Valreglur

Færslulíkur voru alltaf háðar $\langle a | F | b \rangle$

Nálgunin fyrir víxlverkunina notaða hér milli rafeinda og ljóss er tvískauts-nálgun.

Þegar tillit er tekið til breytingar rafsegulsviðsins í staðarrúminu koma í ljós hærri stigs liðir

Raf fjórskaut, segul tvískaut og segul fjórskaut.....

Allir þessir liðir hafa mism. fylkjastök

Við skoðum eiginleika raftvískauts fylkjastaksins hér. Það er mjög oft 0

→ þá eru færslur milli $|a\rangle$ og $|b\rangle$ bannaðar í fyrsta stigs nálgun

↓

Valreglur fyrir færslur

Til eru mjög almennar reglur t.þ.a reikna fylkjastök

Wigner-Eckhart setning,

en við skoðum kúlusamhverfu fyrir einföld ástönd atóms

$$\langle n'l'm'|\bar{r}|nlm\rangle$$

<u>m og m'</u>

$$[L_z, x] = i\hbar y, \quad [L_z, y] = -i\hbar x$$

$$[L_z, z] = 0$$

$$0 = \langle n'l'm'|[L_z, z]|nlm\rangle$$

$$= \langle n'l'm'|(L_z z - zL_z)|nlm\rangle$$

$$= \langle n'l'm'|(m'\hbar z - z m\hbar)|nlm\rangle$$

$$= (m'-m)\hbar\langle n'l'm'|z|nlm\rangle$$

$\rightarrow$ annaðhvort $m = m'$
eða $\langle n'l'm'|z|nlm\rangle = 0$

$\hookrightarrow$ $\langle n'l'm'|z|nlm\rangle = 0$ ef $m \neq m'$

$$\langle n'l'm'|[L_z, x]|nlm\rangle$$

$$= (m'-m)\hbar\langle n'l'm'|x|nlm\rangle$$

$$= i\hbar\langle n'l'm'|y|nlm\rangle$$

$\rightarrow$ $(m'-m)\langle n'l'm'|x|nlm\rangle = i\langle n'l'm'|y|nlm\rangle$

eins fæst

$$(m'-m)\langle n'l'm'|y|nlm\rangle = -i\langle n'l'm'|x|nlm\rangle$$

$\hookrightarrow$ annaðhvort $(m'-m)^2 = 1$ eða
$\langle n'l'm'|x|nlm\rangle = \langle n'l'm'|y|nlm\rangle = 0$

→ Aðeins forður með
$\boxed{\Delta m = \pm 1 \text{ eða } 0}$

Tvískautsforður
Raftvískaut

Eins er sýnt í kennslubókinni
að fyrir sömu forður
verður að gilda að

$$\boxed{\Delta l = \pm 1}$$

Liðir með hærri skauta nálgun
koma með aðrar valreglur,
en eru almennt veikari eftir
því sem stig skautsins er
hærra

Forsla sem er bönnuð 1. stig
rafskautsforsla getur verið
leyfð sem 1. stigs segultvískauts
eða raffjórskautsforsla

NMR-forður — segultvískaut

Grænalínan í norðurljósum
er raffjórskautsforsla
með $\Delta l = 2$

Skoðum dæmi þar sem nákvæm lausn er möguleg

$a^\dagger = a_+ \ , \ a = a_-$

$$H_0 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}\right)$$ hreintóna sveifill

með þekkt ástönd og róf

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \tfrac{1}{2}\right), \ n = 0, 1, 2, \dots$$

Gerum ráð fyrir tímaháðri truflun

$$H'(t) = \hbar\Omega\left(a^\dagger + a\right)\Theta(t)$$

Heaviside þrepafallið

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{ef } t < 0 \\ 1 & \text{ef } t > 0 \end{cases}$$

Kveikt er á truflunni klukkan $t = 0$ → þess vegna tímaháð truflun, $x \sim a^\dagger + a$ → ytra rafsvið

Ef truflunin væri alltaf til staðar þá er ekkert tímaháð og við gætum reiknað nýja orkurófið og ástöndin með tímaóháðum truflanareikningi

