Jöfnur Maxwells

$$\text{(1)}\quad \bar{\nabla}\times\bar{E} = -\partial_t \bar{B} \qquad\qquad \bar{\nabla}\times\bar{H} = \bar{J} + \partial_t \bar{D}\quad\text{(2)}$$

$$\text{(3)}\quad \bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho \qquad\qquad \bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0\quad\text{(4)}$$

samfelldni jafnan er

$$\partial_t \rho + \bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0 \quad\text{(5)}$$

Stærð fræðilega í lagi, en eðlisfræðilega þekkjum við engar uppspretur sem væru alltaf fastar í rúminu $\rightarrow C(\bar{r})=0$

Verkum með div á (2)

$$\underbrace{\bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{H})}_{=0} = \underbrace{\bar{\nabla}\cdot\bar{J}}_{=-\partial_t\rho} + \partial_t\bar{\nabla}\cdot\bar{D}$$

vegna (5)

$$\rightarrow \partial_t\left\{\bar{\nabla}\cdot\bar{D} - \rho\right\} = 0$$

$$\rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{D} - \rho(\bar{r}) = C(\bar{r})$$

$$\rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho$$

Verkum með $\mathrm{div}\,\bar{a}$ á (1)

$$\underbrace{\bar{\nabla}\cdot\left(\bar{\nabla}\times\bar{E}\right)}_{=0} = -\partial_t \bar{\nabla}\cdot\bar{B}$$

þarf að gilda fyrir alla tíma t

$$\rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0$$

$\bar{B}$ heitir einungis þverþátt, þar sem engar uppsprettur eða segulhleðslur eru til fyrir það

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho$$

$\bar{D}$ heitir langþátt vegna hleðslna

Á heildisformi

1
$$\oint_C \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

2
$$\oint_C \bar{H}\cdot d\bar{l} = I + \oint_S \partial_t \bar{D}\cdot d\bar{s}$$

3
$$\oint_S \bar{D}\cdot d\bar{s} = Q$$

4
$$\oint_S \bar{B}\cdot d\bar{s} = 0$$

samfelldni jöfnan heildað yfir rúmmál V er þá

$$\oint_S \bar{J}\cdot d\bar{s} = -d_t Q$$ 5

Hér er S opið yfirborð með C sem jaðar

Hér er S lokað yfirborð

tökum 2

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = I + \oint_S \partial_t \bar{D} \cdot d\bar{s}$$

leyfum S og C lokast !

Þá stendur eftir

$$0 = I + \oint_S \partial_t \bar{D} \cdot d\bar{s}$$

notum 5

$$\oint_S \bar{J} \cdot d\bar{s} = -d_t Q$$

$$I = -d_t Q$$

$$\rightarrow d_t \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = d_t Q$$

$$d_t \left\{ \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} - Q \right\} = 0$$

Aftur, hér þurfum við at höfða til þess at eðlisfrøðiliga eru allar okkar frjálsu hleðslur faldar í Q

$$\rightarrow \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q$$

Reynum líka (1)

leyfum s að lokast aftur

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = -d_t \bar{\Phi}$$

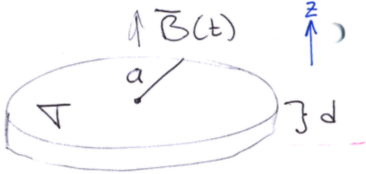
$$0 = -d_t \bar{\Phi} = -d_t \oint_S d\bar{s} \cdot \bar{B}$$

$$\rightarrow d_t \left\{ \oint_S d\bar{s} \cdot \bar{B} \right\} = 0$$

eðlisfræðilega eru engar uppsprettur fyrir B vektor, engin segul einskaut eru til

$$\rightarrow \oint_S d\bar{s} \cdot \bar{B} = 0$$

fyrir lokað s



stífan er hreyfingarlaus

Lögmál Faradays

$$\nabla \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \qquad \Big| \qquad \oint_C \overline{E}\cdot d\overline{l} = -\int_S \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}\cdot d\overline{s}$$

Gerum þá nálgun að sleppa sjálfspani, sjá endann á dæmi

$$\oint_C \overline{E}\cdot d\overline{l} = -\frac{d}{dt}\int_S d\overline{s}\cdot\overline{B}(t) = -\frac{d}{dt}\,\overline{\Phi}(t)$$

