Hornræknar varpanir og notkun þeirra í rafsegulfræði

Ingibjörg Magnúsdóttir

ingibjm@hi.is

13. nóvember 1998

$\boxed{\text{Um jafnmættis- og sviðslínur rafmættis}}$

$\phi(z)$ rafmætti í $z = x + iy$.

Rafsviðið: $\mathbf{E} = -\nabla\phi$

Skilgreinum

$$w = w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

þar sem ϕ og ψ eru raungild föll.

w: "Tvinngilda rafmættið" (e. complex potential)

Gerum ráð fyrir að w sé fágað fall. Þá uppfylla ϕ og ψ Cauchy-Riemann jöfnurnar:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

- $\phi =$ fasti gefur jafnmættislínur.
- $\psi =$ fasti gefur sviðslínur:
  - Á ferlum þar sem $\psi =$ fasti er $\nabla\psi \perp \psi$.
  - Einnig gildir að $\nabla\psi \perp \mathbf{E}$:
    Ritum

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y})$$

Notum Cauchy-Riemann jöfnurnar og fáum

$$\nabla\psi \cdot \mathbf{E} = 0$$

Sviðslínurnar eru því samsíða ferlunum $\psi =$ fasti.

Mikilvægi tvinngilda rafmættisins er því ótvírætt. Ef það er þekkt, þá er allt vitað um rafsegulfræðina sem tengist henni. Reikningar á sviðs- og jafnmættislínum geta þó auðveldlega orðið verulega flóknir.

Laplace jafnan

Ef Laplace jafnan er uppfyllt í z-sléttu:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \phi = 0$$

Með breytuskiptunum $w = f(z)$ fæst

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \phi = \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \frac{\partial^2}{\partial w \partial \overline{w}} \phi$$

svo að Laplace jafnan er líka uppfyllt í w-sléttu svo lengi sem $f'(z) \neq 0$

$\Rightarrow$Jafnmættis-og sviðslínur í z-sléttu varpast í jafnmættis- og sviðslínur í w-sléttu !

Hornræknar varpanir (e. conformal mapping)

$w = f(z)$ fágað fall á $D \subset \mathbf{C}$ (ekki fastafallið).

Ef $f'(z) \neq 0$ er f sögð hornrækin í z:

- Sérhverjir tveir þjálir (e. smooth) ferlar sem skerast í punkti z varpast yfir í ferla sem skerast undir sama horni í w-sléttu.
- Hægt að nota hornræknar varpanir til að leysa verkefni í rafsegulfræði, straumfræði, varmaleiðni, flæði kjörvökva ...
- Lausn á vandamálinu í $f(D)$ er jafngild lausninni í D. Beiting f getur einfaldað lausn verkefna allverulega. Lausn í einfaldri geómetríu má varpa yfir í lausn í flókinni geómetríu.

$\boxed{\text{“Stærðfræðilegur” bakgrunnur}}$

Látum $z = x + iy = \zeta(t)$, $a \leq t \leq b$, vera stikun á ferli $C \subset D$.

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$$

- dy/dx er hallatala snertils við ferilinn

Ef $\zeta'(t) \neq 0$ er uppfyllt:

- Vigurinn $\zeta'(t)$ er snertill við ferilinn.
- $\arg \zeta'(t)$ er hornið sem vigurinn myndar við x-ás.

Myndmengi C: $\quad w = f(\zeta(t))$ (ferill C^*).

Keðjuregla:

$$\frac{dw}{dt} = f'(\zeta(t))\frac{d\zeta}{dt} \tag{1}$$

Látum $t_0 \in [a, b]$ og $z_0 = \zeta(t_0)$. Jafna (1) gefur

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \zeta'(t_0)$$

Stefna snertils við C^* er stefna snertils við C snúið um hornið $\arg f'(z_0)$. Þetta er óháð valinu á C. Sér í lagi gildir:

Ef tveir ferlar C og C' skerast í z_0, þá varðveitist hornið á milli þeirra við vörpunina. Vörpunin er sögð vera hornrækin (sbr. ættrækin ...).

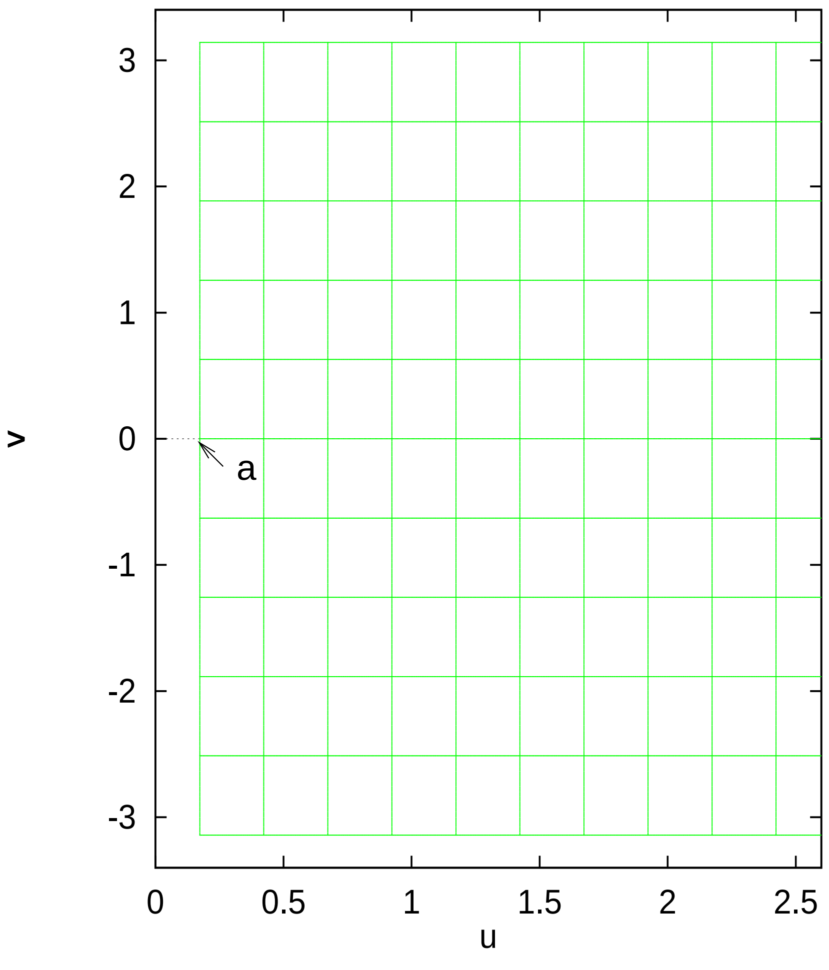
$\boxed{\text{Mætti milli þéttisplatna}}$

