Rafsegulfræði 1

Fyrirlestrar
Dæmatímar
Viðar Guðmundsson
vidar@hi.is

Heimasíða námskeiðs

http://hartree.raunvis.hi.is/~vidar/Nam/RSF_1.php/

Heimadæmi
Tímadæmi
gilda 25% í lokaeinkunn

Bók: Field and Wave Electromagnetics
David K. Cheng, 2nd Ed.

Yfirferð heimadæma: Tómas Örn Rosdahl

Kennsluáætlun fyrir 10 fyrstu vikurnar

Kafli	Efni	Vikur
3	Rafstöðusvið	1
4	Lausnir rafst. verkefna	2
5	Sístæðir straumar	1
6	Segulstöðufr.	2
7	Tímaháð svið + Maxwell	2
8	Flatarbylgjur	2

Rafstöðufræði

Rafsvið skilgreint frá kraftsviði

$$\boxed{\bar{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\bar{F}}{q}}$$

með tilraunahleðslu q

$\downarrow$

Kraftur á hleðslu q í rafsviði $\bar{E}$

$$\boxed{\bar{F} = q\bar{E}}$$

Eiginleikar rafsviðs (rafstöðusviðs) eru skilgreindir með tveimur (Maxwells) jöfnum (í "tómarúmi")

$$\boxed{\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

hleðsluþéttleiki

rafsvörunarfasti tómarúms

$$\boxed{\bar{\nabla} \times \bar{E} = 0}$$

Hér má lesa úr jöfnunum: Rafsvið á sér uppsprettur, Rafsviðslínur í tómarúmi í rafstöðufræði eru ekki lokaðar lykkjur.

Stokes regla fyrir snúningslaust eða geymið svið og „sundurleitni reglan" gefa heildisframsetningu

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\oint_S \overline{E}\cdot d\overline{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$ Gauss

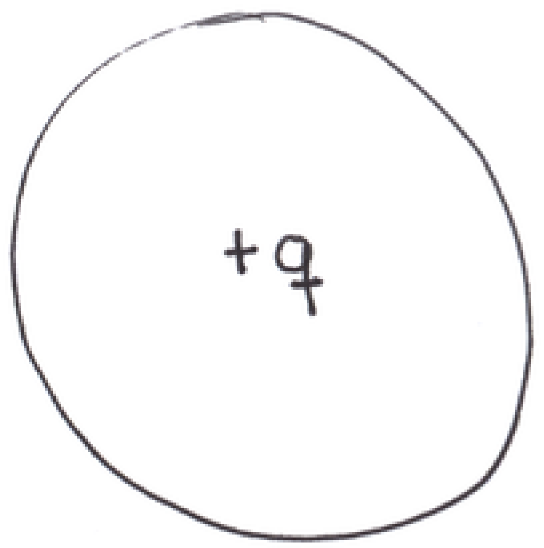
$$\overline{\nabla}\times\overline{E} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\oint_C \overline{E}\cdot d\overline{l} = 0}$$

flæði rafsviðs út um lokað yfirborð er í réttu hlutfalli við heildarhleðsluna innan þess.

