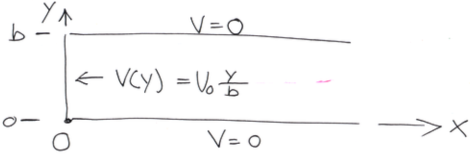
3. skammtar

1



Dæmið er hliðstætt við dæmi í fyrirlestri, nema hvað mættið á endaplötunni er $V(y) = V_0 \frac{y}{b}$ hér

Eins og áður fæst því lausn sem er línuleg samantekt grunnlausna jöfnu laplace

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n x} \sin(k_n y) \quad , \quad k_n = \frac{n\pi}{b}$$

Lausnin uppfyllir jaðarskilyrðin á láréttu plötunum. En við þurfum að ákvarða liðunarstuðlana t.þ.a.

$$V(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n y) = V_0 \frac{y}{b} \quad , \quad 0 < y < b$$

Við notum enn að föllin $\sin(k_m y)$ mynda hornréttan fullkominn grunn á bilinu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^b dy\, C_n \sin(k_n y) \sin(k_m y) = \frac{V_0}{b} \int_0^b dy\, y \sin(k_m y)$$

$\longrightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n b \int_0^b \frac{dy}{b} \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \sin\left(m\pi \frac{y}{b}\right) = V_0 b \int_0^b \frac{dy}{b} \frac{y}{b} \sin\left(m\pi \frac{y}{b}\right)$$

breytuskipti „$\frac{y}{b} \to u$" gefa

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^1 du \sin(n\pi u) \sin(m\pi u) = V_0 \int_0^1 du\, u \sin(m\pi u)$$

$$\rightarrow C_m \frac{1}{2} = -V_0 \frac{\cos(m\pi)}{m\pi} = \frac{V_0}{m\pi}(-1)^{m+1}$$

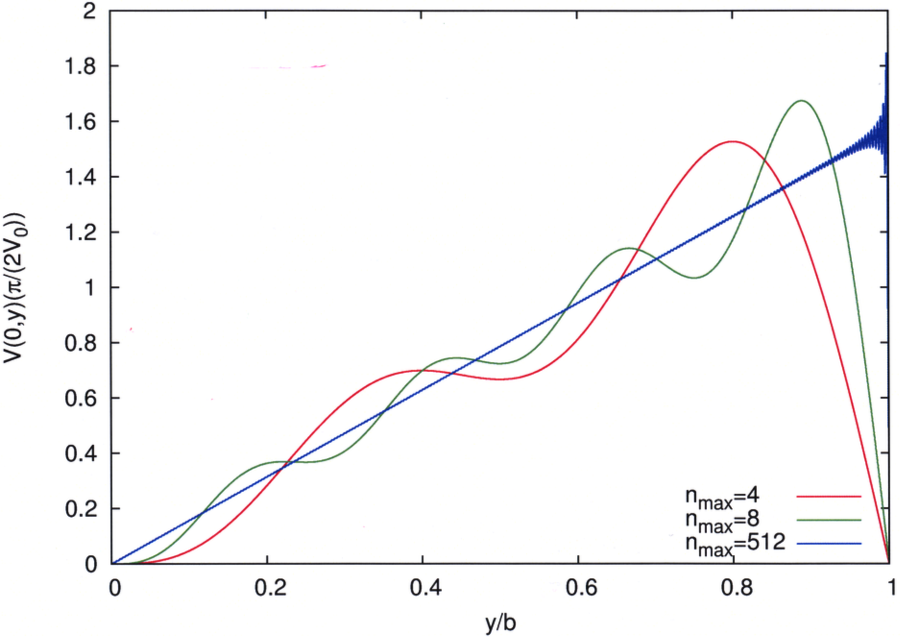
því

$$\int_0^1 du \sin(n\pi u)\sin(m\pi u) = \frac{1}{2}\delta_{n,m} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ef } n=m \\ 0 & \text{ef } n\neq m \end{cases}$$

