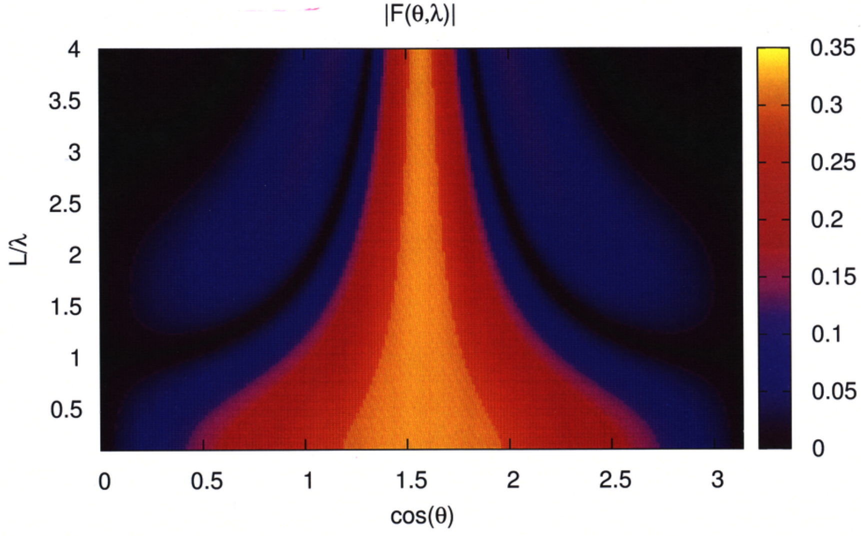


7



|F(θ)|
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
cos(θ)
λ=2L
λ=4L
λ=L
λ=L/2

8



|F(θ,λ)|
L/λ
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
cos(θ)
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0