1

Jafna Laplace í sívalningshnitum (r, ϕ, z)

$$\nabla^2 V = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Í bókinni er aðeins fjallað um sívalnings verkefni sem eru meir á lengdina en breiddina

$$\longrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Gerum ráð fyrir að hægt sé að aðgreina breytistærðir þ.a.

$$V(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$$

Innsetning gefur

$$\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{dR(r)}{dr}\right\} + \frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = 0$$

því verður að gilda

$$\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{dR(r)}{dr}\right\} = k^2 \quad \text{og} \quad \frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = -k^2$$

Fyrir hornið ϕ fæst því

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} + k^2\Phi(\phi) = 0$$

$\Phi(\phi)$ verður að vera lotubundin, $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi n)$

k verður að vera heiltala

$$\rightarrow \Phi(\phi) = A_\phi \sin(n\phi) + B_\phi \cos(n\phi)$$

Jafna útþáttar er þá

$$r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2} + r\frac{dR(r)}{dr} - n^2R(r) = 0$$

Lausn þessarar jöfnu er

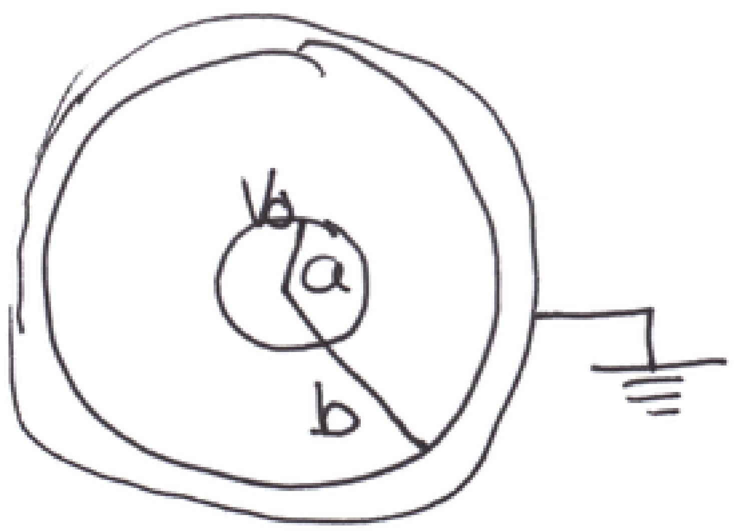
$$R(r) = A_r r^n + B_r r^{-n}$$

Heildarlausnin (á svæði með $0 \leq \phi \leq 2\pi$) er því

$$V_n(r,\phi) = r^n \left\{ A_n \sin(n\phi) + B_n \cos(n\phi) \right\} + r^{-n} \left\{ A_n' \sin(n\phi) + B_n' \cos(n\phi) \right\}$$

Dæmi

samása kapall



Jaðarskilyrði

$V(b) = 0$

$V(a) = V_0$

Ekkert í uppsetningunni breytir hornsamhverfu $\longrightarrow n = 0$

Þegar $n=0$ er jafna útþáttar

$$\frac{d}{dr}\left\{ r \frac{dR(r)}{dr} \right\} = 0$$

sem leiðir til

$$R(r) = C_1 \ln r + C_2$$

Jaðargildin leiða til

$$\left.\begin{aligned} C_1 \ln b + C_2 &= V(b) = 0 \\ C_1 \ln a + C_2 &= V(a) = V_0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C_1 &= -\frac{V_0}{\ln(b/a)} \\ C_2 &= \frac{V_0 \ln b}{\ln(b/a)} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{V(r) = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \ln\left(\frac{b}{r}\right)}$$

Jafna Laplace í kúluhnitum

Í bókinni er einungis fjallað um verkefni í kúluhnitum sem hafa ϕ samhverfu, jafnan er þá

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)=0$$

og lausnin er aðgreind í tvo þætti

$$V(R,\theta)=\Gamma(R)\Theta(\theta)$$

Innsetning gefur

$$\underbrace{\frac{1}{\Gamma(R)}\frac{d}{dR}\left\{R^2\frac{d\Gamma(R)}{dR}\right\}}_{R\text{-hluti}}+\underbrace{\frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right\}}_{\theta\text{-hluti}}=0$$

