

EÐL306G: Inngangur að skammtafræði

Föstudaginn 24. maí 2013, kl. 09:00-12:00. Kennari: Viðar Guðmundsson.

Hjálpargögn: Kennslubókin „Introduction to Quantum Mechanics“ eftir David J. Griffiths, handskrifaðar nótur nemenda og kennara, reiknivélar. Leyfilegt er að hafa með sér stærðfræðihandbók.

Vægi verkefnanna er jafnt. Skrifid skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefni eru lögð fyrir á íslensku og ensku.

1. **Íslenska:** Þriggja orkustiga kerfi er með orkurófið $E_0, E_0, 2E_0$, þar sem E_0 er einkennisorka kerfisins.
 - (a) Skrifid niður fylki Hamiltonvirkjans í grunni eiginástanda virkjans.
 - (b) Nú kerfinu er breytt þannig að við Hamiltonvirkjann leggst nýr liður. Visst fylkjastak tvöföldu ástandanna og þessa nýja liðar hefur gildið iE_0 . Skrifid niður fylki heildar Hamiltonvirkjans í upphaflega grunninum ef öll önnur fylkjastök þessa nýja liðar hverfa.
 - (c) Reiknið nákvæmt orkuróf nýja heildar Hamiltonvirkjans.
 - (d) Hvernig tengjast ástönd nýja Hamiltonvirkjans gömlu ástöndunum?

English: System with three energy levels has the energy spectrum $E_0, E_0, 2E_0$, where E_0 is a characteristic energy of the system.

- (a) Write down the matrix of the Hamilton operator in the basis of its eigenstates.
- (b) The system is changed such that a term is added to the original Hamiltonian. A certain matrix element of the new term and the doubly degenerate eigenstates has the value iE_0 . Write down the matrix of the total Hamiltonian in the original basis if all other matrix elements of the new term do vanish.
- (c) Calculate the exact energy spectrum of the new total Hamiltonian.
- (d) How are the eigenstates of the new Hamiltonian related to the old ones?

2. **Íslenska:** Reiknið vixlin $[p^2, x^2]$ fyrir skriðþungavirkjann p og staðarvirkjann x . Notið niðurstöðuna til að segja til um hvað gerist þegar við orkuróf hreintóna sveifils með $H = p^2/(2m) + m\Omega^2 x^2/2$ þegar við hann er bætt mættinu $V = m\omega^2 x^2/2$.

English: Calculate the the commutation relation $[p^2, x^2]$ for the momentum operator p and the position operator x . Use the result to predict what happens to the energy spectrum of a harmonic oscillator with $H = p^2/(2m) + m\Omega^2 x^2/2$ when the potential $V = m\omega^2 x^2/2$ is added to the oscillator.

3. **Íslenska:** Vetrnisatóm er í ástandi $|n, l, m\rangle = -i|4, 1, 0\rangle + |2, 1, 1\rangle$.

- (a) Hvert er væntigildi orkunnar?
- (b) Finnið væntigildi L^2 .
- (c) Hvert er væntigildi L_z ?
- (d) Í hvaða ástöndum getur vetrnisatómið verið eftir mælingu á orkunni og með hvaða líkum?

English: Hydrogen atom is in the state $|n, l, m\rangle = -i|4, 1, 0\rangle + |2, 1, 1\rangle$.

- (a) What is the expectation value of the energy?
- (b) Find the expectation value of L^2 .
- (c) What is the expectation value of L_z ?
- (d) In what states can the hydrogen atom be after an energy measurement and with what probabilities?

4. **Íslenska:** Eind í einni vídd með hleðslu q er haldið með rafsviði við hátt mættisþrep þannig að hún sér mættið

$$V(x) = \begin{cases} qEx & \text{ef } x \geq 0 \\ +\infty & \text{ef } x < 0 \end{cases},$$

þar sem E er styrkur rafsviðsins og $q > 0$. Notið hnikareikning til þess að meta orku grunnástands kerfisins. Hvernig væri mögulegt að meta orku fyrsta örvaða ástandsins.

English: Particle in one dimension with charge q is held by an electric field close to a high potential step such that it sees the potential

$$V(x) = \begin{cases} qEx & \text{if } x \geq 0 \\ +\infty & \text{if } x < 0 \end{cases},$$

where E is the strength of the electric field and $q > 0$. Use variational calculus to estimate the energy of the ground state of the system. How would it be possible to estimate the energy of the first excited state?

5. **Íslenska:** Vetrnisatóm er í grunnástandinu $|n, l, m\rangle = |1, 0, 0\rangle$. Gerum ráð fyrir að klukkan $t = 0$ sé kveikt á ytra tímaháðu rafsviði þannig að við Hamiltonvirkja kerfisins bætist truflunarliðurinn

$$H' = -qE_0z \cos(\omega t),$$

þar sem E_0 er styrkur rafsviðsins og ω er tíðni þess.

- Reiknið fylkjastakið $\langle 2, 0, 0 | H' | 1, 0, 0 \rangle$.
- Hvað segja niðurstöðurnar úr a-lið um mögulegar tvískautsfærslur milli 1S og 2S ástands vetrnisatóms?

English: Hydrogen atom is in its ground state $|n, l, m\rangle = |1, 0, 0\rangle$. Assume that at $t = 0$ an external time-dependent electric field is turned on such that a perturbation terms is added to the Hamiltonian

$$H' = -qE_0z \cos(\omega t),$$

where E_0 is the strength of the electric field and ω is its frequency.

- Calculate the matrix element $\langle 2, 0, 0 | H' | 1, 0, 0 \rangle$.
- What conclusions can be drawn from the results above about possible electric dipole transitions between the 1S and the 2S state of a hydrogen atom.