$$\rightarrow C_m = \frac{2V_0}{m\pi}(-1)^{m+1}$$ og lausnin verður

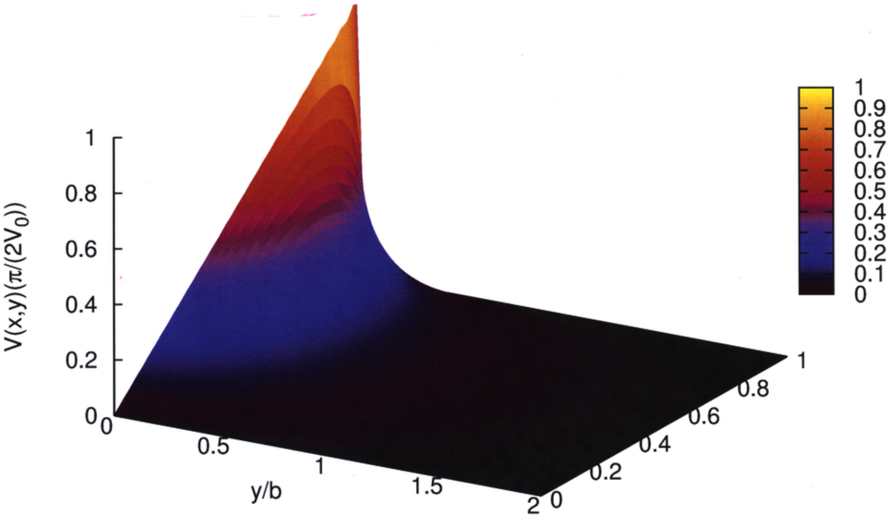
$$V(x,y) = \frac{2V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n\pi\frac{x}{b}} \sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right)$$

Reynum í grafík, áður en áfram er haldið

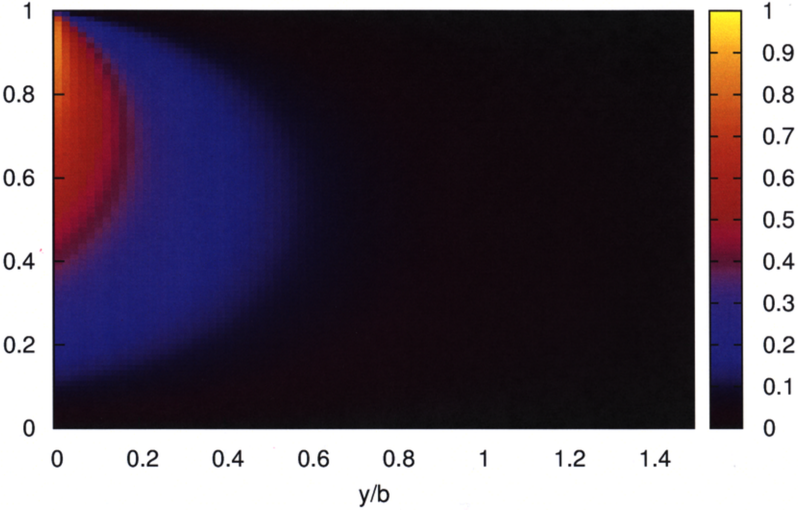


V(0,y)(π/(2V0))
y/b
n_max=4
n_max=8
n_max=512
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

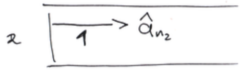
(5)


V(x,y)(π/(2V_0))
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
y/b
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0

6



② yfirborðshleðsla á endaplötu



Jaðarskilyrðin eru $\hat{a}_{n_2}\cdot(\bar{D}_1-\bar{D}_2)=\rho_s$

þ.s. $\hat{a}_{n_2}$ er vigur út úr efni númer 2

$$\rightarrow \quad \hat{a}_x\cdot\bar{D}=\rho_s \quad \rightarrow \quad \hat{a}_x\cdot\epsilon_0\bar{E}=\rho_s$$

Þá $\epsilon_0 E_x=\rho_s$ og $\bar{E}=-\bar{\nabla}V$

$$V(x,y)=\frac{2V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-n\pi\frac{x}{b}}\sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right)$$

$$\rightarrow \quad E_x(x,y)=-\frac{\partial}{\partial x}V(x,y)=\frac{2V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{n\pi}{b}e^{-n\pi\frac{x}{b}}\sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right)$$

$$\rho_s(y)=\frac{2V_0\epsilon_0}{b}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right)$$

bessa röd nia summa

$$\rho_s(y) = \frac{2V_0\epsilon_0}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}\sin\left((n+1)\pi\frac{y}{b}\right) = \frac{2V_0\epsilon_0}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\sin\left((n+1)\pi\frac{y}{b}\right)$$

$$= \frac{2V_0\epsilon_0}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left\{e^{i\frac{(n+1)\pi y}{b}} - e^{-i\frac{(n+1)\pi y}{b}}\right]\frac{1}{2i}$$

$$= \frac{2V_0\epsilon_0}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{e^{\frac{i\pi y}{b}}\left(-e^{\frac{i\pi y}{b}}\right)^n - e^{-\frac{i\pi y}{b}}\left(-e^{-\frac{i\pi y}{b}}\right)^n\right]\frac{1}{2i}$$