R-hlutinn og Θ-hlutinn verða að vera óháðir

$$\frac{1}{\Gamma(R)}\frac{d}{dR}\left\{R^2\frac{d\Gamma(R)}{dR}\right\} = k^2$$

það samanl. verður að koma út 0

og

$$\frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right\} = -k^2$$

Útþáttunin umformast í

$$R^2\frac{d^2\Gamma(R)}{dR^2} + 2R\frac{d\Gamma(R)}{dR} - k^2\Gamma(R) = 0$$

með lausn

$$\Gamma_n(R) = A_n R^n + B R^{-(n+1)}$$

og $\quad n(n+1) = k^2 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Θ - hlutinn verður þá

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right\} + n(n+1)\Theta(\theta)\sin\theta = 0$$

sem er þekkt sem afleiðujafna Legendre og hefur lausn

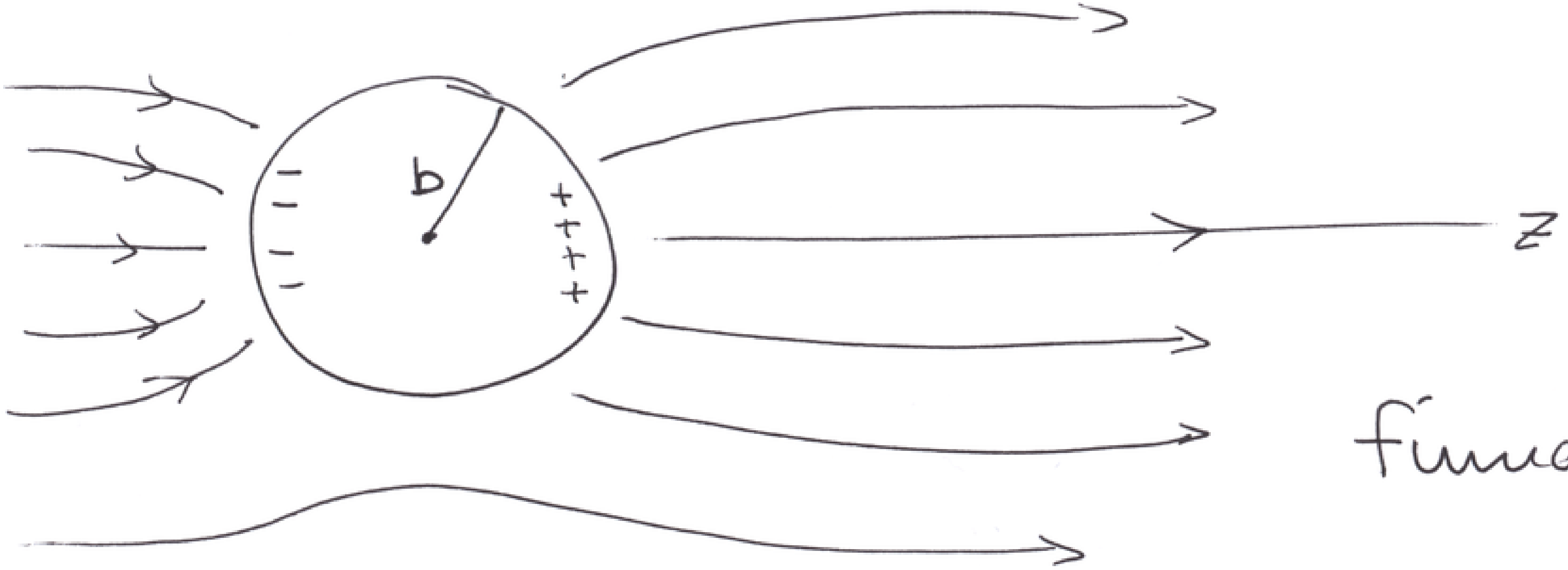
$$\Theta_n(\theta) = P_n(\cos\theta)$$

P_n er fleirliða Legendre. (Til eru einnig föll Legendre....)
P_n hefur enga sérstöðup. í $\theta = 0, \pi$ eins og hin lausnin $Q_n(\cos\theta)$
Samantekin er lausnin því

