1

① Tímaóháður H, $H|n\rangle = E_n|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$|\Psi(0)\rangle = 2|0\rangle - i|1\rangle + i|2\rangle$

---

a) Finna $\langle H\rangle$. Fyrst þarf að norma $|\Psi(0)\rangle$

$$\langle\Psi(0)|\Psi(0)\rangle = 4\langle 0|0\rangle + 1\cdot\langle 1|1\rangle + 1\langle 2|2\rangle = 6$$

→ Við getum normað

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{2|0\rangle - i|1\rangle + i|2\rangle\right\}$$

2

$$\langle\Psi(0)|H|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{6}\left\{2\langle 0| + i\langle 1| - i\langle 2|\right\} H \left\{2|0\rangle - i|1\rangle + i|2\rangle\right\}$$

munum að $\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$

$$\rightarrow \langle H\rangle(0) = \frac{1}{6}\left\{4E_0 + E_1 + E_2\right\} = \frac{4E_0 + E_1 + E_2}{6}$$

---

b)

$$\langle H^2\rangle = \frac{1}{6}\left\{4E_0^2 + E_1^2 + E_2^2\right\} = \frac{4E_0^2 + E_1^2 + E_2^2}{6}$$

Finnum staðalfrávik f. síendurteknar orkumælingar á $|\Psi(0)\rangle$

$$\Delta H = \sqrt{\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2} = \sqrt{\frac{4E_0^2 + E_1^2 + E_2^2}{6} - \frac{(4E_0 + E_1 + E_2)^2}{36}}$$

3

c) Ástand kerfisins klukkan t

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{2e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle - ie^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle + ie^{-iE_2t/\hbar}|2\rangle\right\}$$

því H er óháð tíma og hermískur H-virki varðveitir norm

d) $\langle H\rangle(t)$ þ.e. í ástandi $|\Psi(t)\rangle$

$$\langle H\rangle(t) = \frac{1}{6}\left\{4E_0 + E_1 + E_2\right\} = \langle H\rangle(0)$$

vegna þess að Hermískur H-virki með hornrétt og stöðluð ástönd lýsir einöngruðu og lokuðu kerfi þ.s. orkan breytist ekki

4

② Rafeind í 2D-mætti $V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) = \frac{1}{2}m\omega^2r^2$

$B_{ext} = 0$, $E_{n_xn_y} = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)$ $n_x, n_y = 0, 1, 2, \dots$

a) lægsta leiðrétting vegna afstæðis. Við höfum fundið hana í dæmi 6.14 í lausnum 2011 fyrir 1D-sveifil. Tvívíði sveifillinn er eins og tveir einvíðir

$$H'_r = -\frac{p^4}{8m^3c^2}, \quad \text{hér } p^4 = (p^2)^2 = (p_x^2 + p_y^2)^2 = p_x^4 + p_y^4 + 2p_y^2p_x^2$$

Notum 6.14 t.þ.a fá (með $a_\mp$)

↑ þeir víxlast hér því lausnin er þáttanleg $\phi_{n_x}(x)\,\phi_{n_y}(y)$

$$\langle p_{n_x}^4\rangle = \frac{\hbar^4}{4a^4}\left[6n_x^2 + 6n_x + 3\right]$$

$$\langle p_{n_y}^4\rangle = \frac{\hbar^4}{4a^4}\left\{6n_y^2 + 6n_y + 3\right\}$$

(5)

Sömu aðferð má nota fyrir $2P_x^2P_y^2$, en líka má nota Feynman-Hellmann samkvæmt dæmi 6-32 ii)

$\langle n|p^2|n\rangle = E_n\cdot m$ fyrir einvídd

$$\langle n_x n_y | P_x^2 P_y^2 | n_x n_y\rangle = E_{n_x}E_{n_y}\cdot m^2 = \hbar\omega(n_x+\tfrac12)\cdot m \cdot \hbar\omega(n_y+\tfrac12)\cdot m$$

$$= \hbar^4 \frac{\omega^2 m^2}{\hbar^2}(n_x+\tfrac12)(n_y+\tfrac12)$$

$$= \hbar^4\frac{1}{a^4}(n_x+\tfrac12)(n_y+\tfrac12)$$

$$\to \langle H_r'\rangle = -\frac{1}{8m^3c^2}\left[\frac{\hbar^4}{4a^4}\{(6n_x^2+6n_x+3)+(6n_y^2+6n_y+3)\} + 2\frac{\hbar^4}{a^4}(n_x+\tfrac12)(n_y+\tfrac12)\right]$$

(6)

b) Hér er engin hleðsla sem rafeindin sér, engin róteind eins og í H-atóminu. Þetta er nálgun því innilokunin hlýtur að vera vegna jákvæðrar hleðslu sem „smurt" er yfir stórt svæði

nálgunin er ekki slæm því stigull $\frac{1}{r}$ er miklu stærri en stigull r^2 nærri $r\sim 0$

c) Ekkert innra eða ytra segulsvið → spuna ástöndin eru tvöföld

d) $$E_g = 2\hbar\omega\cdot\frac12 - \frac{1}{8m^3c^2}\left\{\frac{\hbar^4 6}{4a^4} + 2\frac{\hbar^4}{a^4}\frac14\right\}$$

$$= \hbar\omega - \frac{\hbar^4}{8m^3c^2a^4}\left\{\frac64+\frac12\right\} = \hbar\omega\frac12 - \frac{\hbar^4}{4m^3c^2a^4}$$

$$= \hbar\omega - \frac14\frac{\hbar^2\omega^2}{mc^2} = \hbar\omega\left\{1-\frac{\hbar\omega}{4mc^2}\right\}$$

og það er tvöfalt

(7)