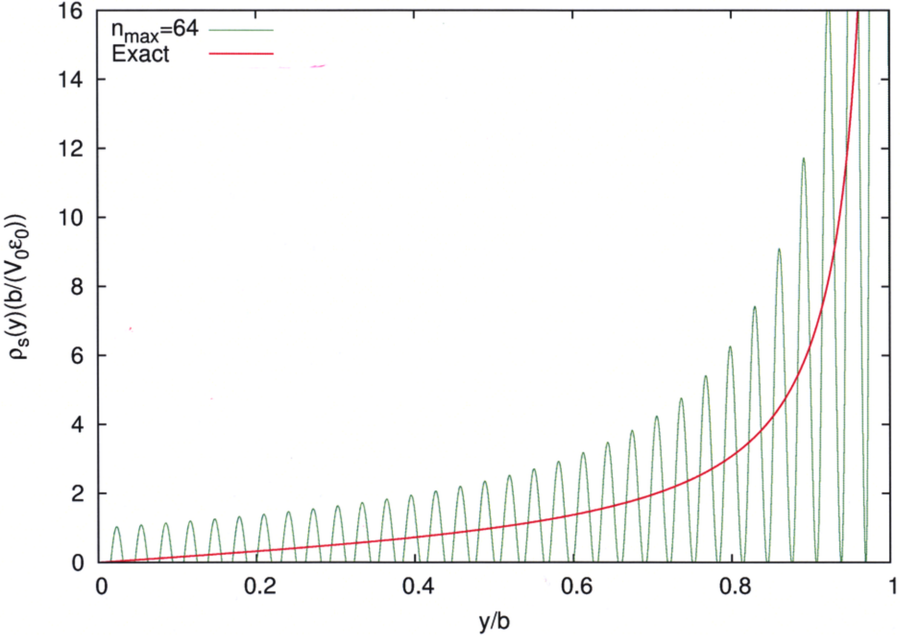
$$= \frac{2V_0\epsilon_0}{2bi}\left\{\frac{e^{\frac{i\pi y}{b}}}{1+e^{\frac{i\pi y}{b}}} - \frac{e^{-\frac{i\pi y}{b}}}{1+e^{-\frac{i\pi y}{b}}}\right]$$

p.s. nodtoe er $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}, \quad |q|<1$

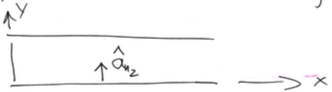
$$\rho_s(y) = \frac{2V_0\epsilon_0}{b \cdot 2i}\left\{\frac{e^{\frac{i\pi y}{b}} - e^{-\frac{i\pi y}{b}}}{2 + e^{\frac{i\pi y}{b}} + e^{-\frac{i\pi y}{b}}}\right\} = \frac{2V_0\epsilon_0}{b2}\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)}\right\}$$

$$= \frac{V_0\epsilon_0}{b}\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)}{\left\{1+\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right\}}$$

Reynum þetta með grafík. Hér er rétt að búast við að samleitni röðarinnar sé ekki góð og nákvæma lausnin er með sérstöðupunkt í $y = b$


n_{max}=64
Exact
$\rho_s(y)(b/(V_0\varepsilon_0))$
y/b
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
2
4
6
8
10
12
14
16

(3) yfirborðshleðsla lægri láréttu plötunnar



$$\hat{a}_{n_2} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s$$

$$\rightarrow \hat{a}_y \cdot \bar{D} = \rho_s \quad \rightarrow \quad \epsilon_0 E_y = \rho_s$$

$$E_y(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y} V(x,y)\Big|_{y=0} = -\frac{2V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n\pi \frac{x}{b}} \frac{n\pi}{b}$$

$$\rightarrow \rho_s(x) = -\frac{2V_0\epsilon_0}{b} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n\pi\frac{x}{b}}$$

$$= -\frac{2V_0\epsilon_0}{b} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} e^{-(n+1)\pi\frac{x}{b}}$$