$$V_n(R,\theta) = \left\{A_n R^n + B R^{-(n+1)}\right\} P_n(\cos\theta)$$

Dæmi

Leiðandi kúla í föstu rafsviði



Við búumst við að á kúlunni skautist yfir borðshleðsla

finna $V(R,\theta)$ og $\bar{E}(R,\theta)$

Í upphafi er rafsviðið $\bar{E}_0 = \hat{a}_z E_0$ áður en kúlunni er komið fyrir.

Jaðarskilyrði

$$V(b,\theta) = 0 \quad (1)$$

$$V(R,\theta) = -E_0 z = -E_0 R\cos\theta \quad (2)$$

þ. $R >> b$

Almenna lausnin er

$$V(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n R^n + B_n R^{-(n+1)} \right\} P_n(\cos\theta), \quad R \geq b$$

Jaðarskilyrði ② gefur $A_n = 0$ ef $n \neq 1$, $A_1 = -E_0$
vitum $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

$$\rightarrow V(R,\theta) = -E_0 R \cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

fyrsti liðurinn í summunni $n=0$ á einungis við hlaðna kúlu $\rightarrow B_0 = 0$

$$V(R,\theta) = \left(\frac{B_1}{R^2} - E_0 R \right) \cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

Reynum jaðarskilyrði 1, $V(b,\theta)=0$

$$\rightarrow \left(\frac{B_1}{b^2} - E_0 b\right)\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n b^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) = 0$$

Sem verður aðeins uppfyllt með

$$B_1 = E_0 b^3 \quad \text{og} \quad B_n = 0 \text{ f. } n \geq 2$$

$$\rightarrow \boxed{V(R,\theta) = -E_0\left\{1 - \left(\frac{b}{R}\right)^3\right\} R\cos\theta \,,} \quad R \geq b$$

ytrasviðið

tvískautsþáttur

Rotsvaret

$$\bar{E}(R,\theta) = -\hat{a}_R \frac{\partial V}{\partial R} - \hat{a}_\theta \frac{\partial}{R\partial\theta} V$$

$$= +\hat{a}_R \left\{ E_0 \left[1 + 2\left(\frac{b}{R}\right)^3 \right] \cos\theta \right\}$$

$$- \hat{a}_\theta \left\{ E_0 \left[1 - \left(\frac{b}{R}\right)^3 \right] \sin\theta \right\} \qquad R \geq b$$

og ladningstettleiken

$$\rho_s(\theta) = \epsilon_0 E_R(b,\theta) = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta$$

tvipolsdreiing

Ef ekki er gert ráð fyrir ϕ-samhverfu í kúluhnitum verða hornþáttur lausnar kúluföll

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\phi}$$

þ.s.

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

og

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\; Y^*_{l'm'}(\theta,\phi)\, Y_{lm}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{m'm}$$

Kúluföllin eru hornrétt. Og liðunin

$$r_< = \begin{cases} r' & \text{ef } r'<r \\ r & r<r' \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1}\left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\right) Y^*_{lm}(\theta',\phi')\, Y_{lm}(\theta,\phi)}$$

er notuð til að ráða við heildun með $\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$

Í sívalningshnitum er til slíkt liðun

$$\boxed{\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty dk\, e^{im(\phi-\phi')} J_m(kr) J_m(k\rho') e^{-k(z_>-z_<)}}$$

í Besselföllum og einfaldari

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \int_0^\infty e^{-k|z|} J_0(kr)\, dk$$

$\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$ er Greenfallið fyrir Poisson jöfnuna í óendanlegu einsleitu rúmi og heildi eins og

$$V(\bar{x}) = \int d\bar{x}' \frac{\rho(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$$

eru leyst oft með þessum liðunum