Lausn rafstöðuverkefna

Grunnjöfnur rafstöðufræðinnar í stórsæu efni eru

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{\nabla}\cdot\overline{D} &= \rho \qquad (1)\\ \overline{\nabla}\times\overline{E} &= 0 \qquad (2)\end{aligned}}$$

með jaðarskilyrðum sem við höfum rætt

Vegna (2) er hægt að finna mætti

$$\overline{E} = -\overline{\nabla} V \qquad (3)$$

Ef hægt er að skrifa

$$\overline{D} = \epsilon \overline{E} \qquad (4)$$

(ϵ má vera fall af staðarhnitum)

má setja saman (1) og (4) + (3)

þ.a.

$$\overline{\nabla}\cdot\left(\epsilon\overline{\nabla}V\right) = -\rho$$

Í efni þar sem ϵ er fasti fæst

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}} \qquad (5)$$

Jafna Poissons með Laplace virkjanum ∇^2

Í kerfi með engum frjálsum hleðslum lýsir jafna Laplace

$$\boxed{\nabla^2 V = 0} \qquad (6)$$

rafstöðumættinu V.

(5) og (6) eru hlutafleiðujöfnur fyrir „skalar" rafstöðumættið

Þegar V er fundið er einfalt að reikna rafsviðið

$$\bar{E} = -\bar{\nabla} V$$

Til eru margar aðferðir til að leysa jöfnur Poissons og Laplace

Greiniaðferðir   tölulegar

Green föll → heildisjöfnur með innbyggðum jaðarskilyrðum

fallagrunnar → eiginföll virkja Fourier, Laplace gr. .....

Net + endanlegbútun

spegilmyndir

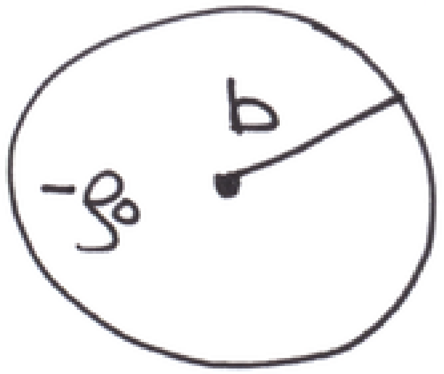
Við skoðum aðeins nokkrar einfaldar aðferðir

Lesa 4-3 í bók um einkvæmni
Lausna þessarra jafna !

Dæmi

Reikna $\bar{E}$ utan og innan hlaðinnar kúlu með geisla b og fastan hleðsluþéttleika

$$\rho = \begin{cases} -\rho_0 & R \leq b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



Innan kúlu þarf að leysa jöfnu Poissons og jöfnu Laplace utan hennar

Í kúluhnitum er virki Laplace

$$\nabla^2 = \boxed{\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R}\right)} + \frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Hleðslan hér er kúlusamhverf
-> rafstöðumættið getur ekki verið háð hornunum $\Omega = (\theta, \phi)$ því skiptir aðeins fyrsti liðurinn máli hér

Innan kúlu $R<b$, $\rho=-\rho_0$

$$\nabla^2 V_i = +\frac{\rho_0}{\epsilon}$$

eða

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dV_i}{dR}\right)=\frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dV_i}{dR}\right) = R^2\frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

heildum óákveðið

$$R^2\frac{dV_i}{dR} = \frac{1}{3}R^3\frac{\rho_0}{\epsilon_0} + C_1$$

eða

$$\frac{dV_i}{dR} = \frac{1}{3}R\frac{\rho_0}{\epsilon_0} + \frac{C_1}{R^2}$$

Rafsviðið $\overline{E}_i = -\overline{\nabla} V_i$

$$\to \overline{E}_i = -\hat{a}_R\frac{dV_i}{dR}$$

Hleðslan er jafndreifð innan kúlu (engin punkthleðsla í miðju) $\to$ $\overline{E}_i$ getur ekki haft sérstöðupunkt í $R=0$

$\to$ $C_1 = 0$

því höfum við

$$\boxed{\overline{E}_i = -\hat{a}_R\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}R \qquad R<b}$$

Ein heildun í viðbót getur

$$V_i = \frac{1}{6}R^2\frac{\rho_0}{\epsilon_0} + C_1'$$

utan kúlu $\quad R > b$

$$\nabla^2 V_o = 0$$

eða

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dV_o}{dR}\right) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dV_o}{dR}\right) = 0$$

Heildun gefur

$$R^2\frac{dV_o}{dR} = C_2$$

eða

$$\frac{dV_o}{dR} = \frac{C_2}{R^2}$$

$$\bar{E}_o = -\bar{\nabla}V_o = -\hat{a}_R\frac{dV_o}{dR}$$

$$= -\hat{a}_R\frac{C_2}{R^2}$$

með óþekktum fasta C_2!