Stark-hrif

$$E_n^{(1)} = 0 \ , \ E_n^{(2)} \neq 0$$

Vegna samhverfu

$$E_n^{(1)} \sim \langle n | x | n \rangle = 0$$

Ef við finnum nákvæma tímaháða lausn hljótum við að sjá hvernig truflanareikningur bregst þ. truflanarstærðin stuttar

Viljum leysa

$$i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = (H_0 + H'(t))|\psi(t)\rangle$$

með upphafsskilyrðum

$$|\psi(0)\rangle = |0\rangle$$

$$H = H_0 + \lambda(a^\dagger + a)\hbar\omega$$

ef $t \geq 0$ og $\lambda = \frac{\hbar\Omega}{\hbar\omega}$

Vitum að hliðrunin veldur hliðrun eindar, reynum því hliðrunar-virkjann

$$U(-\lambda) = e^{\lambda(a-a^\dagger)}$$

Athugum aðeins, almennt gildir

$$e^{\lambda A} B e^{-\mu A} = B + \lambda[A,B] + \frac{\lambda^2}{2!}[A,[A,B]] + \cdots$$

$$[a - a^\dagger, a] = -[a^\dagger, a] = 1$$

$\longrightarrow$

$$U(-\lambda)\, a\, U^\dagger(-\lambda) = a + \lambda$$

$$U(-\lambda)\, a^\dagger U^\dagger(-\lambda) = a^\dagger + \lambda$$

Því fæst

$$U(-\lambda)H_0U^{+}(-\lambda) = H_0 + \lambda\hbar\omega(a^{+}+a) + \lambda^2\hbar\omega = H + \lambda^2\hbar\omega$$

Við höfum fundið ummyndun milli H_0 og H, fyrir utan fasta

Veljum því

$$|\psi(t)\rangle = |\phi(t)\rangle e^{i\lambda^2\omega t}$$

og reynum í hreyfijöfnunni

$$i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = (H_0 + H'(t))|\psi(t)\rangle$$

$$i\hbar\left\{\partial_t|\phi(t)\rangle + i\lambda^2\omega|\phi(t)\rangle\right\}e^{i\lambda^2\omega t} = \left\{H_0 + \lambda\hbar\omega(a^{+}+a)\right\}|\phi(t)\rangle e^{i\lambda^2\omega t}$$

$$= \left\{U(-\lambda)H_0U^{+}(-\lambda) - \lambda^2\hbar\omega\right\}|\phi(t)\rangle e^{i\lambda^2\omega t}$$

$$\to \quad i\hbar\partial_t|\phi(t)\rangle = U(-\lambda)H_0U^\dagger(-\lambda)|\phi(t)\rangle$$

Það margfalda með $U^\dagger(-\lambda)$ frá vinstri gefur

$$\boxed{i\hbar\partial_t|\alpha(t)\rangle = H_0|\alpha(t)\rangle \quad , \quad |\alpha(t)\rangle = U^\dagger(-\lambda)|\phi(t)\rangle}$$

Þetta er jafnan fyrir einfaldan hreintóna sveifil við þekkjum lausnir hennar og tímaþróun

$$\to \quad |\alpha(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-iE_nt/\hbar}|n\rangle$$

Við vildum finna $|\Psi(t)\rangle$ og verðum því að ummynda til baka

$$|\Psi(t)\rangle = e^{i\lambda^2\omega t}|\phi(t)\rangle = e^{i\lambda^2\omega t}U(-\lambda)|\alpha(t)\rangle = e^{i\lambda^2\omega t}U(-\lambda)\sum_n c_n e^{-iE_nt/\hbar}|n\rangle$$

(8)

(Við ættum líka eftir að finna C_n-in samkvæmt upphafsskilyrðum)

En fyrst þurfum við að nota eina mikilvæga virkjasetn. eun

Ef $[A,[A,B]] = 0$ og $[B,[A,B]] = 0$

$$\rightarrow e^{A+B} = e^{A} e^{B} e^{-\frac{1}{2}[A,B]} = e^{B} e^{A} e^{+\frac{1}{2}[A,B]}$$

$$U(-\lambda) = e^{-\lambda(a^{+}-a)} = e^{-\lambda a^{+}} e^{\lambda a} e^{-\lambda^2/2} = e^{\lambda a} e^{-\lambda a^{+}} e^{\lambda^2/2}$$

