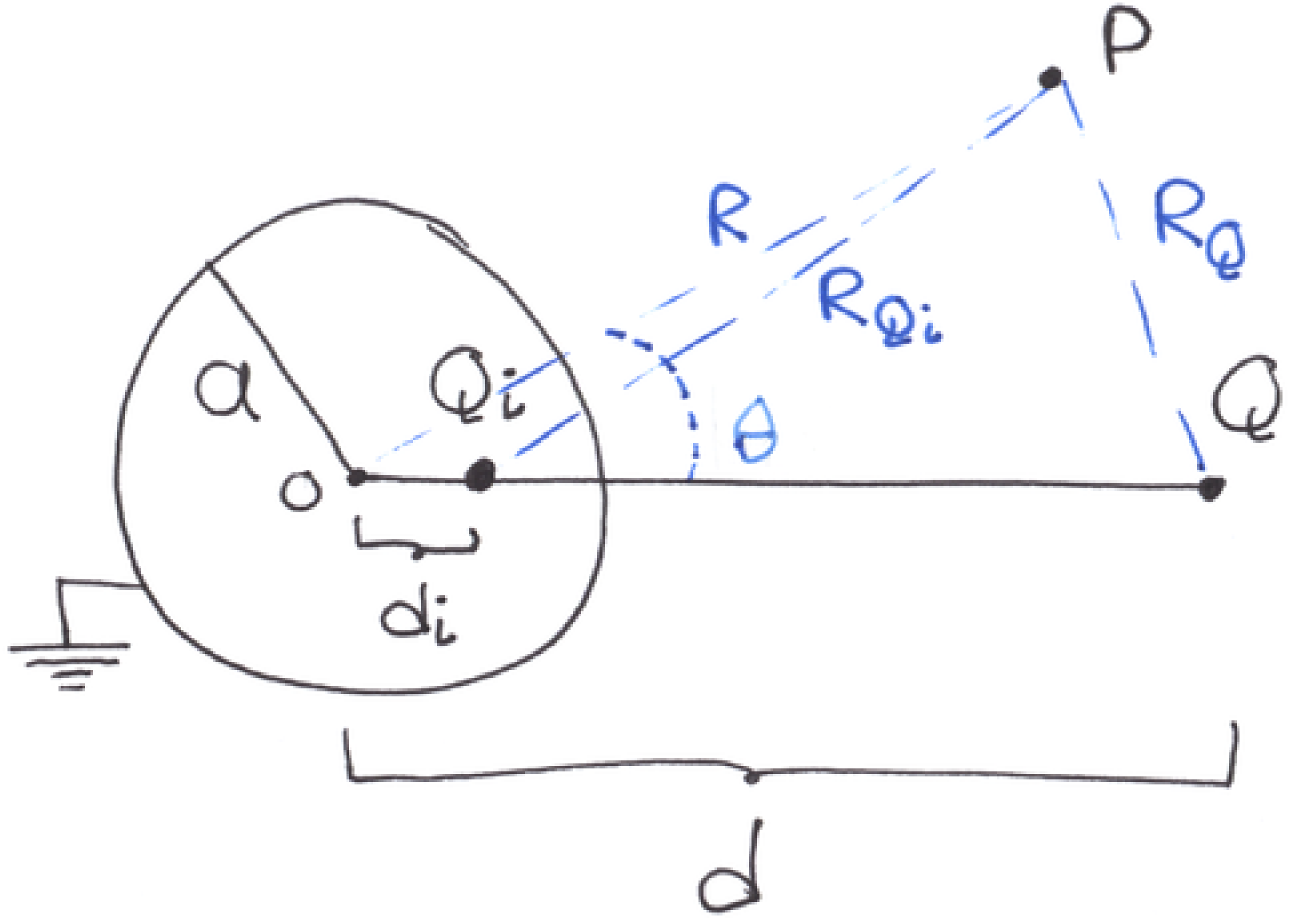
Spegilhleðslur fyrir kúluyfirborð



Hér gildir

$$\boxed{\begin{aligned} Q_i &= -\frac{a}{d}Q \\ d_i &= \frac{a^2}{d} \end{aligned}}$$

spegilhleðslan er ekki sömu stærðar og upprunalega hleðslan

Dæmi: Reikna yfirborðshleðsluþéttleikann og heildar yfirborðshleðsluna

$$V(R,\varphi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_Q} - \frac{a}{d \cdot R_{Q_i}}\right)$$

$$R_Q = \left[R^2 + d^2 - 2Rd\cos\theta\right]^{1/2}, \quad R_{Q_i} = \left[R^2 + \left(\frac{a^2}{d}\right)^2 - 2\left(\frac{a^2}{d}\right)\cos\theta\right]^{1/2}$$

Jaðarskilyrði fyrir E_n við leiðara

er $$E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$$

Athugið að θ er mælt frá línunni OQ. Best er að hugsa OQ sem z-ásinn hér. θ er þá venjulega azimuthal hornið í kúluhnitum.