Heildissvið $\longleftrightarrow$ Afleiðusvið

Coulomb

Ein jákvæð punkthleðsla



Eins átta rafsvið út úr fleti

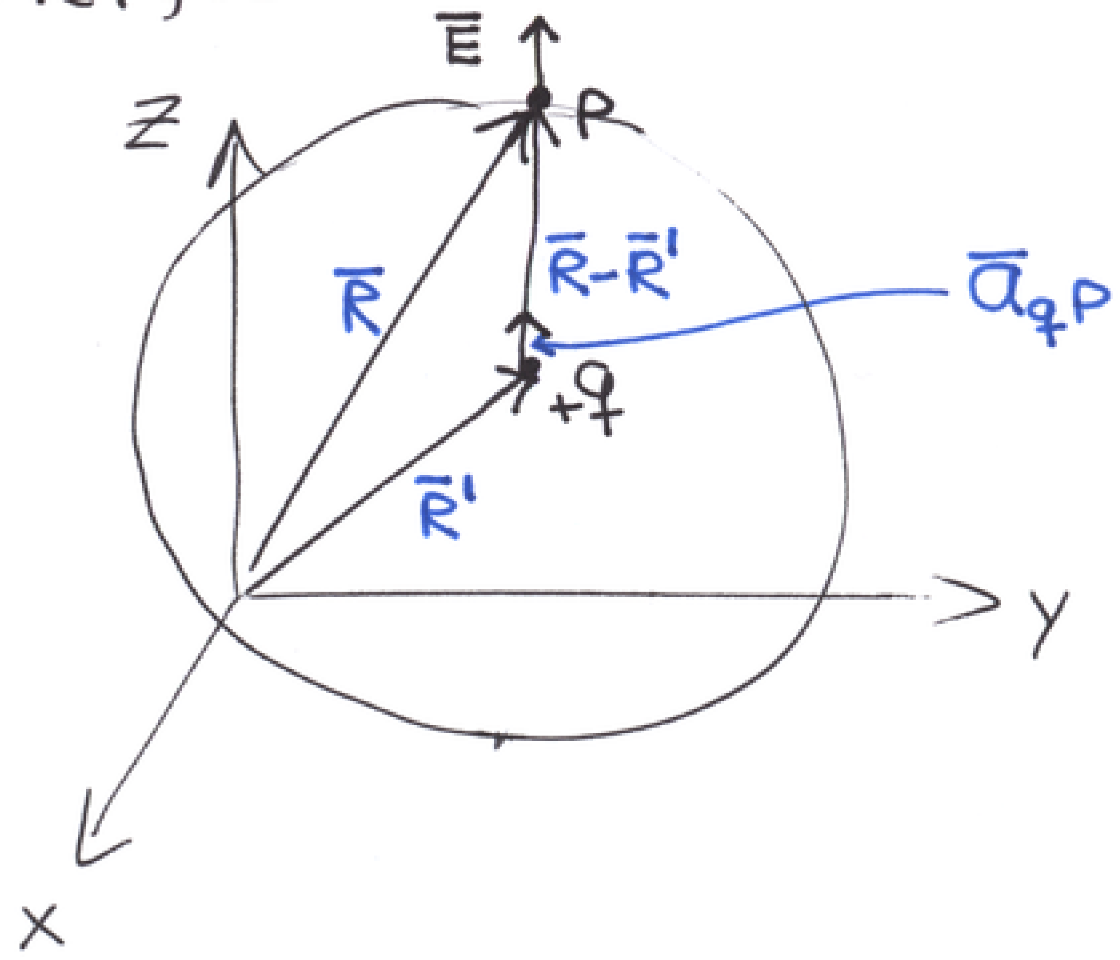
$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{s} = \oint_S (\bar{a}_R E_R)\cdot \bar{a}_R\, ds = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E_R\,(4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

E_R einsleitt á kúluyfirborðinu

$$\boxed{\bar{E} = \bar{a}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}}$$

Miðum ekki alltaf hnitakerfið við staðsetn. hleðslu



$$\bar{E}_P = \bar{a}_{qP} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}-\bar{R}'|^2}$$

$$= \bar{E}(\bar{R})$$

Einingarvigurinn er skrifanlegur sem

$$\bar{a}_{qP} = \frac{\bar{R} - \bar{R}'}{|\bar{R} - \bar{R}'|}$$

$\longrightarrow$

$$\boxed{\bar{E}_P = \bar{E}(\bar{R}) = \frac{q(\bar{R} - \bar{R}')}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R} - \bar{R}'|^3}}$$

Langseilinn rafkraftur endurspeglar:

* Ljóseind er massalaus
* Ljóseindir víxlverkast ekki innbyrðis

Rafsvið hleðslu safns

$$\bar{E}(\bar{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k(\bar{R} - \bar{R}'_k)}{|\bar{R} - \bar{R}'_k|^3}$$

n-hleðslur q_k í hnitum $\bar{R}'_k$ við reiknum rafsviðið $\bar{E}(\bar{R})$ í punkti $\bar{R}$

Samfelld hleðsludreifing

$$\bar{E}(\bar{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} dv' \, \frac{\rho(\bar{R}')(\bar{R}-\bar{R}')}{|\bar{R}-\bar{R}'|^3}$$