$\rightarrow$ Vitum að $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$, finnum C_n

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\lambda^2 \omega t} U(-\lambda)|\alpha(t)\rangle$$

$$\rightarrow |\psi(0)\rangle = U(-\lambda)|\alpha(0)\rangle$$

$$\rightarrow |0\rangle = U(-\lambda)|\alpha(0)\rangle$$

$$|\alpha(0)\rangle = U^\dagger(-\lambda)|0\rangle$$

$$= e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda a}|0\rangle e^{-\lambda^2/2}$$

$$= \underbrace{e^{\lambda a^\dagger}|0\rangle}\, e^{-\lambda^2/2}$$

$$= e^{-\lambda^2/2}\left\{\sum_n \frac{(\lambda a^\dagger)^n}{n!}\right\}|0\rangle$$

$$= e^{-\lambda^2/2}\left[\sum_n \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} \underbrace{\frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle}\right]$$

$$= e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\sum_n \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

þetta kallast samfasa ástand, sem þið eigið eftir að lara um síðar

En við höfðum líka

$$|\alpha(0)\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$$

$$\rightarrow \quad \boxed{c_n = \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}e^{-\lambda^2/2}}$$

$$|\alpha(t)\rangle = \sum_n \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} e^{-iE_nt/\hbar}|n\rangle e^{-\lambda^2/2}$$

$$= \sum_n \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}|n\rangle e^{-\lambda^2/2}$$

$$= e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_n \frac{\lambda^n e^{-i\omega n t}}{\sqrt{n!}}|n\rangle e^{-\lambda^2/2}$$

$$= e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_n \frac{(\lambda e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle e^{-\lambda^2/2}$$

og að lokum

$$|\Psi(t)\rangle = e^{i\lambda^2\omega t - \lambda^2/2}\, U(-\lambda)\, e^{-i\frac{\omega t}{2}} \sum_n \frac{(\lambda e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

Nú getum við spurt t.d. hverjar eru líkur ~~þess~~ að eindin haldist í $|0\rangle$? Viljum þá reikna $\langle 0|\Psi(t)\rangle$

Notum þar að $\langle 0|U(-\lambda) = e^{-\lambda^2/2}\sum_m \frac{\lambda^m}{\sqrt{m!}}\langle m|$

$$\to \langle 0|\Psi(t)\rangle = e^{-\lambda^2} e^{i\lambda^2\omega t - i\omega t/2} \sum_{nm} \frac{(\lambda e^{-i\omega t})^n \lambda^m}{\sqrt{m!\,n!}} \langle m|n\rangle$$

$$= e^{-\lambda^2} e^{i\omega(\lambda^2 - \frac{1}{2})t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 e^{-i\omega t})^n}{n!} = e^{-\lambda^2 + i\omega(\lambda^2 - \frac{1}{2})t} \exp\{\lambda^2 e^{-i\omega t}\}$$

$$= e^{i\omega(\lambda^2 - \frac{1}{2})t} \exp\{\lambda^2(e^{-i\omega t} - 1)\}$$

(11)

því getum við fundið

$$|\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 = \exp\left\{\lambda^2\left(e^{i\omega t}-1\right)+\lambda^2\left(e^{-i\omega t}-1\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{-2\lambda^2+\lambda^2\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{-2\lambda^2+2\lambda^2\cos(\omega t)\right\}$$

$$= \exp\left\{-2\lambda^2\left(1-\cos(\omega t)\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{-4\lambda^2\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right\}$$

$$\to \boxed{\begin{aligned} P_{0\to 0}(t) &= |\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 \\ &= \exp\left\{-4\lambda^2\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right\}\end{aligned}}$$

$$P_{0\to \text{ekki } 0}(t) = 1 - P_{0\to 0}(t)$$

$$= 1-\exp\left\{-4\lambda^2\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right\}$$

