Rafsegulgeislun

Við höfum skoðað geislun frá loftnetum

En viljum nú nálgast lýsingu á geislun sinda á hreyfingu

Þetta fyrsta skref er tekið fyrir gildi á öllum viðkomandi stikum sem ekki krefjast beint afstæðiskenningar.

fyrir geislunar mættið höfðum við

$$V(R,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'} \frac{\rho(t - R/u)}{R}\, dv'$$

$$\bar{A}(R,t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{\bar{J}(t - R/u)}{R}\, dv'$$

Hér ræð gáta sín á merking R utan og innan heildis

$\downarrow$

Endurritum jöfnurnar sem

$$V(\bar{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int d\bar{r}'\,\frac{\rho\left(\bar{r}', t - \frac{|\bar{r}-\bar{r}'|}{u}\right)}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$$

3d-rúmheildi

$$A(\bar{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int d\bar{r}'\,\frac{\bar{J}\left(\bar{r}', t - \frac{|\bar{r}-\bar{r}'|}{u}\right)}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$$

Ef uppsprettan hefur lengdarskala a þá viljum við skoða geislunina fjarri henni þ.s. $r >> a$

þar gildir

$$|\bar{r}-\bar{r}'| = \sqrt{r^2 - 2\bar{r}\cdot\bar{r}' + (r')^2} = r - \hat{n}\cdot\bar{r}' + \ldots\ldots$$

þar sem

$$\hat{n} = \frac{\bar{r}}{r}$$

er einingarvigurinn í átt athuganda

Aðfellu form mættanna fyrir $r >> a$ er þá

$$V(\bar{r},t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon r}\int d\bar{r}'\, \rho\left(\bar{r}', t - \frac{r}{u} + \frac{\hat{n}\cdot\bar{r}'}{u}\right)$$

$$A(\bar{r},t) \approx \frac{\mu}{4\pi r}\int d\bar{r}'\, \bar{J}\left(\bar{r}', t - \frac{r}{u} + \frac{\hat{n}\cdot\bar{r}'}{u}\right)$$

Geislunartíminn $t' \approx t - \underbrace{\frac{r}{u}}_{\text{burðartími til Athuganda}} + \underbrace{\frac{1}{u}\hat{n}\cdot\bar{r}'}_{\text{burðartími um uppsprettu}} = t_r$

Nú getum við metið sviðin

$$\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A} \quad \text{og} \quad \bar{E} = -\bar{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t}\bar{A}$$

og notum nálgunina

$$\bar{\nabla}\left\{\frac{1}{r} f\left(t-\frac{r}{u}+\frac{\hat{n}\cdot\bar{r}'}{u}\right)\right\} = -\frac{\hat{n}}{r^2} f(t_r) - \left\{\frac{\hat{n}}{u} + \frac{\hat{n}\times(\hat{n}\times\bar{r}')}{ur}\right\}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{r} f(t_r)\right\}$$

$$t-\frac{r}{u}+\frac{\hat{n}\cdot\bar{r}'}{u} = t-\frac{r}{u}+\frac{\bar{r}\cdot\bar{r}'}{ru}$$

$$\bar{\nabla}\left(\frac{\bar{r}\cdot\bar{r}'}{r}\right) = \bar{\nabla}\left(\frac{\bar{r}}{r}\cdot\bar{r}'\right) = (\bar{r}'\cdot\bar{\nabla})\frac{\bar{r}}{r} + \bar{r}'\times\left(\bar{\nabla}\times\frac{\bar{r}}{r}\right)$$

$$= (\bar{r}'\cdot\bar{\nabla})\hat{n} + \bar{r}'\times\left\{\bar{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\times\hat{r} + \frac{1}{r}\underbrace{\bar{\nabla}\times\bar{r}}_{=0}\right\} = (\bar{r}'\cdot\bar{\nabla})\hat{n} + \bar{r}'\times\underbrace{(-\hat{n}\times\hat{n})}_{=0}\frac{1}{r}$$

$$= \frac{1}{r}\left(\bar{r}' - \hat{n}(\bar{r}'\cdot\hat{n})\right) = -\frac{1}{r}\hat{n}\times(\hat{n}\times\bar{r}')$$

$$= -\frac{n}{u}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{r} f(t_r)\right\} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