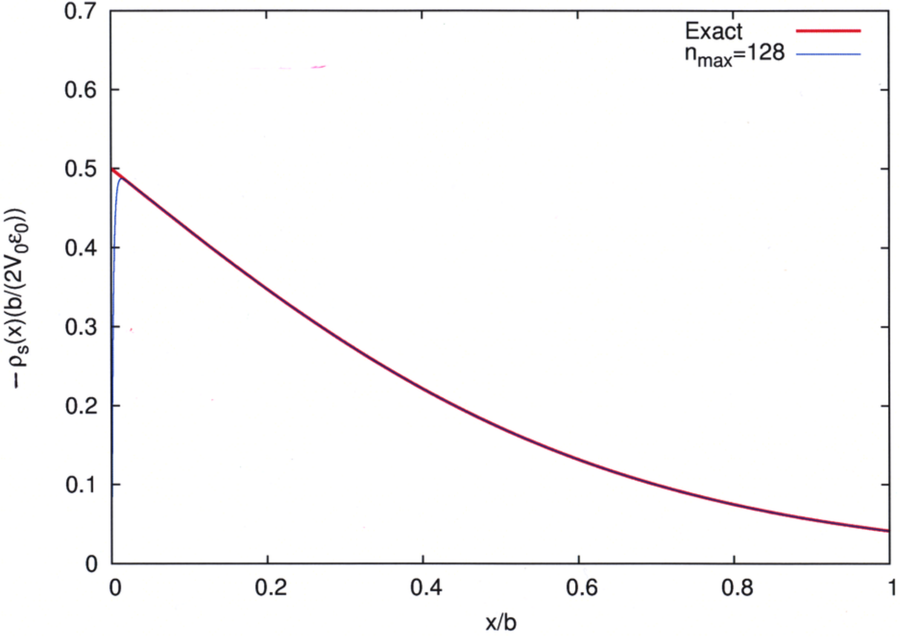
$$= -\frac{2V_0\epsilon_0}{b}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi x}{b}}\left(-e^{-\frac{\pi x}{b}}\right)^n$$

$$= -\frac{2V_0\epsilon_0}{b}\;\frac{e^{-\frac{\pi x}{b}}}{1+e^{-\frac{\pi x}{b}}} = \rho_s(x)$$

Summuraðir hér eru á mörkum þess að vera samleitnar, eins og gröfin sýna. Analýtísk summuna má gera með samleitni þáttum sem síðan eru látnir hverfa ($\epsilon \to 0$).

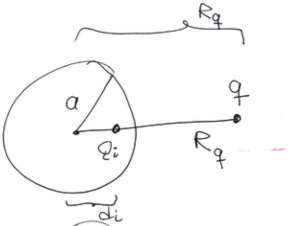
Athugun með grafík til gamans

Rétt er að nefna að jaðarskilyrðið fyrir endaplötuna er ekki alveg í samræmi við venjur í rafstöðufræði. Þannig er ekki hægt að setja upp í kjörleiðara. Ef endaplatan er annað en kjörleiðari vaknar spurningin hvað er D innan hennar. Svona kerfi má útbúa með þunnum samhliða vírum á þunnum einangrara. Vírarnir eru einangraðir frá hverjum öðrum — og þar við þunna einangraran má vera kjörleiðari. Á stórsæjum skala sést þá mættið $V(y) = V_0\frac{y}{b}$. Það er líka óvenjulegt að þessi jaðarskilyrði leiða til rafsviðs samhliða plötunni.



Exact
n_max=128
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x/b
− ρs(x)(b/(2V0ε0))

2



Kraftur milli kúlunnar og hleðslunnar q

Hægt er að setja spegilhleðslu í stað kúlunnar

Spegilhleðslan verður í fjarlægð $d_i = \frac{a^2}{R_q}$ frá miðju

stærð hennar er $Q_i = -\frac{a}{R_q} q$

Því er rétt að búast við einföldu Coulombslögmáli

$$|F| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 \frac{a}{R_q}}{\left(R_q - \frac{a^2}{R_q}\right)^2}$$

Aðdráttar kraftur milli þeirra

Þessi lausn er fundin í samræmi við aðferðina sýnda í dæmi 4-3 (Example 4-3, bls 161) í bók.

"Öllu lengri leið væri að nota

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \epsilon E^2 dv$$

og finna kraftinn með því að hnika til fjarlægð hleðslunnar frá kúlunni