Fyrir kúluflötinn hér gildir

$$E_R(R,\theta)\Big|_{R=a} = E_n$$

$$\rightarrow \rho_s = \epsilon_0 E_R(a,\theta) = -\epsilon_0 \frac{\partial V(R,\theta)}{\partial R}\Big|_{R=a}$$

$$= -\frac{Q(d^2-a^2)}{4\pi a(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{3/2}}$$

$\rho_s < 0$ með max gildi fyrir $|\rho_s|$ í $\theta = 0$
og minni gildi í $\theta = \pi$ (hinumegin á kúlunni)

$$\text{Heildarhleðsla} = \oint_{\text{Kúluyfirborð}} \rho_s \, ds = a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \; \rho_s(\theta,\varphi)$$

$$= -2\pi a^2 \int_0^{\pi} \frac{Q(d^2-a^2)\sin\theta \, d\theta}{4\pi a\left(a^2+d^2-2ad\cos\theta\right)^{3/2}} = -\frac{2\pi a Q(d^2-a^2)}{4\pi} \int_{-1}^{1} \frac{du}{(a^2+d^2-2adu)^{3/2}}$$

$$= -\frac{a}{d} Q = Q_i$$

yfirborðshleðslan er jöfn spegilhleðslunni

Lausn Laplace jöfnu

Kerfi með engum hvörfum → engar spegilhvörfur mögulegar

Við skoðum „aðgreiningu breytistærða" sem er möguleg þegar „spennuflötir" falla að flötum þekkts einfallds hnitakerfis

Í Morse og Feshbach (1953) eru kynnt 9 hnitakerfi sem jafna Laplace er aðgreind í

Við skoðum 3, Kartísk-, Sívalnings- og kúluhnit

Aðgreining breytistærða er ekki alltaf möguleg, og þá eru enn til margar aðferðir

Hlutafleiðujafna + jaðarskilyrði

1. Dirichlet verkefni

   Mættið er gefið á jaðrinum

2. Neumann verkefni

   Normal afleiða mættisins er gefin á jaðrinum

3. Blandað verkefni

   Mættið er gefið á hluta jaðarins og normal afleiða þess á afganginum

Kartísk hnit

Jafna Laplace er

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) V(x,y,z) = 0$$

Gerum ráð fyrir að lausnin uppfylli

$$V(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

Innsetning gefur

$$Y(y)Z(z)\frac{d^2X(x)}{dx^2} + X(x)Z(z)\frac{d^2Y(y)}{dy} + X(x)Y(y)\frac{d^2Z(z)}{dz} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz} = 0$$

Hver liður er aðeins fall af einni breytu

Því hlýtur að gilda

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -k_x^2 \quad \text{o.s.fr. fyrir } y \text{ og } z$$

