Aðeins um kvarða

Við útleiðslu á bylgjujöfnunum

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A} = -\mu \bar{J}$$

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2} V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

notuðum við Lorentz-kvarðann

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{A} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t}V = 0$$

Enn er þó frelsi eftir, því breytingin

$$\bar{A} \to \bar{A} + \bar{\nabla}\Lambda$$

$$V \to V - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda$$

með

$$\nabla^2\Lambda - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda = 0$$

breytir ekki Lorentz-kvarðanum

Eins hefðum við getað valið Coulomb-kvarðann í ~~stað~~ Lorentz-kvarðans

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{A} = 0$$

þá fengjust jöfnurnar

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 V &= -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2\bar{A} - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A} &= -\mu\bar{J} + \mu\epsilon\bar{\nabla}\frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned}}$$

Poisson jafnan fyrir V!
Til viðbótar má finna að aðeins $\bar{J}_t$ skiptir máli í seinni jöfnunni og svið án seinkunar styttast út. Mikið notað...

Lotubundin svið í tíma

Maxwell jöfnurnar eru línulegar

→ Lotubundnar sveiflur í uppsprettum leiða til sviða með sömu lotu þegar stöðug ástönd eru stödd

→ fourier greining (raðir eða umformun) leyfir okkur að fjalla um almenna tímaþróun

Notum fasora táknun.
Ef rafsvið er tímaháð með $\cos(\omega t)$ þá verður notað

$$\bar{E}(\bar{x},t) = \Re\left[\bar{E}(\bar{x})e^{i\omega t}\right]$$

þ.s. $\bar{x} = (x,y,z)$ t.d.

því er greinilegt að

$\frac{\partial}{\partial t}\bar{E}(\bar{x},t)$ mun verða

táknað með $i\omega\bar{E}(\bar{x})$

þátturinn $e^{i\omega t}$ mun styttast út úr jöfnunum

tímaháðrunarsamhverfa

Jöfnur Maxwells verða

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\nabla}\times\bar{E} &= -i\omega\mu\bar{H} \\ \bar{\nabla}\times\bar{H} &= \bar{J} + i\omega\epsilon\bar{E} \\ \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon}\ , &\quad \bar{\nabla}\cdot\bar{H} = 0 \end{aligned}}$$

Bylgjujöfnurnar verða

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 V + k^2 V &= -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2\bar{A} + k^2\bar{A} &= -\mu\bar{J} \\ k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} &= \frac{\omega}{u} \end{aligned}}$$

Í einsleitu rúmi var lausnin áður

$$V(R,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'} \frac{\rho\left(t-\frac{R}{u}\right)}{R}\,dv'$$

Ef $\rho(R,t) = \Re e\left[\rho(R)e^{i\omega t}\right]$

þá fæst fyrir seinkaða sviðið

$$\rho\left(R,t-\frac{R}{u}\right) = \Re e\left[\rho(R)e^{i\omega\left(t-\frac{R}{u}\right)}\right]$$

og þar sem $k = \frac{\omega}{u}$ fæst

$$\rho\left(R,t-\frac{R}{u}\right) = \Re e\left[\rho(R)e^{i\omega t}e^{-ikR}\right]$$

þvi verða lausnirnar táknaðar með fasorum

$$\boxed{V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'} \frac{\rho e^{-ikR}}{R}\,dv'}$$

$$\boxed{A(R) = \frac{\mu}{4\pi\epsilon}\int_{V'} \frac{\bar{J} e^{-ikR}}{R}\,dv'}$$

Hér er gott að muna að $R = |\bar{x} - \bar{x}'|$ (þ.s. $\bar{x}$ er athugunar-punktur og $\bar{x}'$ er uppsprettu-punktur

Bylgjulengdin $\lambda = \frac{u}{f}$ getur verið mjög mism. m.v. R í okkar dæmum

$$k = \frac{2\pi f}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Almennt er

$$e^{-ikR} = 1 - ikR + \frac{k^2R^2}{2} + \cdots\cdots$$

þá fæst ef $kR \ll 1$

$$e^{-ikR} \approx 1$$

að fasor-lausnirnar líkjast tímaóháðu lausnunum

Langbylgjunálgun ....

eða

Nær-lausn ....

