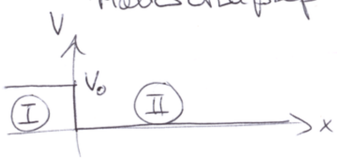
(1)

Mættisafturþrep



(I)

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V_0\right\}\psi = E\psi$$

Lausn $\psi(x) = e^{ikx} + Be^{-ikx}$

og því

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0 = E$$

$$k^2 = \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)}$$

jákvæð tala $E > V_0$

$\to k \in \mathbb{R}$ og lausn

$$\psi(x) = e^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)}$$

(II)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi = E\psi$$

Lausn $\psi(x) = Ce^{iqx}$ bara bylgja til hægri

með $\frac{\hbar^2 q^2}{2m} = E \geq 0 \to q = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

Lausn samfeld í $x=0$

$$\psi^{I}(0) = \psi^{II}(0)$$

$$1 + B = C \quad (1)$$

(2)

Afleiða samfeld

$$ik - ikB = iqC$$

$$\to k(1-B) = qC \quad (2)$$

umritum

$$B - C = -1$$

$$kB + qC = k$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ k & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ k \end{pmatrix}$$

Með lausn

$$B = -\frac{q-k}{q+k}$$

$$C = \frac{2k}{q+k}$$

Athugum líkindastraumþéttleika

$$J(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\left\{(\partial_x\Psi)^*\Psi - \Psi^*\partial_x\Psi\right\}$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}|A|^2\{-ik-ik\} = \frac{\hbar k}{m}|A|^2$$

ef bylgjufallið væri

$$\Psi_k(x,t) = A\exp\{i(kx - \omega_k t)\}$$

(3)

Líkindastraumur innbylgju er þá

$$J_{inn} = \frac{\hbar k}{m}$$

Líkindastraumur endurkasts

$$J_R = -\frac{\hbar k}{m}|B|^2$$

og frambylgju

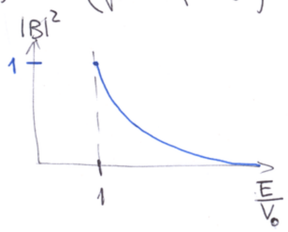
$$J_T = \frac{\hbar q}{m}|C|^2$$

a) Líkindi endurkasts eru

$$\left|\frac{J_R}{J_{inn}}\right|^2 = |B|^2 = R$$

$$= \frac{(q-k)^2}{(q+k)^2} = \frac{\left(\sqrt{E} - \sqrt{E-V_0}\right)^2}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E-V_0}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1-\frac{V_0}{E}} - 1\right)^2}{\left(\sqrt{1-\frac{V_0}{E}} + 1\right)^2}$$

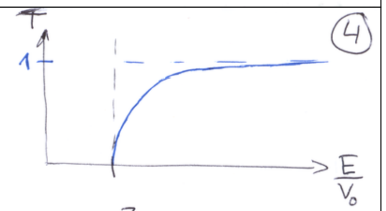


b) Líkindi framsendar eru

$$\left|\frac{J_T}{J_{inn}}\right|^2 = \frac{q}{k}|C|^2 = \frac{4qk}{(q+k)^2} = T$$

(4)

$$T = 4\frac{\sqrt{(E-V_0)E}}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E-V_0}\right)^2} = \frac{4\sqrt{\left(1-\frac{V_0}{E}\right)}}{\left(\sqrt{1-\frac{V_0}{E}} + 1\right)^2}$$



c)

$$R + T = \frac{(q-k)^2}{(q+k)^2} + \frac{4qk}{(q+k)^2} = \frac{(q+k)^2}{(q+k)^2} = 1$$

þannig að inn streymir jafnmikið og út

(2) $H_0 = \alpha \sigma_z$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Orkuróf H_0 er

$$E^0_\pm = \pm \alpha$$

og eiginástöndin eru

$$|+\rangle^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $H = H_0 + H' = \alpha\sigma_z + \beta\sigma_x$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

þannig að

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

Nýja orkurófið og ástöndin eru

$$E_\pm = \pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

með ónormuð ástönd

$$|-\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \\ 1 \end{pmatrix}$$

markgildin $\beta \to 0$ eru skoðuð

Finnum normunarstuðul

$$1 = A_\pm^2 \left\{ \left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta} \pm \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 + 1 \right\}$$

Til þess að sjá hvernig nýju ástöndin stefna á þau gömlu verður að taka normunina með þegar

(3) Hreintónasveifill í ástandi

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|0\rangle + i|1\rangle\}$$

a)
$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \frac12\{\langle 0| - i\langle 1|\} H \{|0\rangle + i|1\rangle\}$$
$$= \frac12\{\langle 0|H|0\rangle + \langle 1|H|1\rangle\} = \frac12\{E_0 + E_1\}$$
$$= \frac12 \hbar\omega\left\{\frac12 + 1 + \frac12\right\} = \frac12\hbar\omega 2 = \hbar\omega$$

b) Orkumæling kemur sveiflinum alltaf í eiginástand H þ.a. við fáum $E_0 = \hbar\omega\frac12$ með líkum $\frac12$ og $E_1 = \hbar\omega(1+\frac12) = \hbar\omega\frac32$ með líkum $\frac12$

c) Ef $|\psi\rangle$ er upphafsástand sveifils við tímann $t=0$ verður fyrir $t>0$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|0\rangle e^{-i\omega\frac12 t} + i|1\rangle e^{-i\omega\frac32 t}\right\}$$

(4) Hreintónasveifill í eiginástandi $|17\rangle$ klukkan $t=0$. Tímaháð truflun $\sim x$

a) fyrsta stigs valreglur. Fylkjastakið er

$\langle 17|x|n\rangle$ notum hækkunar- og lækkunarvirkja og finnum

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}(a_+ + a_-)$$

(9)

með náttúrulegu lengdina $a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

$$a_+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$a_-|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \qquad \text{og } \langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$$