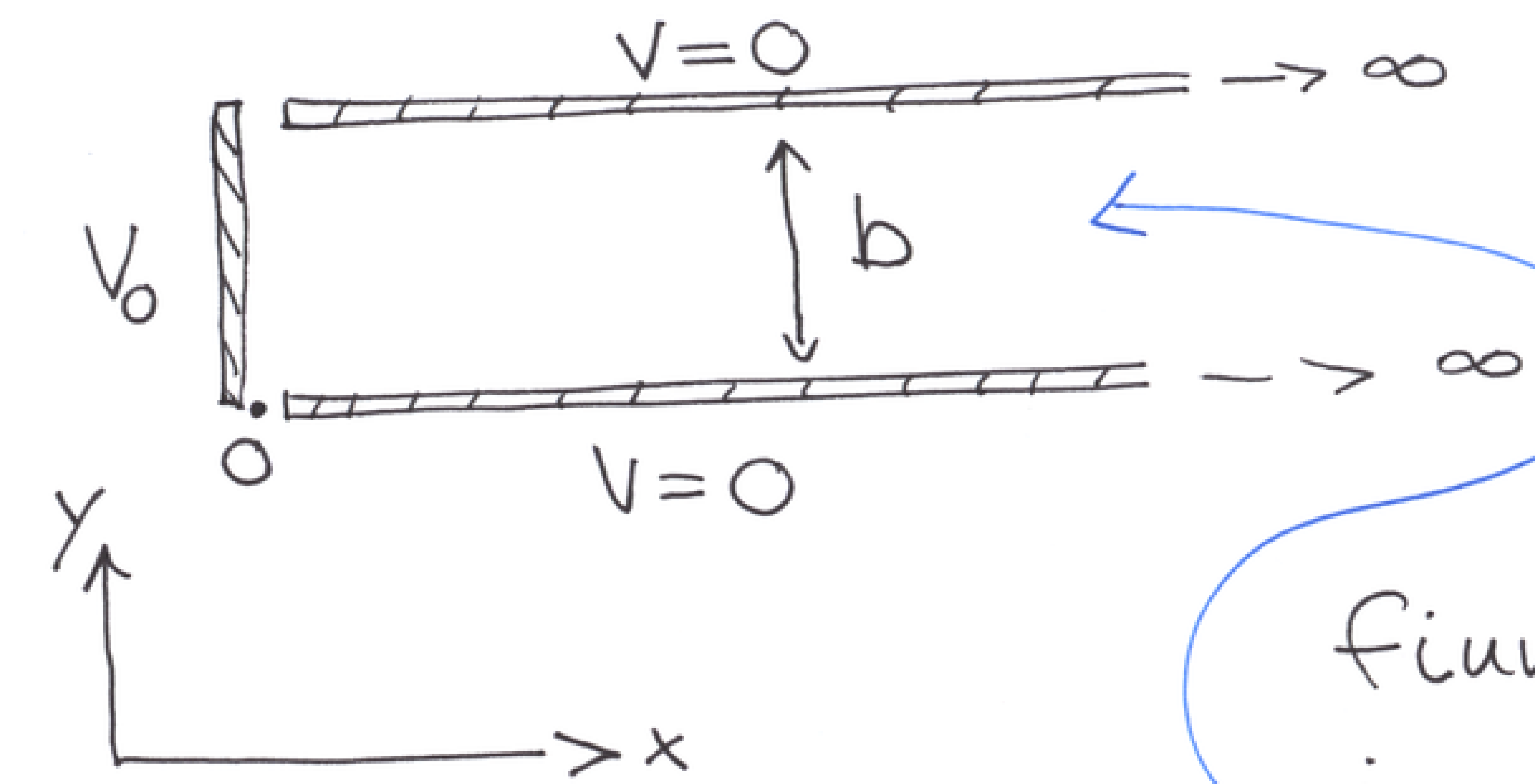
k_i – ákvarðast af jaðarskilyrðum og jafna Laplace krefst

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

Lausn $X''(x) + k_x^2 X(x) = 0$

k_x^2	k_x	$X(x)$	eða
0	0	$A_0 x + B_0$	
$+$	k	$A_1 \sin(kx) + B_1 \cos(kx)$,	$C_1 e^{ikx} + D_1 e^{-ikx}$
$-$	ik	$A_2 \sinh(kx) + B_2 \cosh(kx)$,	$C_2 e^{kx} + D_2 e^{-kx}$

Dæmi



tvær samhliða plötur
(óendanleg hálfplön)
leiðandi $V=0$

finna $V(x,y,z)$ alls staðar
innan

Ekkert háð z á jaðrinum $\rightarrow V = V(x,y)$

Jaðarskilyrði

$0 \leq y \leq b$

$$\boxed{\begin{aligned} V(0,y) &= V_0 \\ V(\infty,y) &= 0 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} V(x,0) &= 0 \\ V(x,b) &= 0 \end{aligned}}$$

$0 \leq x \leq \infty$

$$V = V(x,y) \rightarrow k_z = 0 \quad \text{og} \quad Z(z) = B_0$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 \rightarrow \underline{k_y^2 = -k_x^2 = k^2}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Í þessu vali er k_x þvertala, setjum $k_x = ik$

$\rightarrow X(x) = D_2 e^{-kx}$, vaxandi lausnin er ekki möguleg þ. $x \rightarrow \infty$