Hér er engin yfirborðshleðsla svo rafsviðið er samfellt í $R=b$

$$|\bar{E}_i(b)| = \frac{\rho_o}{3\epsilon_o}b = \frac{C_2}{b^2} = |\bar{E}_o(b)|$$

$$\longrightarrow \quad C_2 = \frac{\rho_o b^3}{3\epsilon_o}$$

eða

$$\bar{E}_o(R) = -\hat{a}_R\frac{\rho_o b^3}{3\epsilon_o R^2}, \quad R \geq b$$

$$= +\hat{a}_R\frac{\left(\frac{4\pi}{3}b^3\rho_o\right)}{4\pi\epsilon_o R^2}$$

fyrir mættið fæst

$$V_o = -\frac{\rho_o b^3}{3\epsilon_o R} + C_2'$$

$C_2' = 0$ því $\lim_{R \to \infty} V_o(R) = 0$

Áður fengum við

$$V_i = \frac{1}{6} R^2 \frac{\rho_o}{\epsilon_o} + C_1'$$

Rafstöðumættið er samfellt í $R = b$

$$V_i(b) = \frac{\rho_o b^2}{6\epsilon_o} + C_1' = -\frac{\rho_o b^2}{3\epsilon_o} = V_o(b)$$

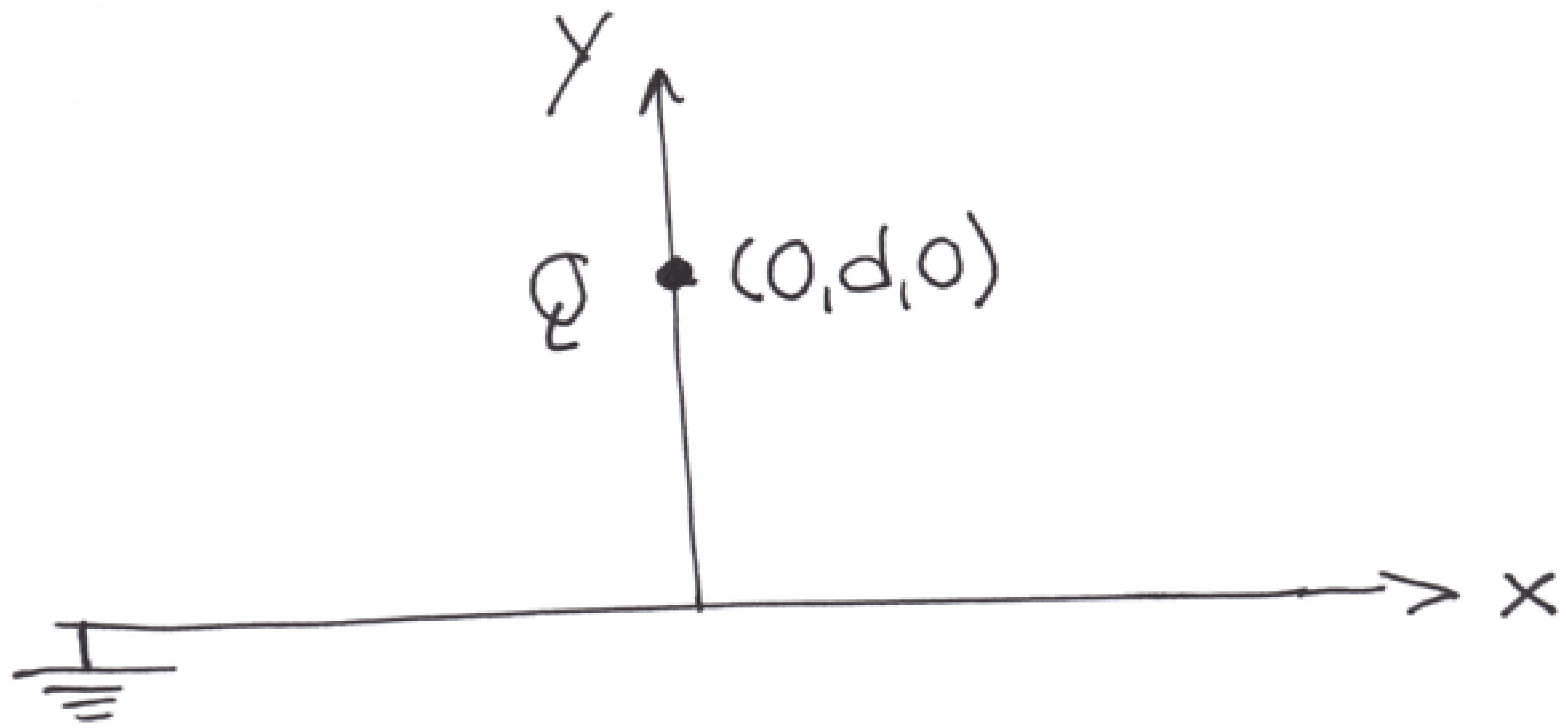
$$\rightarrow C_1' = -\frac{\rho_o b^2}{2\epsilon_o}$$