Kerfið er Ohmskt $\rightarrow$ $\overline{J} = \sigma\overline{E}$, σ er fasti hér

$$\oint_C \sigma\overline{E}\cdot d\overline{l} = -\sigma\frac{d}{dt}\int_S d\overline{s}\cdot\overline{B}(t)$$

$$\oint \overline{J}\cdot d\overline{l} = -\sigma\frac{d}{dt}\int_S d\overline{s}\cdot\overline{B}(t) \qquad (*)$$

7

$\bar{B}(t) = B(t)\,\hat{a}_z$ leiðir til hringstrauma í skífunni

Notum (*) fyrir hring með $r < a$

$$J \cdot 2\pi r = -\sigma \pi r^2 \frac{d}{dt} B(t)$$

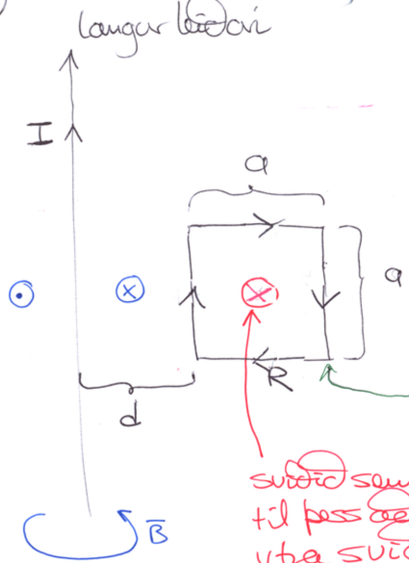
$$\rightarrow \quad J(r) = -\frac{\sigma r \dot{B}(t)}{2}$$

og

$$\bar{J}(r) = -\frac{\sigma r \dot{B}(t)}{2}\,\hat{a}_\varphi$$

Straumþéttleikinn breytist ekki með d, en straumurinn i(r) gerir það því með auknu d minnkar viðnámið

Auðvitað skiptir sjálfspan þéttsins máli þegar straum-
þéttleikinn er reiknaður. Til þess að skilja þann þátt bið
ég ykkur um að skoða lausnir fyrir 8.-skammt 2013,
bæði dæmin. Fyrra dæmið er reiknað með og án L,
en þá fæst sama niðurstaðan fyrir Q, en ekki fyr-
I! Hér er líka hægt að bæta við L, en B(t) var ekki
gefið nákvæmlega. Til þess að reikna L hér þarf
að nota $\bar{A}$ og nákvæmu lausnina sem sett er saman
úr sporbaugs-föllum. Sleppum því, en skoðum
dæmin 2013. Ég hengi þær lausnir hér við.



Straumurinn í leiðaranum er

$$I(t) = I\,\theta(-t)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{ef } x<0 \\ 1 & \text{ef } x>0 \end{cases}$$

a) Straumstefnan í lykkjunni klukkan $t = 0^+$

sviðið sem spólan spanar til þess að reyna að viðhalda ytra sviðinu

segulsvið vírsins fyrir $t<0$

Stöðluð textabókarlausn sleppir oft sjálfspani, skoðum eftir dæmi 2 hvað gerist ef við tökum það með á síðum (10) – (12)

b) Lögmál Ampères gefur $\bar{B}$ í kringum vír þ. $t<0$ ②

$$\bar{B} = \hat{\phi}\,\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

því má finna flæðið um lykkjuna

$$\bar{\Phi} = \oint_S d\bar{s}\cdot\bar{B} = a\int_d^{d+a} dr\,\frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln(r)\Big|_d^{d+a}$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\left\{\ln(d+a) - \ln(d)\right\} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left[\frac{d+a}{d}\right]$$

Í lykkjunni spanast I_{Ly}, íspennan í lykkjunni er

$$\mathcal{E} = I_{Ly}\cdot R = -\frac{d}{dt}\bar{\Phi}$$

$$\hookrightarrow \quad I_{Ly} = \frac{d}{dt}Q$$

$$\rightarrow \quad I_{Ly} \cdot R = -\frac{d}{dt}\Phi$$

$$R\frac{d}{dt}Q = -\frac{d}{dt}\Phi = -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left\{\frac{d+a}{d}\right\}\frac{d}{dt}I$$

$$\frac{d}{dt}Q = -\frac{\mu_0 a}{2\pi R}\ln\left\{\frac{d+a}{d}\right\}\frac{d}{dt}I$$