Sviðum án uppsprettna

má lýsa með

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = -i\omega\mu\bar{H}$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{H} = i\omega\epsilon\bar{E}$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0,\quad \bar{\nabla}\cdot\bar{H} = 0$$

Athugum

$$\bar{E} = \frac{1}{i\omega\epsilon}\bar{\nabla}\times\bar{H}$$

notum í 1. jöfnunni

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = \frac{1}{i\omega\epsilon}\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{H}$$

$$= -i\omega\mu\bar{H}$$

Eða

$$\frac{1}{i\omega\epsilon}\left\{\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{H}) - \nabla^2 H\right\} = -i\omega\mu\bar{H}$$

$$-\nabla^2 H = \omega^2\epsilon\mu\bar{H}$$

eða

$$\boxed{\nabla^2\bar{H} + k^2\bar{H} = 0}$$

því $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$

Á svipaðan hátt fæst

$$\boxed{\nabla^2\bar{E} + k^2\bar{E} = 0}$$

Óhliðraðar Helmholtz jöfnur fyrir vigursviðin $\bar{H}$ og $\bar{E}$

Skoðum aftur

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} + i\omega\epsilon\bar{E}$$

Ef einsleita efnið er leiðandi þá gildir

$$\bar{J} = \sigma\bar{E}$$

og jafnan verður

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = (\sigma + i\omega\epsilon)\bar{E}$$

$$= i\omega\left(\epsilon + \frac{\sigma}{i\omega}\right)\bar{E}$$

$$= i\omega\left(\epsilon - i\frac{\sigma}{\omega}\right)\bar{E}$$

$$= i\omega\,\epsilon_c\bar{E}$$

þar sem ϵ_c er tvinngildur rafsvörunarstuðull

$$\epsilon_c = \epsilon' - i\epsilon''$$

með

$$\epsilon' = \epsilon$$

$$\epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}$$

ϵ'' lýsir sveiflum úr fasa við uppsprettur. Úr fasa vegna viðnámskrafta, dofnunar...

orkutap

Taphornið δ_c er

$$\tan\delta_c = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \simeq \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$$

Góður leiðari

$\sigma \gg \omega\epsilon$

Góður einangrari

$\omega\epsilon \gg \sigma$

því getur leiðari verið góður við lága tíðni en leiðnin versnar við hækkandi tíðni

Almennt eru ϵ' og ϵ'' líka föll af ω

lesa sjálf um rafsegulrófið í enda 7. kafla

Skoða λ-skala og orkuskala

$hf = \hbar\omega$ og bera saman

við $k_B T \approx 25$ meV

fyrir herbergishita

Flatarbylgjur

Á svæði án hleðslu eða strauma fékkst

$$\nabla^2 \bar{E} + k_0^2 \bar{E} = 0$$

og samskonar fyrir $\bar{H}$.

k_0 er bylgjutalan í tómarúmi

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c}$$

Í kartískum hnitum er jafnan

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2\right) E_x = 0$$

fyrir hnitið E_x

Hugsum okkur bylgju með einsleitu E_x á sléttum þvert á z

$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_x = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_x = 0$$

og jafnan verður

$$\frac{d^2}{dz^2} E_x + k_0^2 E_x = 0$$

Lausnir

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-ik_0 z} + E_0^- e^{ik_0 z}$$

fastar, almennir

Athugum fasorinn

$$E_0^+ e^{-ik_0 z}$$

Hvað gefur hann í tíma

$$E_x^+(z,t) = \Re\left[E_x^+ e^{i(\omega t - k_0 z)}\right]$$

$$= E_0^+ \cos(\omega t - k_0 z)$$

Bylgja sem ferðast. Festum fasann

$$\omega t - k_0 z = \text{fastur fasi}$$

og könnum fasahraðann

$$u_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$$

k_0 tengist λ_0

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}}$$

Hinn fasorinn E_x^- gefur bylgju sem ferðast í $-z$-stefnu með sama fasahraða

Ef við þurfum aðeins bylgju í z-stefnu

$$E_0^- = 0$$

Með þessu rafsviði fylgir segulsvið

$$\overline{\nabla} \times \overline{E} = -i\omega\mu_0 \overline{H}$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{E} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x^+(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -i\omega\mu_0\left(\hat{a}_x H_x^+ + \hat{a}_y H_y^+ + \hat{a}_z H_z^+\right)$$

$$\rightarrow \quad H_x^+ = 0$$

$$H_y^+ = \frac{1}{-i\omega\mu_0} \frac{\partial E_x^+(z)}{\partial z}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial E_x^+(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(E_0^+ e^{-ik_0 z}\right)$$

$$= -ik_0 E_x^+(z)$$

$$H_z^+ = 0$$

$$\rightarrow \quad H_y^+ = \frac{k_0}{\omega\mu_0} E_x^+(z)$$

$$= \frac{1}{\eta_0} E_x^+(z)$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \simeq 377\ \Omega$$

eigið samviðnám tómsins

$\eta_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \bar{E}$ og $\bar{B}$ hafa

sama fasa

$$\bar{H}(z,t) = \hat{a}_y H_y^+(z,t)$$

$$= \hat{a}_y \,\mathrm{Re}\left[H_y^+(z) e^{i\omega t}\right]$$

$$= \hat{a}_y \frac{E_0^+}{\eta_0} \cos(\omega t - k_0 z)$$

$\bar{E}$ og $\bar{H}$ eru hornrétt og

líka á útbreiðslustefnuna $\hat{a}_z$