því fæst fyrir sviðin (ef $r \gg a$)

$$\bar{B}(r,t) \simeq -\frac{\mu}{4\pi}\,\hat{n}\times\frac{1}{r}\int d\bar{r}'\,\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}\bar{J}(\bar{r}',t_r)$$

$$\bar{E}(r,t) \simeq \frac{\hat{n}}{u}\,\frac{1}{4\pi\epsilon r}\int d\bar{r}'\,\frac{\partial}{\partial t}\rho(\bar{r}',t_r) - \frac{\mu}{4\pi r}\int d\bar{r}'\,\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}\bar{J}(\bar{r}',t_r)$$

Notum samfelldnijöfnuna

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\bar{r}',t_r) = -\bar{\nabla}'\cdot\bar{J}(\bar{r}',t_r) + \frac{\hat{n}}{u}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\bar{J}(\bar{r}',t_r)$$

$\bar{\nabla}'$ verkar líka á t_r með

$$\bar{\nabla}' t_r = \frac{\hat{n}}{u}$$

$\int d\bar{r}'\,\bar{\nabla}'\cdot\bar{J} = 0$

fyrir takmarkaða kerfið

notum síðan fyrir almennan vigur $\bar{F}$

$$\hat{n}(\hat{u}\cdot\bar{F}) - \bar{F} = \hat{n}\times(\hat{u}\times\bar{F})$$

Til þess að fá

$$\bar{E}(\bar{r},t) = u\hat{n} \times \left\{ \frac{\mu}{4\pi}\, \hat{n} \times \frac{1}{r} \int d\bar{r}'\, \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \bar{J}(\bar{r}',t_r) \right\}$$

$$= -u\hat{n} \times \bar{B}(\bar{r},t) \qquad \left(\bar{B} = \frac{1}{u}\hat{n} \times \bar{E} \right)$$

Sviðin eru hornrétt og $E^2 = B^2 u^2$

Orkuflæðið á flatar og tíma einingu er

$$S = \bar{E} \times \bar{H} = \frac{1}{\mu} \bar{E} \times \bar{B}$$

!

$$\bar{S} = \frac{1}{\mu} \bar{E} \times \bar{B}$$

Því er flæðið burt frá uppsprettu

$$\hat{n} \cdot \bar{S} = \frac{1}{\mu} (\hat{n} \times \bar{E}) \cdot \bar{B} = \frac{uB^2}{\mu} = \frac{\mu}{(4\pi r)^2 u} \left\{ \hat{n} \times \int d\bar{r}' \frac{\partial}{\partial t} \bar{J}(\bar{r}',t_r) \right\}^2$$

Við höfum meiri áhuga á geisluninni inn í rúmhornið

$$d\Omega = \frac{ds}{r^2}$$

Það er óháð fjarlægð frá uppsprettu

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu}{(4\pi)^2 c}\left[\hat{n} \times \int d\bar{r}' \frac{\partial}{\partial t}\bar{J}(\bar{r}', t_r)\right]^2 \qquad (*)$$

og heildaraflið er

$$P = \int d\Omega \left(\frac{dP}{d\Omega}\right)$$

Þetta endanlega orkuflæði í mikilli fjarlægð er vegna $\frac{1}{r}$-hegðunar sviðanna (fjarsviðanna)

↑ sameiginleg öllum geislunarsviðum

Geislun frá hröðuðri eind

Eind með hleðslu e, og hraða $|\bar{v}| \ll u$ (c)

Straumþéttleikinn er

Staðsetning eindar á tíma t'

$$\bar{J}(\bar{r}', t') = e\,\bar{v}(t')\,\delta(\bar{r}' - \bar{R}(t'))$$

Þá er seinkaði tíminn

$$t_r = t - \frac{r}{u} + \frac{1}{u}\hat{n}\cdot\bar{R}(t') \simeq t - \frac{r}{u} \equiv t_e \qquad \frac{v}{u} \ll 1$$

$$\int d\bar{r}'\,\frac{\partial}{\partial t}\bar{J}(\bar{r}', t_r) \approx \frac{d}{dt}\int d\bar{r}'\,\bar{J}(\bar{r}', t_e) = e\,\frac{d\bar{v}}{dt_e}(t_e)$$