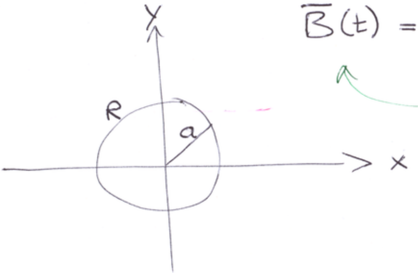
heildum

$$\int_0^Q dQ' = -\frac{\mu_0 a}{2\pi R}\ln\left\{\frac{d+a}{d}\right\}\int_I^0 dI'$$

$$\rightarrow \quad Q = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R}\ln\left\{\frac{d+a}{d}\right\}$$

hleðslan sem flæðir um hvern punkt lykkjunnar
þegar slökkt er á I í langa leiðaranum

②



$$\overline{B}(t) = \frac{B_0}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x + \hat{a}_z)\left\{1 - e^{-\lambda t}\right\}\theta(t)$$ ④

flæði þessa ytra sviðs í gegnum lykkju

a) Finna $i(t)$ í lykkjunni

$$\Phi_B(t) = \frac{B_0 a^2 \pi}{\sqrt{2}}\left\{1 - e^{-\lambda t}\right\}\theta(t)$$

Upp í gegnumlykkjuna

{Er í raun óþarft því $|B(0)| = 0$}

$$\frac{d\Phi_B}{dt}(t) = \frac{B_0 a^2 \pi}{\sqrt{2}}\left[\left\{1 - e^{-\lambda t}\right\}\delta(t) + \theta(t)\lambda e^{-\lambda t}\right]$$

Heaviside step function

Keðjuregla og $\frac{d\theta(t)}{dt} = \delta(t)$

Dirac delta function

Heildarsegulflæðið um lykkjuna er vegna breytinga á þessu "ytra" segulsviði B og breytinga segulflæðis sem streymir um lykkjuna myndar (5)

sjálfspan lykkju

$$\Phi = \Phi_B + \Phi_L = \Phi_B + Li$$

$\Phi = Li$

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$= Ri$$

því fæst

$$Ri = -\frac{d\Phi_B}{dt} - L\frac{di}{dt}$$

eða

$$L\frac{di}{dt} + Ri = -\frac{d}{dt}\Phi_B$$

(6)

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = -\frac{B_0 a^2 \pi}{L\sqrt{2}} \left[\left\{ 1 - e^{-\lambda t} \right\} \delta(t) + \theta(t) \lambda e^{-\lambda t} \right]}$$

Hér er 1. stigs afleiðu jafna sem við kunnum að leysa

Jafnan

$$y' + p(t) y = q(t)$$

hefur lausnina

$$y(t) = y(t_0) e^{-P(t)} + e^{-P(t)} \int_{t_0}^{t} ds\, e^{P(s)} q(s)$$

með

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} ds\, p(s)$$

Hjá okkur

$$P(t) = \int_0^t ds \frac{R}{L} = \frac{Rt}{L}$$

$$\rightarrow i(t) = i(0)e^{-\frac{Rt}{L}} - e^{-\frac{Rt}{L}}\frac{B_0 a^2\pi}{L\sqrt{2}}\lambda\int_{0^-}^{t} ds\, e^{\frac{Rs}{L}-\lambda s}$$

$$= i(0)e^{-\frac{Rt}{L}} - e^{-\frac{Rt}{L}}\lambda\frac{B_0 a^2\pi}{L\sqrt{2}}\left[\frac{e^{\frac{R}{L}t-\lambda t}-1}{\left(\frac{R}{L}-\lambda\right)}\right]$$

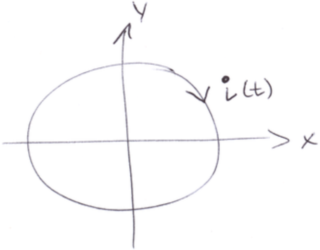
$$= \underbrace{i(0)}_{=0}e^{-\frac{Rt}{L}} - \frac{\lambda B_0 a^2\pi}{L\sqrt{2}}\left(\frac{e^{-\lambda t}-e^{-\frac{Rt}{L}}}{\left(\frac{R}{L}-\lambda\right)}\right)$$

$$= \frac{\lambda B_0 a^2\pi}{L\sqrt{2}}\left[\frac{e^{-\frac{R}{L}t}-e^{-\lambda t}}{\left(\frac{R}{L}-\lambda\right)}\right]$$

