Lítil rafsvarandi kúla

Áður höfum við leitt út geislunarjöfnu Larmors

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3}\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)^2$$

og fyrir litla rafsvarandi kúlu (eða annan hlut) með tvípólsvægi

$$\bar{d}(t) = \int d\bar{r}\; \bar{r}\, \rho(\bar{r}t)$$

fæst

$$P \simeq \frac{1}{6\pi\epsilon c^3}(\ddot{d})^2$$

og einnig

$$\frac{dP}{d\Omega} \simeq \frac{\mu}{(4\pi)^2 c}(\hat{n}\times\ddot{d})$$

í báðum tilfellum fyrir $\frac{v}{c} \ll 1$

fyrir meðalgildin fæst því (í tímalotubundnu sviði)

$$\left\{P_{rad}\right\}_{ave} = \frac{\omega^4}{6\pi\epsilon c^3}\left\{(\bar{d})^2\right\}_{ave}$$

Við notfærum venjulega $\bar{P}$ fyrir tvístautsvægið fyrir rafsvarandi kúlu með geisla a í ytra rafsviði föst (var í dæmi)

$$\bar{d} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} a^3 \bar{E}$$

Þessi jafna er rétt fyrir tímaháð svið ef $\bar{E}$ breytist hægt á skala kúlunnar a, þ.e. ef

$$\frac{\lambda}{2\pi} \gg a$$

$$\{P_{rad}\}_{ave} = \frac{1}{6\pi\epsilon} \frac{\omega^4}{c^3} \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} a^3\right)^2 \{\bar{E}^2\}_{ave}$$

heildar árekstrarþversnið er því

$$\boxed{\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{1}{\lambdabar^4} \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} a^3\right)^2}$$

$$\lambdabar = \frac{\lambda}{2\pi}, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

Hér var aftur eins og í síðasta fyrirlestri notað

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP/d\Omega}{|\bar{S}|}$$

$$\{A^2\}_{ave} = \frac{1}{2}|A|^2$$

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Aftur sést hér að
σ vex með ω^4
↑ langbylgjudreifing

Við höfum aðeins stoðað dreifingu og geislun í tvístauts nálgun

Larmor jafnan hefur því verið notuð til þess að meta dreifingu í fjölda til fella

↑
nokkuð snjallt
Aðferð Schwingers

Sígild dreifing, orku stig
rafeindanna í markinu hafa ekki komið við sögu

Engin bognun stoðuð

Vigureiginleikar rafsegulsviðsins hafa lítið komið við sögu
Hvernig beytast $\vec{E}$ og $\vec{B}$?

Aðeins flóknari aðferð

Maxwellsjöfnur án ρ og $\bar{J}$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0 \qquad \bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = 0 \qquad \bar{\nabla}\times\bar{H} = \frac{\partial\bar{D}}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla^2\bar{D} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\bar{D}}{\partial t^2} = -\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\left(\bar{D}-\epsilon_0\bar{E}\right) + \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\bar{\nabla}\times\left(\bar{B}-\mu_0\bar{H}\right) \quad (*)$$

nákvæmum jafna þar sem ϵ_0 og μ_0 geta verið háð staðarhniti $\bar{r}$, á einhverju takmörkuðu svæði gildir því

$$\bar{D} \neq \epsilon_0\bar{E} \quad \text{og} \quad \bar{B} \neq \mu_0\bar{H}$$

árekstrar svæði

Hægri hliðin á (*) er því hverfandi nema á takmörkuðu svæði. Fyrir fasora fæst

$$(\nabla^2 + k^2)\bar{D} = -\bar\nabla\times\bar\nabla\times(\bar D - \epsilon_0 \bar E) - i\epsilon_0\omega\bar\nabla\times(\bar B - \mu_0\bar H)$$

og $k^2 = \mu_0\epsilon_0\omega^2$

Á því svæði þekkjum við hægri hliðina

Lausnin er þá

$$\bar D = \bar D^{(0)} + \frac{1}{4\pi}\int d\bar x' \frac{e^{ik|\bar x-\bar x'|}}{|\bar x-\bar x'|}\left[\begin{array}{l}\bar\nabla'\times\bar\nabla'\times(\bar D-\epsilon_0\bar E) \\ + i\epsilon_0\omega\bar\nabla'\times(\bar B-\mu_0\bar H)\end{array}\right]$$

