

EÐL306G: Inngangur að skammtafræði

Þriðjudaginn 17. desember 2013, kl. 09:00-12:00. Kennari: Viðar Guðmundsson.

Hjálpargögn: Kennslubókin „Introduction to Quantum Mechanics“ eftir David J. Griffiths, handskrifaðar nótur nemenda og kennara, reiknivélar. Leyfilegt er að hafa með sér stærðfræðihandbók og önnur handskrifuð eða prentuð hjálpargögn.

Vægi verkefnanna er jafnt. Skrifid skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefni eru lögð fyrir á íslensku og ensku.

1. **Íslenska:** Einvíðum hreintóna sveifli með massa m og grunntíðni ω er lýst með

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Sveifillinn er truflaður með $\lambda H' = \lambda \hbar \omega (x/a)^3$, þar sem $a = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ er náttúrulegur lengdarskali sveifilsins. Finnið grunnástandsorku truflaða sveifilsins fyrir $\lambda \ll 1$ með leiðréttingarliðum upp í λ^2 .

English: One-dimensional harmonic oscillator with mass m and fundamental frequency ω is described by

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

The oscillator is perturbed by $\lambda H' = \lambda \hbar \omega (x/a)^3$, where $a = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ is the natural length scale of the harmonic oscillator. Find the ground state energy of the perturbed oscillator for $\lambda \ll 1$ with corrections up to λ^2 .

2. **Íslenska:** Eind án spuna er innilokuð í óendanlegum þrívíðum kúlulaga brunni. Stöðluðu eiginástönd hennar eru $|n, l, m\rangle$, þar sem $\hbar^2 l(l+1)$ er eigingildi L^2 og $\hbar m$ er eigingildi L_z . Orkuróf eindarinnar er

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \beta_{nl}^2.$$

Klukkan $t = 0$ er eindin í ástandinu $|\psi(0)\rangle = A\{|0, 2, 0\rangle - i|1, 2, 1\rangle\}$.

- Finnið stöðlunarfastann A .
- Finnið $|\psi(t)\rangle$.
- Finnið væntigildi orku eindarinnar klukkan $t = 0$. Hvert er væntigildi orkunnar fyrir $t \neq 0$?
- Finnið væntigildi virkjanna L^2 og L_z klukkan $t = 0$.
- Er bylgjufall eindarinnar $\psi(\mathbf{x}, 0)$ kúlusamhverft?
- Er $|\psi(\mathbf{x}, 0)|^2$ kúlusamhverft?
- Hver er merking skammtatölunnar n ? Hvernig er hún á annan hátt en höf-uðskammtatala vetnisatóms, n ?

English: Spinless particle is confined to an infinite spherical well. The normalized eigenstates of the particle are $|n, l, m\rangle$, where $\hbar^2 l(l+1)$ is an eigenvalue of L^2 , and $\hbar m$ is an eigenvalue of L_z . The energy spectrum of the particle is

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \beta_{nl}^2.$$

At $t = 0$ the particle is in the state $|\psi(0)\rangle = A\{|0, 2, 0\rangle - i|1, 2, 1\rangle\}$.

- Find the normalization constant A .
- Find $|\psi(t)\rangle$.
- Find the expectation value for the energy of the particle at $t = 0$. What is it at time $t \neq 0$?
- Find the expectation values for the operators L^2 and L_z at $t = 0$.
- Is the wavefunction $\psi(\mathbf{x}, 0)$ spherically symmetric?
- Is $|\psi(\mathbf{x}, 0)|^2$ spherically symmetric?
- What meaning can be attached to the quantum number n ? How is it different from the principal quantum number of hydrogen, n ?

3. **Íslenska:** Eind án spuna á einvíðum hring með geisla a er lýst með

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} = \frac{L_z^2}{2ma^2} = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \partial_\phi^2.$$

- Finnið orkuróf og eiginástönd H_0 .
- Lægstu leiðréttingu á kerfinu vegna takmörkuðu afstæðiskenningarinnar er lýst með $H'_r = -p^4/(8m^3c^2)$. Notið fyrsta stigs truflanareikning til þess að reikna áhrif truflunarinnar á orkuróf H_0 . Rökstyðjið sérstaklega hvers konar truflanareikningi er beitt. Hér er ástæða til þess að hugsa um hlutverk L_z .
- Klýfur H'_r margföld orkustig? Rökstyðjið neikvætt eða jákvætt svar við þessari spurningu.

English: Spinless particle confined to a one-dimensional ring of radius a is described by

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} = \frac{L_z^2}{2ma^2} = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \partial_\phi^2.$$

- Find the energy spectrum and eigenstates of H_0 .
 - The lowest order relativistic correction to this system is described by $H'_r = -p^4/(8m^3c^2)$. Use first order perturbation calculation to discover the effects of this perturbation on the energy spectrum of H_0 . Take special care to justify the type of perturbation approach chosen. Here is a reason to consider the role of L_z .
 - Does H'_r split degenerate energy levels? Justify negative or positive answer to this question.
4. **Íslenska:** Rafsegulpúls tvískautsgeislunar leiðir til truflunar $H' = -qE_0z f(t)$, þar sem $f(t)$ lýsir tímaeiginleikum hans. Ef stakt vetnisatóm í grunnástandi verður fyrir þessari truflun, hvaða færslur eru mögulegar samkvæmt fyrsta stigs truflanareikningi?

Ef kerfið verður fyrir truflun annarrar tegundar en rafsegulgeislunar

$$H' = V_0 \exp(-\beta r^2) f(t),$$

hvaða færslur eru þá mögulegar fyrir stakt vetnisatóm í grunnástandi samkvæmt fyrsta stigs truflanareikningi?

English: Dipole electromagnetic pulse leads to a perturbation $H' = -qE_0z f(t)$, where $f(t)$ describes its time-dependence. If a single hydrogen atom is in its ground state, what first order transitions can H' promote?

If the system is subject to a non-electromagnetic pulse with

$$H' = V_0 \exp(-\beta r^2) f(t),$$

what transition are possible from the ground state of a single hydrogen atom according to a first order perturbation description?

5. **Íslenska:** Fast ytra rafsvið lýst með $H' = qE_0x$ hefur ekki áhrif á orkuróf einvíðs hreintóna sveifils samkvæmt fyrsta stigs truflanareikningi. Hvernig getum við séð að rafsviðið breyti orkurófinu án þess að beita truflanareikningi og án þess að reikna nákvæma orkurófið?

English: Constant external electric field described by $H' = qE_0x$ does not influence the energy spectrum of a one-dimensional harmonic oscillator according to first order perturbation theory. How can we see that the electric field has effects on the energy spectrum without resorting to perturbation calculations, and without solving exactly for the energy spectrum?