

EÐL306G: Inngangur að skammtafræði

Þriðjudaginn 20. maí 2014, kl. 09:00-12:00. Kennari: Viðar Guðmundsson.

Hjálpargögn: Kennslubókin „Introduction to Quantum Mechanics“ eftir David J. Griffiths, handskrifaðar nótur nemenda og kennara, reiknivélar. Leyfilegt er að hafa með sér stærðfræðihandbók og önnur handskrifuð eða prentuð hjálpargögn.

Vægi verkefnanna er jafnt. Skrifuð skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefni eru lögð fyrir á íslensku og ensku.

1. **Íslenska:** Tvívíðum misátta hreintóna sveifli er lýst með virkja Hamiltons

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2),$$

þar sem $\omega_x \neq \omega_y$. Í tvívíðu kerfi hefur hverfiþunginn aðeins einn þátt, $L_z = xp_y - yp_x$. Eru eiginástönd H með ákveðinn fastan hverfiþunga?

English: Two-dimensional anisotropic harmonic oscillator is described by the Hamiltonian

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2),$$

where $\omega_x \neq \omega_y$. In a two-dimensional system the the angular momentum only has one component, $L_z = xp_y - yp_x$. Do the eigenstates of H have a definite angular momentum?

2. **Íslenska:** Í bók sinni finnur Griffiths bundna ástandið fyrir eind með massa m í Dirac δ -brunninum $V(x) = -\alpha\delta(x)$, fyrir $\alpha > 0$. Bylgjufall og eiginorku ástandsins má skrifa sem

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \exp\left(-\frac{|x|}{a}\right), \quad E_0 = -\frac{\hbar^2}{2ma^2},$$

ef notuð er náttúrulega lengd δ -brunnins $a = \kappa^{-1} = \hbar^2/(m\alpha)$.

- Hvað er átt við með að a sé náttúruleg lengd fyrir eind bundna í δ -brunninum?
- Hvaða önnur ástönd gætu komið hér við sögu? Ekki þarf að finna þau, en lýsið þeim.
- Finnið fyrsta stigs breytingu orku bundna ástandsins ef kerfið er truflað með virkjanum $H'(x) = \lambda V'(x) = \lambda E_0|x|/a$.
- Hvað þarf að gilda svo hægt sé að líta á þessa truflun sem smáa?

English: In his book Griffiths finds the bound state for a particle with mass m in the Dirac δ -well $V(x) = -\alpha\delta(x)$, for $\alpha > 0$. The wavefunction and the eigenenergy of the state can be written as

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \exp\left(-\frac{|x|}{a}\right), \quad E_0 = -\frac{\hbar^2}{2ma^2},$$

if we use the natural length $a = \kappa^{-1} = \hbar^2/(m\alpha)$ for the δ -well.

- What is meant by the statement that a is a natural length for the particle bound to the δ -well.
- What other states could be associated with the well? You do not have to find them, but please describe them.
- Find the first order change in the energy of the bound state if the system is perturbed by the operator $H'(x) = \lambda V'(x) = \lambda E_0|x|/a$.
- How is it possible to regard this perturbation as small?

3. **Íslenska:** Í vetnisatómi eru ástönd rafeindar táknuð með $|n, l, m\rangle$, þar sem n er höfuðskammtatalan, l tengist heildarhverfingunum og m z -hniti hans, ef spunanum er sleppt. Rafeind er í ástandinu $|1, 0, 0\rangle + i|4, 2, 1\rangle$ klukkan $t = 0$.

- (a) Hvaða mæligildi fást fyrir orkuna fyrir þetta ástand?
- (b) Hver eru líkindi mæligildanna fyrir orkuna?
- (c) Hvert er væntigildi orkunnar?
- (d) Breytist væntigildi orkunnar með tíma?
- (e) Hvert er væntigildi virkjans L^2 ?
- (f) Er hverfingunni rafeindarinnar varðveittur í þessu ástandi?
- (g) Finnið ástand rafeindarinnar við seinni tíma t .
- (h) Er líkindadreifing ástandsins kúlusamhverf?

English: In a hydrogen atom the states of the electron are noted by $|n, l, m\rangle$, where n is the principal quantum number, l is related to the total angular momentum, and m to its z -component, if the spin is neglected. An electron is in the state $|1, 0, 0\rangle + i|4, 2, 1\rangle$ at time $t = 0$.

- (a) What values can be found by an energy measurement of this state?
- (b) With what probability do the energy values occur?
- (c) What is the expectation value for the energy?
- (d) Does the expectation value for the energy change in time?
- (e) What is the expectation value for the operator L^2 ?
- (f) Is the angular momentum conserved for the electron in this state?
- (g) Find the state of the electron for a later time t .
- (h) Is the probability distribution for the state spherically symmetric?

4. **Íslenska:** Einvíður hreintóna sveifill með massa m og horn tíðni ω er í grunnástandinu $|0\rangle$ klukkan $t = 0$. Um hann gildir að $\langle x \rangle = 0$ fyrir $t \leq 0$. Hann verður fyrir tímaháðri truflun $V(x, t) = \lambda E_0 \{|x|/a\} \Theta(t)$, þar sem $\Theta(t)$ er Heaviside þrepafallið sem er 0 fyrir öll $t < 0$ og 1 fyrir $t > 0$. Náttúrulega lengd sveifilsins er táknuð með a . Metið líkur þess að sveifillinn finnist í ástandi $|1\rangle$ klukkan $t > 0$.

English: One-dimensional harmonic oscillator with mass m and angular frequency ω is in the groundstate $|0\rangle$ at time $t = 0$. We know that $\langle x \rangle = 0$ for $t \leq 0$. The oscillator is perturbed time-dependently by $V(x, t) = \lambda E_0 \{|x|/a\} \Theta(t)$, where $\Theta(t)$ is the Heaviside function, that is 0 for all $t < 0$ and 1 for $t > 0$. The natural length scale of the oscillator is noted by a . Estimate the probability for the oscillator to be found in the state $|1\rangle$ for later time $t > 0$.

5. **Íslenska:** Þremur óvígðverkandi fermíeindum er haldið í einvíðu fleygboga innilokunarmætti. Skrifu niður bylgjufall grunnástands kerfisins.

English: Three noninteracting fermions are confined in a parabolic potential. Write down the wavefunction of the groundstate of the system.