

EÐL306G: Inngangur að skammtafræði

Fimmtudaginn 15. desember 2011, kl. 09:00-12:00. Kennari: Viðar Guðmundsson.

Hjálpargögn: Kennslubókin „Introduction to Quantum Mechanics“ eftir David J. Griffiths, handskrifaðar nótur nemenda og kennara, reiknivélar. Leyfilegt er að hafa með sér stærðfræðihandbók.

Vægi verkefnanna er jafnt. Skriðið skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefni eru lögð fyrir á íslensku og ensku.

1. Íslenska: Mættisorkuþrepi er lýst með

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & \text{ef } x \leq 0 \\ 0, & \text{ef } x > 0. \end{cases}$$

Eind ferðast frá vinstri til hægri með orku $E > V_0 > 0$.

- Reiknið líkindi endurkasts við $x = 0$.
- Reiknið líkindi framferðar við $x = 0$.
- Sannreynið að líkurnar varðveitist við þrepið.

English: A step in potential energy is described by

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & \text{if } x \leq 0 \\ 0, & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

A particle with energy $E > V_0 > 0$ travels from left to right.

- Calculate the probability for reflection at $x = 0$.
- Calculate the probability for transmission at $x = 0$.
- Confirm that the probabilities are conserved at the step.

2. **Íslenska:** Einni bundinni rafeind í ytra föstu segulsviði er lýst með Hamiltonvirkjanum $H_0 = \alpha\sigma_z$.

- (a) Finnið eiginástönd hennar og orkuróf.
- (b) Hvernig breytast ástöndin og orkurófið ef til viðbótar við H_0 kemur liðurinn $H' = \beta\sigma_x$?

Þetta kerfi gæti verið minniseining í skammtatölvu, þar sem H' væri tímaháð ytri aðgerð til þess að breyta ástandi einingarinnar. Við erum hér aðeins að velta fyrir okkur áhrifum tímaóháðrar truflunar á kerfið og ættum að geta leyst verkefnið án truflanareiknings. Fastarnir α og β eru með vídd orku.

English: Single bound electron in a constant magnetic field is described by the Hamiltonian $H_0 = \alpha\sigma_z$.

- (a) Find its eigenstates and energy spectrum.
- (b) How do the states and the energy spectrum change if in addition to H_0 we have the term $H' = \beta\sigma_x$?

This system could be a memory unit in a quantum computer, where H' would be a time-dependent external operation to change the state of the unit. Here we are only considering the influence of a time-independent perturbation on the system and we should be able to solve the problem without resorting to perturbation theory. The constants α and β have the dimension of energy.

3. **Íslenska:** Hreintóna sveifill með grunntíðni ω er í ástandi sem lýst er sem samantekt tveggja eiginástanda hans

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|0\rangle + i|1\rangle\}.$$

- (a) Hvert er væntigildi orkunnar, (Hamiltonvirkjans)?
- (b) Hvað gerist við orkumælingu á ástandinu $|\psi\rangle$ og með hvaða líkum?
- (c) Ef kerfið var í ástandinu $|\psi\rangle$ klukkan $t = 0$ hvert verður þá ástandið seinna klukkan $t \neq 0$?

English: A harmonic oscillator with fundamental frequency ω is in a mixed state of two of its eigenstates

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|0\rangle + i|1\rangle\}.$$

- (a) What is the expectation value of the energy, (the Hamiltonian)?
- (b) What happens when the energy of $|\psi\rangle$ is measured and with what probability?
- (c) If the system was in the state $|\psi\rangle$ at $t = 0$ what will its state be at a later time $t \neq 0$?

4. **Íslenska:** Hreintóna sveifill er í eiginástandi sínu $|17\rangle$ klukkan $t = 0$ þegar kveikt er á tímaháðri truflun með styrk í réttu hlutfalli við x .

- (a) Finnið valreglur fyrir kerfið samkvæmt fyrsta stigs tímaháðri truflunarfræði og skýrið merkingu þeirra.
- (b) Hvernig breytast valreglurnar ef truflunin er í réttu hlutfalli við x^2 ?

English: Harmonic oscillator is in its eigenstate $|17\rangle$ at time $t = 0$ when an external time-dependent perturbation with strength proportional to x is turned on.

- (a) Find the selection rules for the system according to first order time-dependent perturbation theory and explain their significance for the system.
- (b) How do the selection rules change if the spatial dependence of the perturbation is proportional to x^2 ?

5. **Íslenska:** Eind með hleðslu q og massa m getur hreyfst frjáls á einvíðum hring með geisla a .

- (a) Finnið stöðluð eiginföll eindarinnar og orkuróf.
- (b) Hvað gildir um margfeldni þeirra?
- (c) Hugsum okkur sama kerfi, en nú í ytra rafsviði sem lýst er með Hamilton-virkjanum $H' = -qEx = -qEr \cos(\phi)$. Reiknið breytinguna sem verður á orku grunnástandsins með fyrsta og annars stigs truflanareikningi.
- (d) Hvernig breytist orka fyrsta örvaða orkustigsins samkvæmt fyrsta stigs truflunarfræði?
- (e) Án þess að reikna, lýsið hvernig hægt væri að reikna annars stigs nálgun á orku fyrstu örvuðu ástandanna.

English: A particle with charge q and mass m is free to move on a one-dimensional ring of radius a .

- (a) Find orthonormal eigenfunctions and the energy spectrum of the particle.
- (b) What can be stated about their degeneracy?
- (c) Same system, but now in an external electric field that is described by the Hamiltonian $H' = -qEx = -qEr \cos(\phi)$. Calculate the first and second order change in energy of the ground state due to this perturbation.
- (d) How does the energy of the first excited state change according to first order perturbation theory?
- (e) Without calculating, describe how the second order perturbation correction to the energy of the first excited states could be calculated.