og þess vegna að lokum

$$V_i = -\frac{\rho_o}{3\epsilon_o}\left(\frac{3b^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right)$$

Aðferð spegilhleðslna

Athugum punkthleðslu Q yfir leiðandi plötu með 0-spennu



punkthleðslan leiðir til yfirborðhleðslu á leiðaranum ρ_s

$$V(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+(y-d)^2+z^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho_s}{R_1}\,ds$$

En ρ_s er óþekkt!

Við vitum

* $V(x,0,z) = 0$ (á leiðaranum)

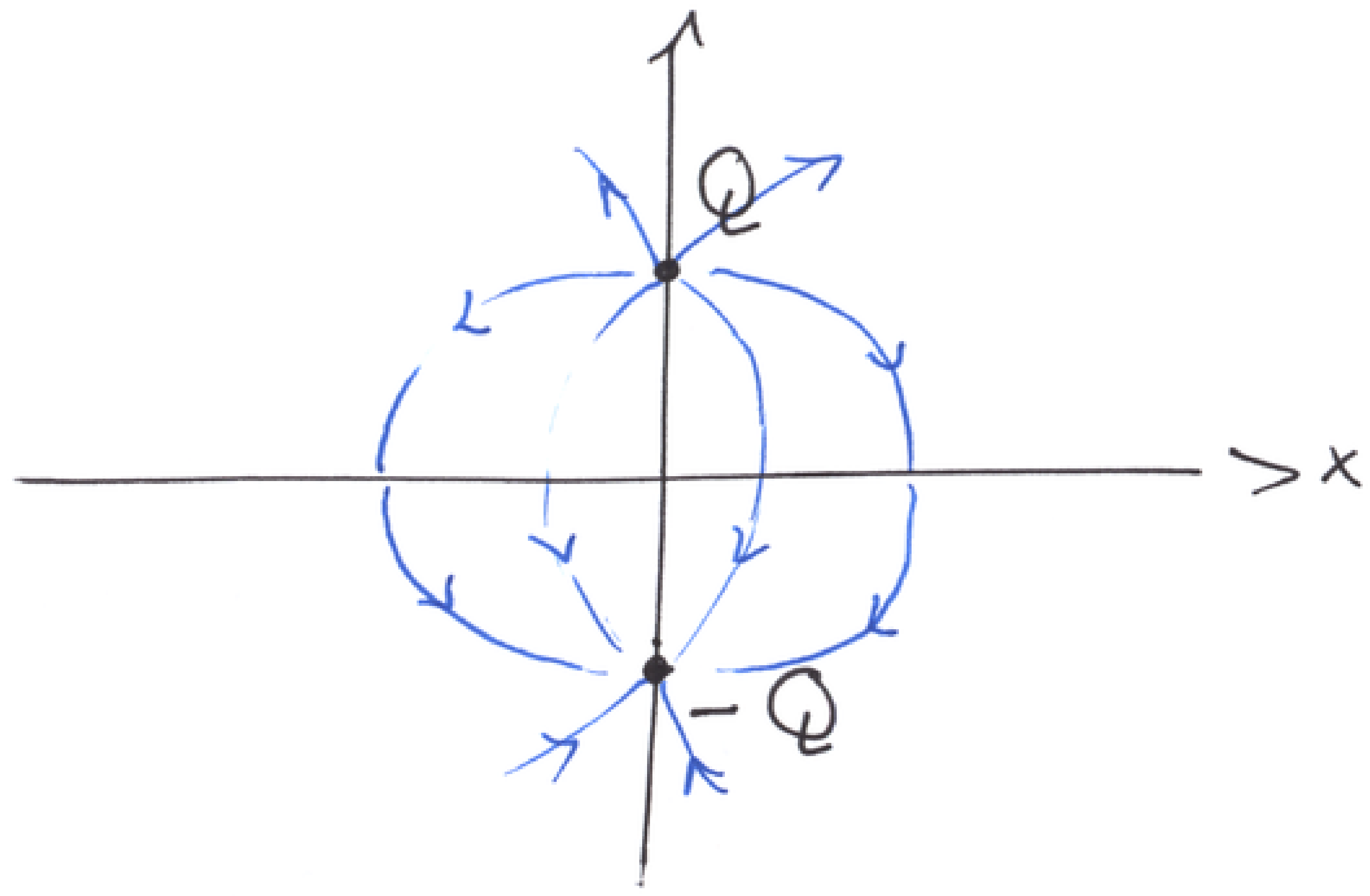
* Nærri punkthleðslunni gildir $V \to \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ þ. $R \to 0$