→ eru valreglurnar þ.a. $n = 17 \pm 1$, $n = 18$ eða 16

b) ef truflunin $\sim x^2$

$$x^2 = \frac{a^2}{2}\{a_+a_+ + a_-a_- + a_+a_- + a_-a_+\}$$

þá verða valreglurnar núna

$$n = 17 \pm 2, \text{ eða } n = 17 \qquad \begin{cases} n = 19 \\ n = 15 \\ n = 17 \end{cases}$$

(10)

(5) Hlaðin eind á hring með hleðslu q og geisla a

$$H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\partial_\phi^2$$

Um bylgjuföllin verður að gilda $\Psi(\phi+2\pi) = \Psi(\phi)$

a) $H\Psi_\alpha = E_\alpha\Psi_\alpha$, $-\frac{\hbar^2}{2ma^2}\partial_\phi\Psi_\alpha = \Psi_\alpha E_\alpha$

þ.a. eiginföllin má skrifa sem

$$\Psi_\alpha = A_\alpha e^{i\alpha\phi}$$

$$\Psi(\phi+2\pi) = A_\alpha e^{i\alpha\phi + i\alpha 2\pi} = e^{i\alpha\phi}A_\alpha$$

(11)

þ.a. gilda verður

$$e^{i\alpha 2\pi} = 1 \to \alpha = M \in \mathbb{Z}, \quad M = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

normum

$$1 = \int_0^{2\pi} d\phi\, |\Psi_M|^2 = A_M^2 \int_0^{2\pi} d\phi = A_M^2\, 2\pi$$

$$\to A_M = A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ t.d.}$$

Orkurófið beint úr jöfnu Schrödingers

$$E_M^0 = \frac{\hbar^2 M^2}{2ma^2}, \quad M \in \mathbb{Z}$$

(12)

b) Grunnástandið $|0\rangle$ er einfalt með orku 0

Öll hin orkustigin $E_{\pm M}$ eru tvöföld, $(M \neq 0)$

þ.e. $|+M\rangle$ hefur sömu orku og $|-M\rangle$, $(M \neq 0)$

c) Truflun $H' = -qEx = -qEr\cos(\phi)$

Á hringnum er $H' = -qEa\cos(\phi)$

$$= -qEa\,\frac{1}{2}\{e^{i\phi} + e^{-i\phi}\}$$

Grunnástand

1. stigs: $E_0^1 = \langle 0|H'|0\rangle = 0$

Grunnástandið er einfalt

$$\rightarrow \quad E_0^2 = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty} \frac{|\langle m|H'|0\rangle|^2}{E_0^0 - E_m^0}$$

Athugum stök

$$\langle m|H'|0\rangle = -\frac{1}{2\pi}\, qEa\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\phi\, e^{-im\phi}\{e^{i\phi}+e^{-i\phi}\}$$

$$= -\frac{qEa}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi\, \{e^{-i(m-1)\phi} + e^{-i(m+1)\phi}\}$$

$$= -\frac{qEa}{4\pi}\{2\pi\delta_{m,1} + 2\pi\delta_{m,-1}\}$$

allir aðrir liðir hverfa

$$E_0^2 = \frac{q^2E^2a^2}{4}\left\{\frac{1}{-E_1^0} + \frac{1}{-E_{-1}^0}\right\}$$

$$= -\frac{q^2E^2a^2}{4}\left\{\frac{2}{E_1^0}\right\}$$

því $E_{+1}^0 = E_{-1}^0$

$$= -\frac{q^2E^2a^2}{4}\,\frac{4ma^2}{\hbar^2} = -\frac{q^2E^2a^4m}{\hbar^2}$$

Héðan sést að E_0^2 er með rétta vídd orku.
Orka grunnástandsins lækkar vegna rafsviðsins. Sést fyrst með 2. stigs truflunar reikn, stark-hrif

d) fyrsta örvaða orkustigið $E_{\pm1}^0$ er tvöfalt með ástönd $|+1\rangle$ og $|-1\rangle$

Beitum 1. stigs truflana aðferð á þessi ástönd

Reiknum fylkja stökin

$$\langle +1|H'|+1\rangle = 0$$

$$\langle -1|H'|-1\rangle = 0$$

$$\langle -1|H'|+1\rangle = -\frac{1}{2\pi}\, qEa\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\phi\, e^{+i\phi}\{e^{i\phi}+e^{-i\phi}\}e^{+i\phi}$$

$$= 0$$

→ fyrsta stigs truflun hverfur

e) Getum við gert 2. stigs truflun fyrir $|+1\rangle$ og $|-1\rangle$?

Reynum setninguna á bls 259

Speglunarvirkinn $Pf(x) = f(-x)$
víxlast við H, en ástöndin $|\pm M\rangle$
eru ekki heppileg. Reynum því
nýja samantekt

$$|\widetilde{\pm M}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|+|M|\rangle \pm |-|M|\rangle\}$$

bylgjuföllin eru

$$\tilde{\psi}_{+M} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(M\phi), \qquad \tilde{\psi}_{-M} = \frac{i}{\sqrt{\pi}}\sin(M\phi)$$

þessi ástönd þarf að nota til þess að reikna

$$E^{2}_{\pm 1} = \sum_{m \neq \pm 1} \frac{|\langle \tilde{m} | H' | \widetilde{\pm 1} \rangle|^2}{E^{0}_{\pm 1} - E^{0}_{m}}$$

þ.a. fyrir +1 dettur aðeins út +1
og fyrir -1 aðeins -1