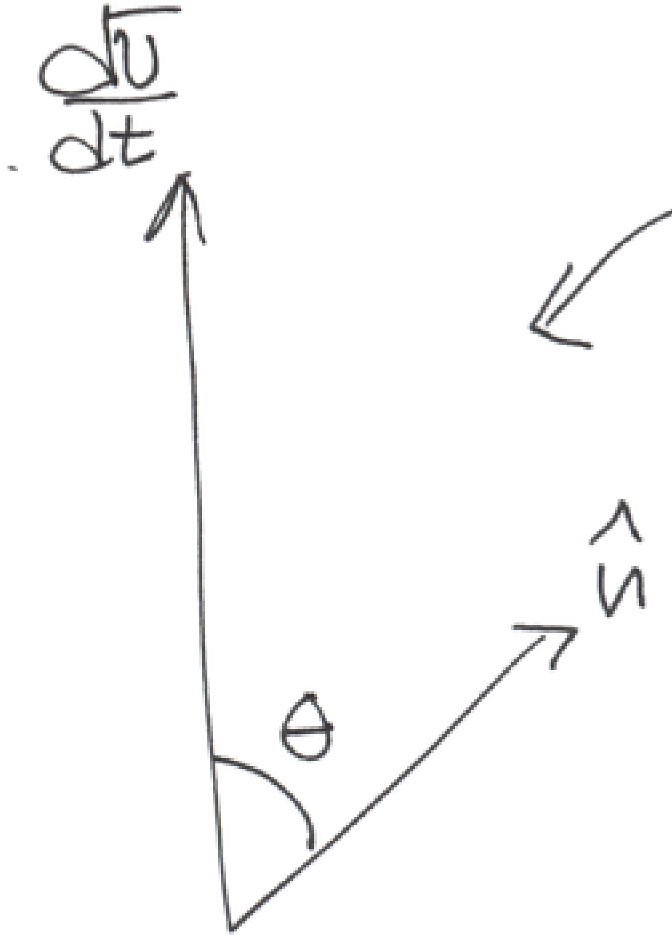
Sem sýnir að eindin geislar þegar henni er hraðað

$|\bar{R}(t')|$ er takmarkað af $v\cdot\tau$ þ.s. τ er náttúrulegur tíma skali fyrir kerfið

Notum þessa niðurstöðu í (*) t.þ.a. kanna hvernig geislunin dreifist

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{(\mu e)^2}{(4\pi)^2 u\mu}\left(\hat{n}\times\frac{d\bar{v}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\mu e}{4\pi}\right)^2\frac{1}{\mu u}\underbrace{\left\{\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)^2 - \left(\hat{n}\cdot\frac{d\bar{v}}{dt}\right)^2\right\}}_{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2(1-\cos^2\theta)}$$

$$= \left(\frac{\mu e}{4\pi}\right)^2\frac{1}{u\mu}\left(\frac{d\bar{v}(t_e)}{dt_e}\right)^2 \sin^2\theta$$



θ er hornið milli hröðunarinnar og geislunarstefnunnar

Engin geislun í átt hröðunar

Notum $\displaystyle\int \frac{d\Omega}{4\pi} \sin^2\theta = \frac{2}{3}$

til að fá jöfnu **Larmors** fyrir heildar geislun afli eindar

$$\boxed{P = \frac{2}{3}\frac{\mu e^2}{4\pi u}\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)^2}$$

þ. $v \ll u$

$$\boxed{P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon u^3}\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)^2}$$

$u^2 = \frac{1}{\epsilon\mu}$

Þegar tillit er tekið til afstæðiskenninga breytist geislunin „fram á við“ með vaxandi hraða eindarinnar.