

EÐL306G: Inngangur að skammtafræði

Föstudaginn 7. desember 2012, kl. 09:00-12:00. Kennari: Viðar Guðmundsson.

Hjálpargögn: Kennslubókin „Introduction to Quantum Mechanics“ eftir David J. Griffiths, handskrifaðar nótur nemenda og kennara, reiknivélar. Leyfilegt er að hafa með sér stærðfræðihandbók.

Vægi verkefnanna er jafnt. Skriðið skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefni eru lögð fyrir á íslensku og ensku.

1. **Íslenska:** Kerfi er lýst með tímaóháðum virkja Hamiltons H . Orkuróf hans og ástönd eru E_n og $|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Klukkan $t = 0$ er kerfið í ástandi $|\psi(0)\rangle = 2|0\rangle - i|1\rangle + i|2\rangle$.
 - (a) Finnið væntigildi orkunnar klukkan $t = 0$.
 - (b) Hvert yrði staðalfrávik síendurtekinnna orkumælinga með sama upphafsástandið $|\psi(0)\rangle$.
 - (c) Finnið ástand kerfisins $|\psi(t)\rangle$ klukkan t .
 - (d) Hvert er væntigildi orkunnar klukkan t ? Hvers vegna?

English: A system is described by the time-independent Hamiltonian H . Its energy spectrum and states are E_n and $|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. At time $t = 0$ the system is in the state $|\psi(0)\rangle = 2|0\rangle - i|1\rangle + i|2\rangle$.

- (a) Find the expectation value of the energy at $t = 0$.
- (b) What would the standard deviation of the energy be for repeated measurements of the energy of the same initial state $|\psi(0)\rangle$.
- (c) Find the state of the system $|\psi(t)\rangle$ at time t .
- (d) What is the expectation value of the energy at time t ? Why?

2. **Íslenska:** Rafeind er haldið í tvívíðu fleygbogainnilokunarmætti $V(x, y) = m\omega^2(x^2 + y^2)/2$. Kerfið er ekki í neinu ytra segulsviði. Sé jafna Schrödingers leyst í kartískum hnitum fæst orkurófið $E_{n_x n_y} = \hbar\omega(n_x + 1/2) + \hbar\omega(n_y + 1/2) = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)$ með $n_x, n_y = 0, 1, 2, 3, \dots$. Orkurófið breytist þegar leitað er að fínbyggingu vegna áhrifa afstæðikenningarinnar, víxlverkun spuna og braut-
arhreyfingar og hrifa Zeemans.

- (a) Finnið lægstu leiðréttingu orkurófsins vegna afstæðiskenningarinnar.
- (b) Hvers vegna er hægt að halda því fram að víxlverkun spuna og brautar-
hreyfingar rafeindarinnar ætti að hverfa hér?
- (c) Verður orkurófið háð spuna rafeindarinnar?
- (d) Hver er orka og margfeldni grunnástandsins?

English: An electron is confined by a 2-dimensional parabolic potential $V(x, y) = m\omega^2(x^2 + y^2)/2$. The system is not in any external magnetic field. A solution of the Schrödinger equation in cartesian coordinates gives the energy spectrum $E_{n_x n_y} = \hbar\omega(n_x + 1/2) + \hbar\omega(n_y + 1/2) = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)$ with $n_x, n_y = 0, 1, 2, 3, \dots$. The energy spectrum changes when a finestructure due to a relativistic correction, the spin-orbit interaction, and the Zeeman effect is sought.

- (a) Find the lowest relativistic correction to the energy spectrum.
- (b) Why might it be possible here to argue that the spin-orbit interaction should vanish.
- (c) Will the energy spectrum depend on the spin of the electron?
- (d) What is the energy and the degeneracy of the ground state?

3. **Íslenska:** Ef ljóseind hefði endanlegan massa yrði mættisorka rafeindar um róteind staðsetta í miðju kúluhnitakerfis

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(-r/r_0)}{r},$$

þar sem r_0 er jákvæður fasti háður massa ljóseindarinnar. Gerum ráð fyrir að massi ljóseindarinnar sé svo lítill að $r_0 \gg a$, þar sem a er geisli Bohrs. Notið fyrsta stigs truflanareikning til þess að meta áhrif ljóseindamassans á orku grunnástands vetnisatómsins. Hækkar eða lækkar bindiorkan? Hvers vegna?

English: If a photon had a finite mass the potential energy of an electron close to a proton at the center of a spherical coordinate system would be

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(-r/r_0)}{r},$$

where r_0 is a positive constant dependent on the mass of the photon. We assume the photon mass is small enough that $r_0 \gg a$, where a is the Bohr radius. Use a first order perturbation method to estimate the influence of the photon mass on the energy of the ground state of the hydrogen atom. Does the binding energy increase or decrease? Why?

4. **Íslenska:** Spunakerfi er lýst með virkja Hamiltons $H = E_0 (\sigma_z^2 + \lambda\sigma_z)$.

- Finnið ástönd kerfisins og orkuróf þegar $\lambda = 0$.
- Finnið nákvæmu ástönd kerfisins og orkuróf fyrir hvaða gildi á λ sem er.
- Getur λ haft þverþátt? Rökstyðjið svarið.
- Notið fyrsta stigs truflunarreikning til þess að finna ástönd kerfisins og orkuróf þegar litið er á λ sem truflunarstika. Rökstyðjið aðferðafræði ykkar.
- Fyrir hvaða gildi á λ gildir truflunarlausnin? Hvers vegna?

English: A spin system is described by the Hamiltonian operator $H = E_0 (\sigma_z^2 + \lambda\sigma_z)$.

- Find the states of the system and the energy spectrum when $\lambda = 0$.
- Find the exact states of the system and its energy spectrum for what ever value of λ .
- Can λ be a complex number with a finite imaginary part?
- Use a first order perturbation method to find the states of the system and its energy spectrum if we consider λ to be a perturbation parameter. Justify your method.
- For which values of λ is the perturbation solution valid? Why?

5. **Íslenska:** Við mættisorku þrívíðs einsátta hreintónasveifils er bætt stöðuorkunni $\hbar\omega xyz$. Eru nákvæm ástönd sveifilsins eiginástönd L^2 ? (Hér nægir ekki ágiskun, rökstyðjið vel niðurstöðu ykkar).

English: We add the term $\hbar\omega xyz$ to the potential energy of an isotropic three-dimensional harmonic oscillator. Are the exact states of the oscillator eigenstates of L^2 ? (Here, a guess is not enough, please justify your answer carefully).