Innbylgja í heildisjöfnunni

gefin $\longrightarrow$ reikna $\bar D$

Viljam fjörsvið

$$\bar{D} \to \bar{D}^{(0)} + \bar{A}_{sc}\,\frac{\overbrace{e^{ikr}}}{r}$$

Kúlubylgja út

$$\bar{A}_{sc} = \frac{1}{4\pi}\int d\bar{x}'\, e^{-ik\hat{n}\cdot\bar{x}'}\left\{\begin{array}{l}\bar{\nabla}'\times\bar{\nabla}'\times\left(\bar{D}-\epsilon_0\bar{E}\right)\\ +i\epsilon_0\omega\,\bar{\nabla}'\times\left(\bar{B}-\mu_0\bar{H}\right)\end{array}\right\}$$

$$= \frac{k^2}{4\pi}\int d\bar{x}'\, e^{-ik\hat{n}\cdot\bar{x}'}\left\{\begin{array}{l}\left[\hat{n}\times\left(\bar{D}-\epsilon_0\bar{E}\right)\right]\times\hat{n}\\ -\frac{\epsilon_0\omega}{k}\,\hat{n}\times\left(\bar{B}-\mu_0\bar{H}\right)\end{array}\right\}$$

Segultvískaut

Raftvískaut

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\left|\bar{\epsilon}^{*}\cdot\bar{A}_{sc}\right|^2}{\left|\bar{D}^{(0)}\right|^2}$$

$\bar{\epsilon}$ er skautunarvigur dreifða geislans

Nú er oft gert ráð fyrir því að

$$\bar{D}(\bar{x}) = \left\{ \epsilon_0 + \delta\epsilon(\bar{x}) \right\} \bar{E}(\bar{x})$$

$$\bar{B}(\bar{x}) = \left\{ \mu_0 + \delta\mu(\bar{x}) \right\} \bar{H}(\bar{x})$$

þar sem $\delta\epsilon$ og $\delta\mu$ eru smá saman borið við ϵ_0 og μ_0

Nálgun línulegrar svörunar + Born

Í heildinni er notað

$$\bar{D} - \epsilon_0 \bar{E} = \delta\epsilon(x)\bar{E} \simeq \frac{\delta\epsilon(\bar{x})}{\epsilon_0} \bar{D}^{(0)}$$

$$\bar{B} - \mu_0 \bar{H} = \delta\mu(x)\bar{H} \simeq \frac{\delta\mu(\bar{x})}{\mu_0} \bar{B}^{(0)}$$

Gefið

$$\bar{D}^{(0)}(\bar{x}) = \hat{\epsilon}_0 D_0 e^{ik\hat{n}_0\cdot\bar{x}}$$

$$\bar{B}^{(0)}(\bar{x}) = \eta_0 \hat{n}_0 \times \bar{D}^{(0)}(\bar{x})$$

1. Born nálgun

$$\frac{\bar{\epsilon}^*\cdot\bar{A}_{sc}^{(1)}}{D_0} = \frac{k^2}{4\pi}\int d\bar{x}\, e^{i\bar{q}\cdot\bar{x}}\left\{\bar{\epsilon}^*\cdot\bar{\epsilon}_0 \frac{\delta\epsilon(\bar{x})}{\epsilon_0} + (\hat{n}\times\hat{\epsilon}^*)\cdot(\hat{n}_0\times\hat{\epsilon}_0)\frac{\delta\mu(\bar{x})}{\mu_0}\right\}$$

$$\bar{q} = k(\hat{n}_0 - \hat{n})$$

$$= k^2 \frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0}(\bar{\epsilon}^*\cdot\bar{\epsilon}_0)\left\{\frac{\sin(qa) - qa\cos(qa)}{q^3}\right\}$$

Ef kúla með $\delta\epsilon$ fasta innan geisla a

$$\lim_{q\to 0}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Born} = k^4 a^6 \left|\frac{\delta\epsilon}{3\epsilon_0}\right|^2 |\bar{\epsilon}^*\cdot\bar{\epsilon}_0|^2$$

sem við höfðum með aðeins
annari þáttnum fyrir Rayleigh
dreifingu af rafsvarandi
kúlu í langbylgjunálgun

á engan hátt
einföld . . . .

Hér endum við þegar
dreifingin er rétt að
flækjast og verða
athyglisverð

Hvað gerist fyrir
styttri bylgjulengdir
og flóknari lögun?

Tengist líka efniseigin-
leikum