* fjarri Q þ. $x \to \pm\infty$, $y \to +\infty$, $z \to \pm\infty$ verður $V \to 0$

* Samhverfur

$$V(x,y,z) = V(-x,y,z)$$
$$V(x,y,z) = V(x,y,-z)$$

* Við leiðarann verður $\bar{E}$ að vera hornrétt á hann



Lausn

Kippa leiðaraplötu í burtu og bæta við spegilhleðslu

Fyrir $y > 0$

$$V(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right)$$

með

$$R_+ = \left[x^2 + (y-d)^2 + z^2\right]^{1/2}$$

$$R_- = \left[x^2 + (y+d)^2 + z^2\right]^{1/2}$$

9

Hægt er að sýna að
$V(x,y,z)$ uppfyllir
jöfnu Laplace og
öll skilyrðin sem
við nefndum

+ Einkvæmni lausna

$\downarrow$

Við höfum rétta lausn

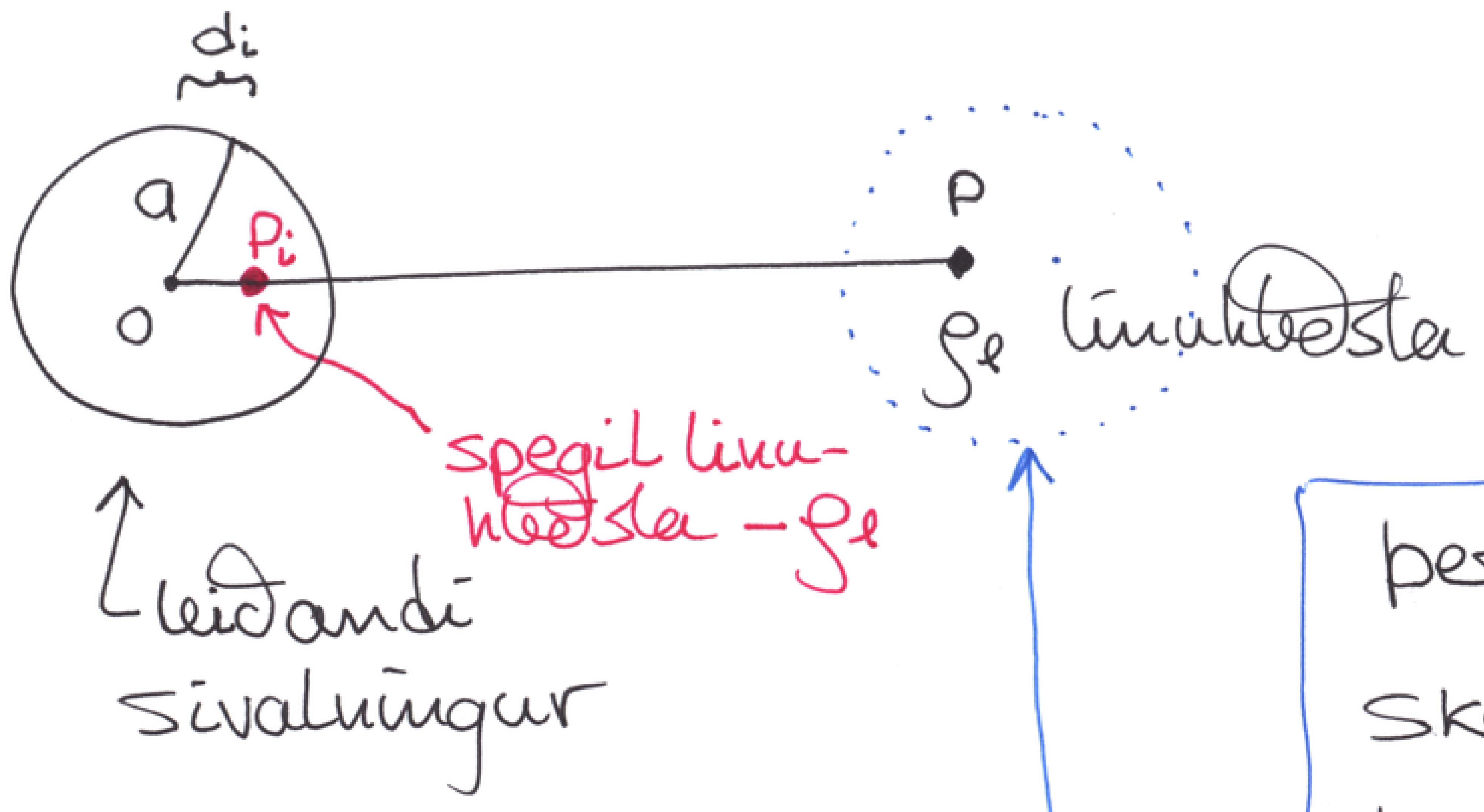
* spegil hleðslan er utan
þess svæðis sem við viljum
leysa jöfnuna á

* Nú er einfallt að reikna
$\bar{E}$ og ρ_s

* Lausnin gildir aðeins
fyrir $y>0$

yfirborðshleðslan kemst stökkis
(ósamfellu) í $\bar{E}$ í yfirborðinu,
við höfum ekki reynt að ná
því $\to$ aðeinslausn f. $y>0$