(3) Ljóseindamassi

$$\to V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-r/r_0}}{r}, \quad r_0 \gg a$$

a er u.þ.b. „stærð" H-atóms

mjög lítið

$$\to \exp\left\{-\left(\frac ra\right)\left(\frac a{r_0}\right)\right\} \sim 1 - \left(\frac ra\right)\left(\frac a{r_0}\right) + \cdots$$

↑ á bilinu 0 ~ 1...

og því

$$V(r) \simeq -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac1r - \frac1a\left(\frac a{r_0}\right) + \cdots\right]$$

Við þurfum því að meta áhrif ~~þessa~~ liðs á grunnástandið með 1. stigs truflanareikn. Sleppum spunanum hér.

(8)

Aukaliðurinn vegna ljóseindamassans er fasti

→ $\langle 100|\text{fasti}|100\rangle =$ fasti

Leiðréttingin er

$$\Delta E_g = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\cdot\left(-\frac1a\left(\frac a{r_0}\right)\right) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\left(\frac a{r_0}\right)$$

$$= \frac{me^4}{16\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}\left(\frac a{r_0}\right) = \frac12 R_y\cdot\left(\frac a{r_0}\right)$$

Grunnástandið hækkar í orku → bindiorkan minnkar því mætti róteindarinnar er aðeins skammseilnara á kvarða H-atóms

(4) $$H = E_0\left(\tau_z^2 + \lambda\tau_z\right)$$

a) Finna ástönd H þ. $\lambda = 0$

$$H = E_0\tau_z^2 = E_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ástöndin eru $|+\rangle_0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $|-\rangle_0 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ í grunni τ_z

þau eru tvöföld með orkuna $E = E_0$

---

b) Nákvæm ástönd $H = E_0\left(\tau_z^2 + \lambda\tau_z\right) = \begin{pmatrix}E_0+\lambda E_0 & 0\\ 0 & E_0-\lambda E_0\end{pmatrix}$

þau eru $|+\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ með orku $E_0 + \lambda E_0$

og $|-\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ með orku $E_0 - \lambda E_0$

c) Nei því þá væri H ekki lengur hermískur!

d) $|+\rangle_0$ og $|-\rangle_0$ eru tvöföld þ.a. við þurfum trufl. reikn. fyrir tvöföld ástönd, en munum eftir setningunni

Ef til er virki A sem víxlast við H_0 og H' og eiginástönd A eru með mism. eigingildi þá eru ástönd A „góð" ástönd og fyrir þau má nota venjulega fyrsta stigs truflun.

$H_0 = E_0\tau_z^2$ og $H' = E_0\lambda\tau_z$

$A = \tau_z$ með ástönd $|+\rangle_0$ og $|-\rangle_0$

$$\rightarrow \quad E_+^1 = \lambda E_0$$
$$E_-^1 = -\lambda E_0$$

og því er

$$E_+ = E_0(1+\lambda)$$
$$E_- = E_0(1-\lambda)$$

Samkvæmt 1. stigs truflun.

Þetta mátti líka sjá strax með því að H er á hornalínuham í τ_z-grunninum

e) Truflunarlausnin gildir hér fyrir öll ~~lítil~~ gildi á λ því hún er nákvæma lausnin

Truflanaröðin hefur engi liði með λ í hærra veldi en því fyrsta!

(5) Þrívíður hreintóna sveifill (einsátta)

Við er bætt liðnum λxyz

Eru nákvæmu ástöndin eiginástönd L^2?

$$\boxed{\text{Aðeins ef} \quad [L^2, xyz] = 0}$$

Reiknum

$$[L^2, xyz] = [L_x^2, xyz] + [L_y^2, xyz] + [L_z^2, xyz]$$
$$= L_x[L_x, xyz] + [L_x, xyz]L_x$$
$$+ L_y[L_y, xyz] + [L_y, xyz]L_y$$
$$+ L_z[L_z, xyz] + [L_z, xyz]L_z$$

13

$$[L_x, xyz] = [yp_z - zp_y, xyz] = xy^2[p_z, z] - xz^2[p_y, y]$$
$$= (xy^2 - xz^2)(-i\hbar)$$

$$[L_y, xyz] = [zp_x - xp_z, xyz] = (yz^2 - yx^2)(-i\hbar)$$

$$[L_z, xyz] = [xp_y - yp_x, xyz] = (zx^2 - zy^2)(-i\hbar)$$

við notum hér $[p_x, x] = -i\hbar$

$$\Rightarrow [L^2, xyz] = (-i\hbar)\left\{x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)\right\} \neq 0$$

því eru ástöndin ekki eigin ástönd L^2