Þá er eftir

$$Y(y) = A_1 \operatorname{Sin}(ky)$$

Lausn verði því

$$V(x,y) = \underbrace{B_0 D_2 A_1}_{= C_n} e^{-kx} \operatorname{Sin} ky$$

En við verðum líka að uppfylla

$$V(x,b) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad C_n e^{-kx} \sin(kb) = 0$$

sem er aðeins mögulegt ef

$$\sin(kb) = 0 \quad \longrightarrow \quad kb = n\pi \quad \text{eða} \quad k = \frac{n\pi}{b} \,, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Lausnin er því

$$V_n(x,y) = C_n e^{-k_n x} \sin(k_n y) \,, \quad k_n = \frac{n\pi}{b}$$

Þessi lausn uppfyllir jöfnu Laplace, en ekki jaðarskilyrðið $V(0,y) = V_0$ fyrir $0 < y < b$

Jafna Laplace er línuleg hlutafleiðujafna

$\longrightarrow$ summa $V_n(x,y)$ fyrir mism. n er líka lausn

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n x} \sin(k_n y)$$

og síðasta jaðarskilyrðið er uppfyllt ef

$$V(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin k_n y = V_0 \,, \quad 0 < y < b$$

Ákvarða þarf stuðlana C_n svo þetta skilyrði verði uppfyllt. Þetta er í raun fourier röð.

Notum að föllin $\sin(k_m y)$ skilgreina fullkominn grunn á þessu bili

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n y) = V_0$$

$$\rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^b C_n \sin(k_n y)\sin(k_m y)\,dy = \int_0^b V_0 \sin(k_m y)\,dy$$

$$\rightarrow \quad \left.\begin{matrix} \frac{C_n}{2} b & \text{if } m=n \\ 0 & \text{if } m\neq n \end{matrix}\right\} = \begin{cases} \frac{2bV_0}{m\pi} & \text{if } m = 1,3,5,\cdots \\ 0 & \text{if } m = 0,2,4,\cdots \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad C_n = \begin{cases} \frac{4V_0}{n\pi} & \text{if } n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & \text{if } n = 0,2,4,\cdots \end{cases}$$

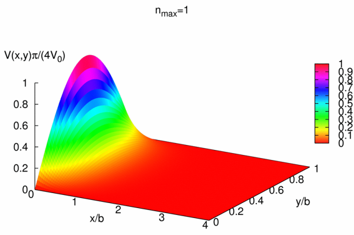
þui fást ð lokum

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-k_n x} \sin(k_n y)$$

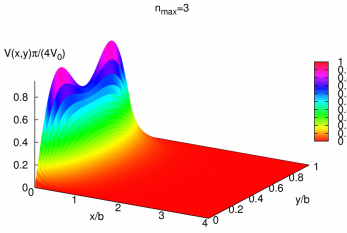
$x > 0$

$0 < y < b$

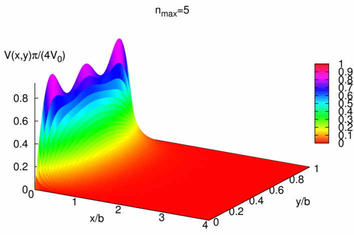
Röðin er vel samleitin og því einfallt að teikna 2D-graf af lausninni



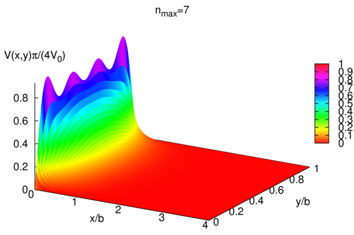
n_max=1
V(x,y)π/(4V_0)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
x/b
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
y/b
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0



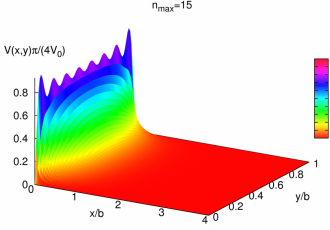
n_{max}=3
$V(x,y)\pi/(4V_0)$
0
0.2
0.4
0.6
0.8
0
1
2
3
4
x/b
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
y/b
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0



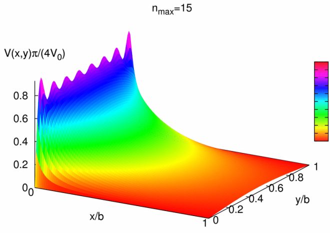
n_max=5
V(x,y)π/(4V_0)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
x/b
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
y/b
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0



n_max=7
V(x,y)π/(4V_0)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
x/b
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
y/b
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0



n_max=15
V(x,y)π/(4V_0)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
x/b
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
y/b
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0



n_max=15
V(x,y)π/(4V_0)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
x/b
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
y/b
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0