Línuhleðsla + Sívalningur



Í bók er sýnt að um spegilhleðsluna verður að gilda

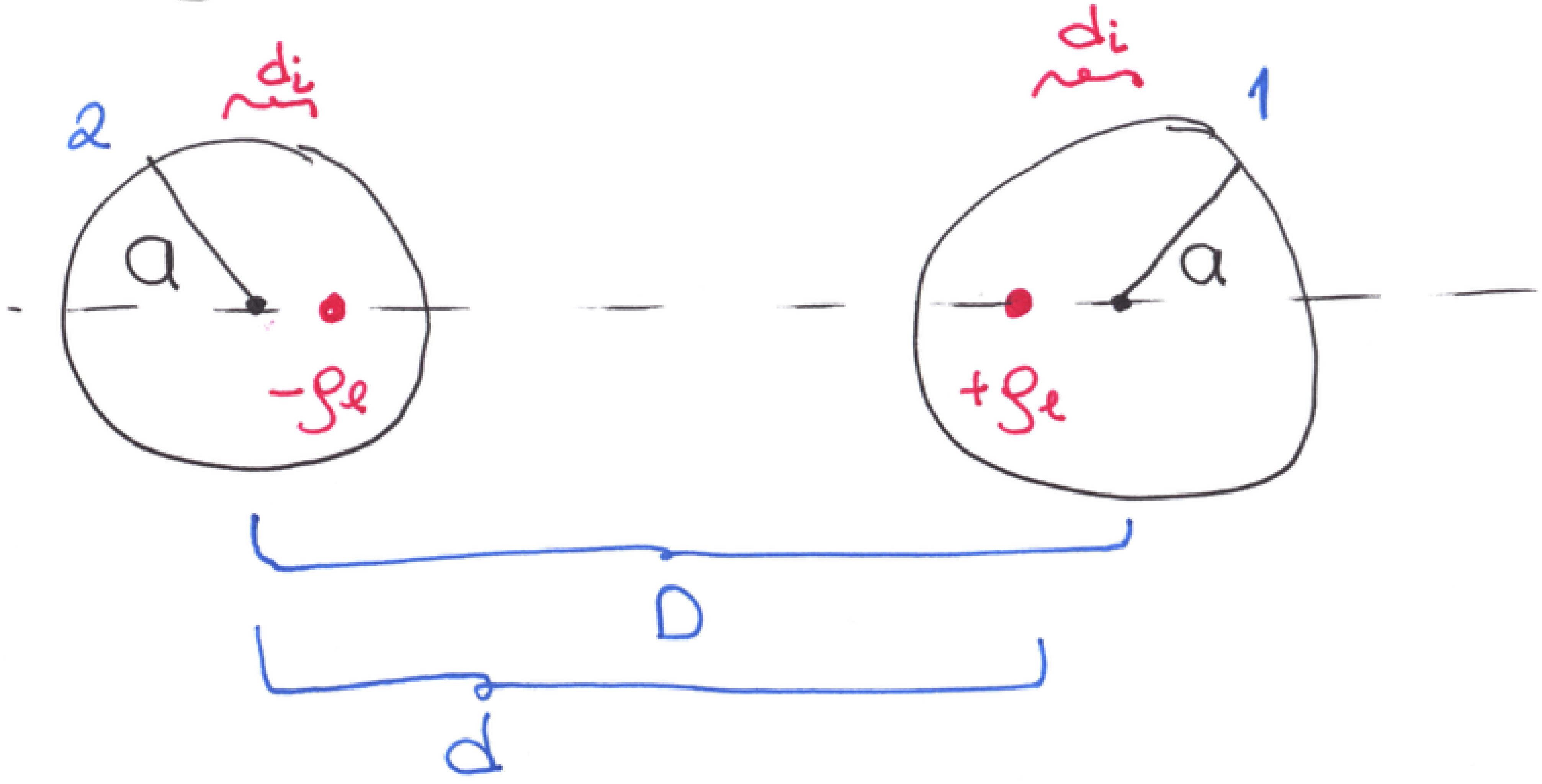
$$\boxed{\rho_i = -\rho_\ell, \quad d_i = \frac{a^2}{d}}$$

Þessi spegil línuhleðsla skapar jafnspennuflöt þar sem sívalningurinn var

\+

Einnig verður til jafnspennuflötur um ρ_ℓ með miðju hliðraða um d_i frá ρ_ℓ þá fyrir sívalning i

Því getum við skoðar tvær línur



$$V_2 = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{d}\right)$$

$$V_1 = -\frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{d}\right)$$

$\boxed{\text{leitt út á bls. 163-4}}$

Í stað jafnspennuflata leiðaranna koma spegilhleðslurnar $\pm\rho_\ell$ í fjarlægð $(D-2d_i) = (d-d_i)$ frá hvor annarri

$$a < d \;\to\; \ln\left(\frac{a}{d}\right) < 0$$

og rýmd á lengdareiningu

$$C = \frac{\rho_\ell}{V_1 - V_2} = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln(d/a)}$$

Nú gildir $d = D - d_i = D - \frac{a^2}{d}$

$$\to d = \frac{1}{2}\left(D + \sqrt{D^2 - 4a^2}\right)$$

sleppum – lausninni því $D, d \gg a$

$$\boxed{C = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln\left\{\frac{D}{2a} + \sqrt{\left(\frac{D}{2a}\right)^2 - 1}\right\}}}$$

eða

$$\boxed{C = \frac{\pi \epsilon_0}{\mathrm{Arcosh}\left(\frac{D}{2a}\right)}}$$

þ.s.

$$\mathrm{Arcosh}(x) = \ln\left\{x + \sqrt{x^2 - 1}\right\}$$