$\rho(\bar{R}')$: hleðsluþéttleiki

fyrir yfirborðshleðsluþéttleika $\rho_s(\bar{R})$ (eða $\sigma(\bar{R})$)
er rafsviðið

$$\bar{E}(\bar{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S'} ds' \, \frac{\rho(\bar{R}')(\bar{R}-\bar{R}')}{|\bar{R}-\bar{R}'|^3}$$

Venjulega er þægilegra að reikna fyrst rafmættið sem við athugum bráðlega.
(Athugasemd um heildun í bók)

Lögmál Gauss

$$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Heildar flæði $\bar{E}$ út um lokað yfirborð er jafnt heildar hleðslu Q innan þess margf. með $1/\epsilon_0$

lesa sjálf í bók. Ákaflega mikilvægt fyrir hleðsludreif. með háa samhverfu.

Við skoðum tvær afleiðingar

Hleðsludreifing, kúlusamhverf, $\rho(r)$

$$\rho(\bar{r}) = \begin{cases} \rho(r) & \text{ef } r \leq a_0 \\ 0 & \text{ef } r > a_0 \end{cases}$$

Athugum rafsviðið utan hleðsludreifingarinnar í fjarlægð $r > a_0$

Hleðsludreifingin er kúlusamhverf $\longrightarrow$ rafsviðið getur aðeins verið "radíalt" og fasta á kúlufleti með sömu miðju...

$$\int dv\, \rho(\bar{r}) = Q$$

Einingarvigur í "radial" eða útstefnu í bók $\hat{r} = \bar{a}_R$

$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow \quad 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow \bar{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Í þessu tilfelli er rafsviðið óháð nákvæmri dreifingu hleðslunnar. Sama rafsvið og punkthleðsla Q myndi valda!

Óhlaðið H-atóm

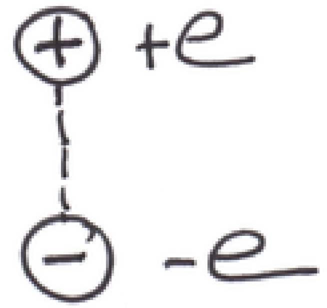
Er rafsvið í kringum það?

* Gerum ráð fyrir að kjarnhleðslan sé punkthleðsla +e
* Í grunnástandi er hleðsludreifing rafeindarinnar

$\rho_e(r) \sim A e^{-2\alpha r}$ þar sem A og α eru þekktir stuðlar

Atómið er óhlaðið → $\int_{\text{allt rúmið}} dV \, \rho_e(\vec{r}) = -e$

* Hugsum okkur kúluyfirborð með geisla r
* Innan þess er alltaf endanleg jákvæð hleðsla fyrir endanlegt r (hluti ρ_e er utan þessa yfirborðs).
* Það er því alltaf endanlegt rafsvið → Kraftur fyrir „utan" H-atóm
* Krafturinn er skammseilinn, fellur með veldisvísisfalli, miklu hraðar en Coulomb-krafturinn fyrir +e punkthleðslu eða fyrir tvípól



