3.13

(1)

a) Syna at $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

$$
\begin{aligned}
[AB, C] &= ABC - CAB \\
&= ABC - \underbrace{ACB + ACB}_{=0} - CAB \\
&= A[B, C] + [A, C]B
\end{aligned}
$$

---

b) Syna at

$$[x^n, p] = i\hbar n x^{n-1}$$

$$\left\{ [x^n, p] = x^{n-1}[x, p] + [x^{n-1}, p]\, x \quad \text{og so framvegis, om ōg for detaljert} \right\}$$

Ég leyfi mér að vinna í staðarrúmi með bylgjuföllum

$p \rightarrow -i\hbar\partial_x$

$$[x^n, p] f = \left\{ x^n(-i\hbar\partial_x) f - (-i\hbar\partial_x x^n f \right\}$$

$$= -i\hbar x^n \partial_x f + i\hbar n x^{n-1} f + i\hbar x^n \partial_x f$$

$$= i\hbar n x^{n-1} f$$

$$\rightarrow [x^n, p] = i\hbar n x^{n-1}$$

---

c) sýna að $[f(x), p] = i\hbar\partial_x f$ og því

$$[f(x), p] g(x) = \left\{ f(-i\hbar\partial_x g) - (-i\hbar\partial_x f g) \right\}$$

$$= -i\hbar f \partial_x g + i\hbar(\partial_x f) g + i\hbar f \partial_x g = i\hbar(\partial_x f) g$$

2. Sýnidæmi

Tvístiga kerfi með Hamiltonvirkja

$$H = E\left\{ |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + i|1\rangle\langle 2| - i|2\rangle\langle 1| \right\}$$

þar sem $\{|i\rangle, i=1,2\}$ er fullkominn ~~staðal~~ stöðlaður grunnur

finnið eiginvigra og eigingildi H

Í ~~þessum~~ grunni, $\{|i\rangle, i=1,2\}$ er Hamiltonfylkið

$$H = E\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$$

Sannreynist með $\langle i|H|j\rangle$ og jöfnunni fyrir H

Hér skiptir ekki máli að

$$H = E\left[\sigma_z - \sigma_y\right]$$

Eigingildi H eru

$$E_\pm = \pm E\sqrt{2}$$

með eiginvigra

$$|\pm\rangle = \left\{|1\rangle \mp i\left(\sqrt{2} \pm 1\right)|2\rangle\right\} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\sqrt{2}\pm 1\right)^2}}$$

$$= \left\{|1\rangle \mp i\alpha_\pm |2\rangle\right\} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_\pm^2}}$$

með

$$\alpha_\pm = \sqrt{2} \pm 1$$

Hvernig lítur H út í nýja grunninum?

$|\pm\rangle$ eru eigin ástönd H

$\rightarrow \langle + | H | + \rangle = E_+$

$\langle - | H | - \rangle = E_-$

og $\langle \mp | H | \pm \rangle = 0$

$$\rightarrow H = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ef við númerum

$|+\rangle \rightarrow 2$

$|-\rangle \rightarrow 1$

Hver eru væntigildi H fyrir ástöndin $|1\rangle$ og $|2\rangle$?

Notum jöfnuna fyrir H, eða lesum úr útsetningu H í þeim grunni

$$\langle 1 | H | 1 \rangle = E \quad , \quad \langle 2 | H | 2 \rangle = -E$$