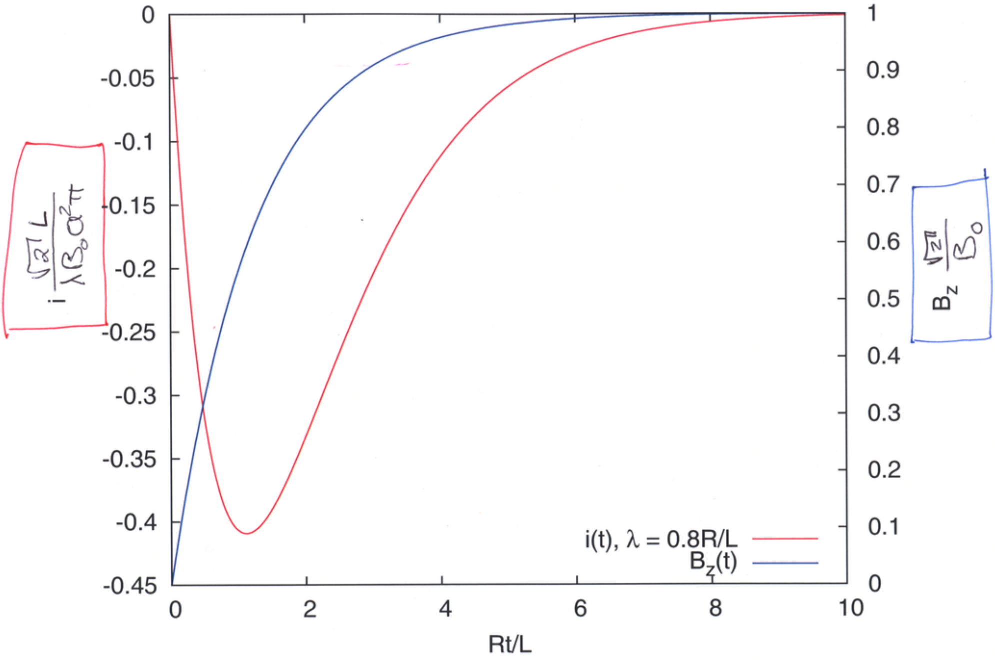
L má reikna, en hér skiptir aðeins máli hvernig hlutfall $\frac{R}{L}$ er miðað við λ svo ég sleppi því

Fall $\bar{B}(t)$ af t er með þeim hætti að hvert er hægt á $\bar{B}$ sem nær síðan max-gildi

Svar lykkjunnar er íspenna sem vinnur á móti þessu sviði



sjá næstu síðu



0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
-0.3
-0.35
-0.4
-0.45
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
2
4
6
8
10
Rt/L
$i \frac{\sqrt{2} L}{\lambda B_0 a^2 \pi}$
$B_z \frac{\sqrt{2}}{B_0}$
i(t), λ = 0.8R/L
$B_z(t)$

Skoðum aftur ~~hvað~~ gerist af sjálfspan lykkju er tekið til greina?

1. dæmið

$$\Phi = \Phi_{vír} + \Phi_{lykkja} = \underbrace{\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left\{\frac{d+a}{d}\right\}}_{MI} + L I_{Ly}$$

$$V = -\frac{d}{dt}\Phi$$

$$\rightarrow \quad I_{Ly} \cdot R = -M\frac{d}{dt}I - L\frac{d}{dt}I_{Ly}$$

$$L\frac{d}{dt}I_{Ly}(t) + I_{Ly}(t)R = -M\frac{d}{dt}I(t)$$

$$I(t) = I\,\Theta(-t) \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}I(t) = -\delta(t)\cdot I$$

$$L \frac{d}{dt} I_{L_y}(t) + I_{L_y}(t) R = M I \delta(t)$$

$$\frac{d}{dt} I_{L_y}(t) + \frac{R}{L} I_{L_y}(t) = \frac{MI}{L} \delta(t)$$

Løsning er
$$y(t) = y(t_0) e^{-P(t)} + e^{-P(t)} \int_{t_0}^{t} ds\, e^{P(s)} q(s)$$

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} ds\, p(s) = \frac{Rt}{L}$$

$$q(s) = M I \delta(t)$$

$$I_{L_y}(t) = I_{L_y}(0) e^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{R}{L}t} \frac{MI}{L} \int_{0^-}^{t} ds\, e^{\frac{Rs}{L}} \delta(s)$$

(12)

$$I_{Ly}(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\,\frac{MI}{L}$$

Heildar hleðsla um sérhvern punkt í rás (lykkju)

$$Q = \int_0^\infty dt\, I_{Ly}(t) = \frac{MI}{L}\int_0^\infty dt\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$= \frac{MI}{L}\left\{ -\frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{R/L}\Big|_0^\infty \right\} = \frac{MI}{L}\left\{0 + \frac{L}{R}\right\} = \frac{MI}{R}$$

óháð L!

$$= \frac{\mu_0 a I}{2\pi R}\ln\left\{\frac{d+a}{d}\right\}$$

Sama svar og áður!
Hvernig gátum við búist við því!