Staðsetjum tvær þéttisplötur í (u, v) sléttu þannig að önnur þeirra sé í $u = a$ og hin í $u = +\infty$.

Festum mættið þannig að

$$V(a) = V_0$$

$$V(+\infty) = -V_0$$



Mynd 1: Jafnmættis- og sviðslínur vegna þéttisplatna í $u = a$ og $u = +\infty$.

Jafnmættislínur eru samsíða þéttisplötunum svo $V = V(u)$. Einfalt er að finna mættið, því rafsvið milli þéttisplatna er ætíð fast. Rifjum upp hvernig þetta er leyst:

$$\begin{aligned} V(u) - V(a) &= -\int_{(a,v)}^{(u,v')} \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} \\ &= -\int_a^u E du \\ &= -E(u-a) \end{aligned}$$

og $V(a) = V_0$, svo

$$V(u) = -Eu + (V_0 + Ea)$$

Athugum nú hvernig sviðs- og jafnmættislínur líta út í annarri geómetríu. Skoðum vörpunina

$$\begin{aligned} u + iv = w &= \log(z) \\ &= \phi(x, y) + i\psi(x, y) \end{aligned}$$

og skrifum

$$z = r \exp(i\theta)$$

Þá er

$$\log(z) = \log(r) + i\theta = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

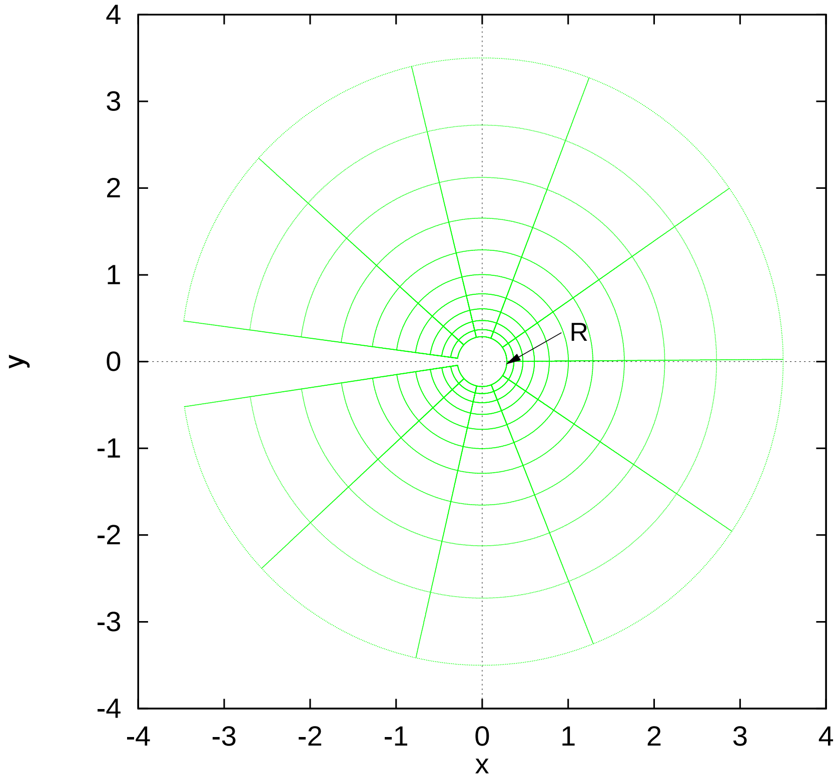
$\phi =$ fasti gefur jafnmættislínur:

$$\log(r) = c => r = e^c = \text{fasti}$$

$\psi =$ fasti gefur sviðslínur:

$$\theta = \text{fasti}$$

Þannig að í (x, y) sléttu líta sviðslínur og jafnmættislínur út eins og næsta mynd sýnir.



Mynd 2: Jafnmættis- og sviðslínur umhverfis sívalning með radíus $r = R$.

Verkefni:

- Búið til net sem sýnir sviðs- og jafnmættislínur milli þéttisplatnanna, sem lýst var hér á undan, og notið það til að finna sviðs- og jafnmættislínur í (x, y) sléttu.
- Hvert er gildið á a ef mætti sívalningsins í $r = R$ er V_0 og $u = a$ er staðsetning sömu jafnmættislínu í (u, v) sléttu?
- Athugið eftirfarandi: Lausn þessa verkefnis er jafngilt því að finna jafnmættis- og sviðslínur umhverfis óendanlega línuhleðslu (punkthleðslu í sléttu) og festa síðan mættið í $r = R$!
- Í flóknari geómetríu er þessi „hornrækna aðferð" mun heillavænlegri svo fremi sem vörpunin milli plana er þekkt.

  Fyrir flóknari varpanir er tölva mjög hentug til þess að teikna þær upp. Næsta verkefni er lítið dæmi um slíkt.