Rafstöðumætti

Um rafstöðusvið gildir $\overline{\nabla} \times \overline{E} = 0$

Almennt gildir fyrir skalarsvið V

$$\overline{\nabla} \times (\overline{\nabla} V) \equiv 0$$

því er hægt að finna skalarsvið V

þannig að

$$\boxed{\overline{E} = -\overline{\nabla} V}$$

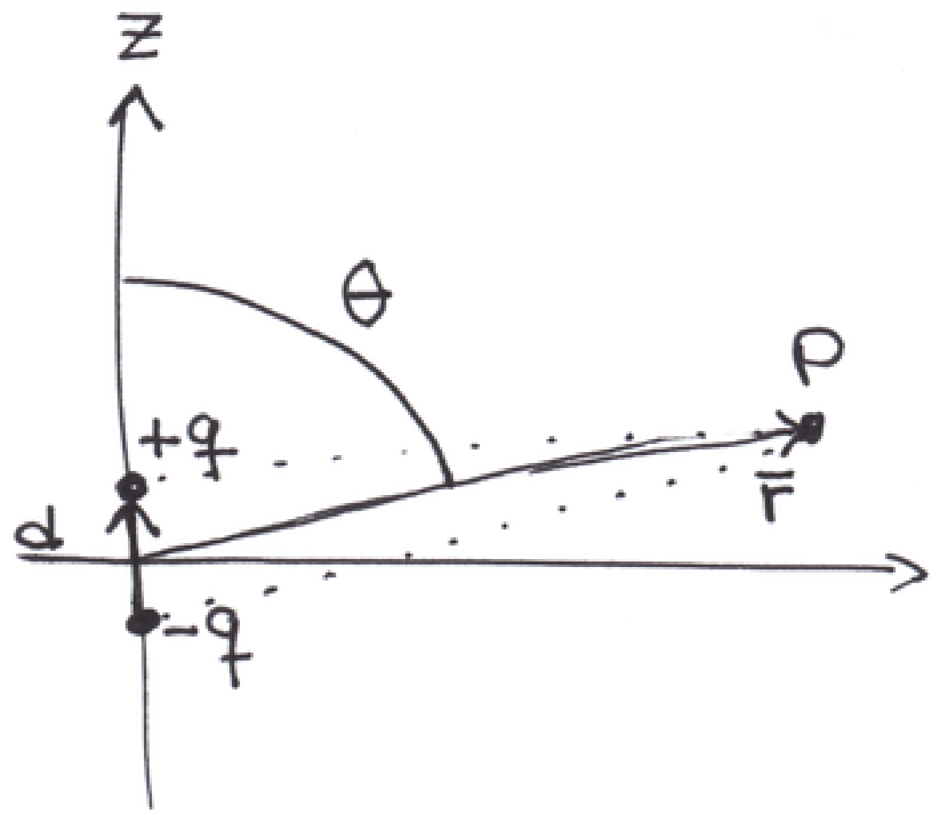
Í 4. kafla eru kynntar aðferðir t.þ.a. reikna $V(\bar{r})$ sem eru einfaldari oftast en að reikna $\overline{E}(\bar{r})$ beint.

Spennumunur í rafstöðumætti er

$$V_2 - V_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \bar{E}\cdot d\bar{l} \qquad \text{óháð leið}$$

$$V_2 - V_1 = \frac{W}{q}$$ er vinnan sem þarf t.þ.a. færa einingarhleðslu frá P_1 til P_2 í rafsviðinu $\bar{E}$

Tvískaut



$$V_P = V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{k=1}^{2}\frac{q_k}{|\bar{r}-\bar{r}_k'|}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\bar{r}-\bar{d}/2|} - \frac{1}{|\bar{r}+\bar{d}/2|}\right]$$

$$\bar{r} - \frac{\bar{d}}{2} = \left(r \sin\theta \cos\varphi ,\ r \sin\theta \sin\varphi ,\ r \cos\theta - \frac{d}{2} \right) \quad \text{í Kartísskum hn.}$$

$$\left| \bar{r} - \frac{\bar{d}}{2} \right| = \left(r^2 \sin^2\theta + \left(r\cos\theta - \frac{d}{2} \right)^2 \right)^{1/2} = \left(r^2 - dr\cos\theta + \frac{d^2}{4} \right)^{1/2}$$

$$= r\left(1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{1/2} \simeq r\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta \right) \quad \text{ef } r \gg d$$

$$\frac{1}{|\bar{r} - \bar{d}/2|} - \frac{1}{|\bar{r} + \bar{d}/2|} \simeq \left[\frac{1}{r}\left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta \right) - \frac{1}{r}\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta \right) \right]$$

$$= \frac{d\cos\theta}{r^2}$$

$$\rightarrow V_p = V(\bar{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{\bar{p} \cdot \hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\bar{p} = q\bar{d}$$

<u>Rafsviðið</u> fæst með

$$\bar{E} = -\bar{\nabla} V = -\hat{a}_R \frac{\partial V}{\partial r} - \hat{a}_\theta \frac{\partial V}{r \partial \theta}$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left\{ \hat{a}_R \, 2\cos\theta + \hat{a}_\theta \sin\theta \right\}$$