Líðum getur við

$$P_{0\to 0}(t) \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 1-4\lambda^2\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

$$+8\lambda^4\sin^4\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

$$-\frac{32}{3}\lambda^6\sin^6\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

$$+O(\lambda^8)$$

* Endanleg truflanaröð getur leitt til líkinda sem verða stærri en 1 eða minni en 0 þegar λ verður stórt

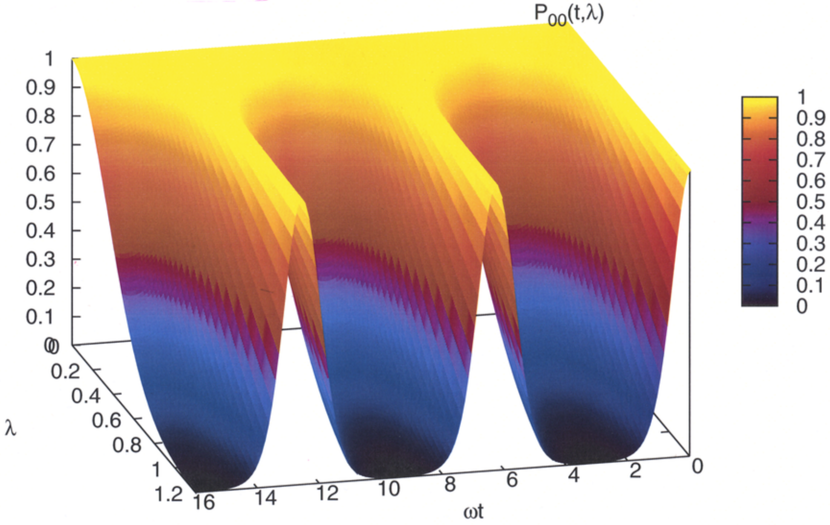
* Nákvæm lausn og truflanalausnir sýna „Rabi Sláff"
fyrir veika truflun er sláttur nákvæmu lausnarinnar nærri því að fylgja $1-4\lambda^2\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$, en fyrir sterka truflun verða sveiflurnar mjög ósamhverfar

↳ Sterk truflun → eindin er mest af tímanum utan $|0\rangle$-ástandsins, enda mörg ástönd til þess að eyða tíma í

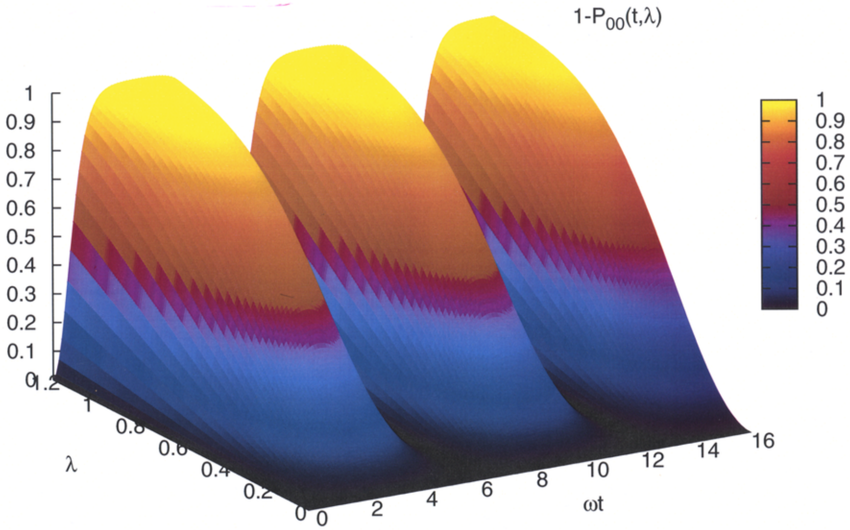
* Enginn raunverulegur líftími getur sést í þessu kerfi.
Ástöndin eru teljanlega mörg, því mun kerfið alltaf geta komið aftur í upphafsástand, sérstakt orkuróf ↔ jafndreift veldur því að Rabi-tíðnin er ekki hliðruð

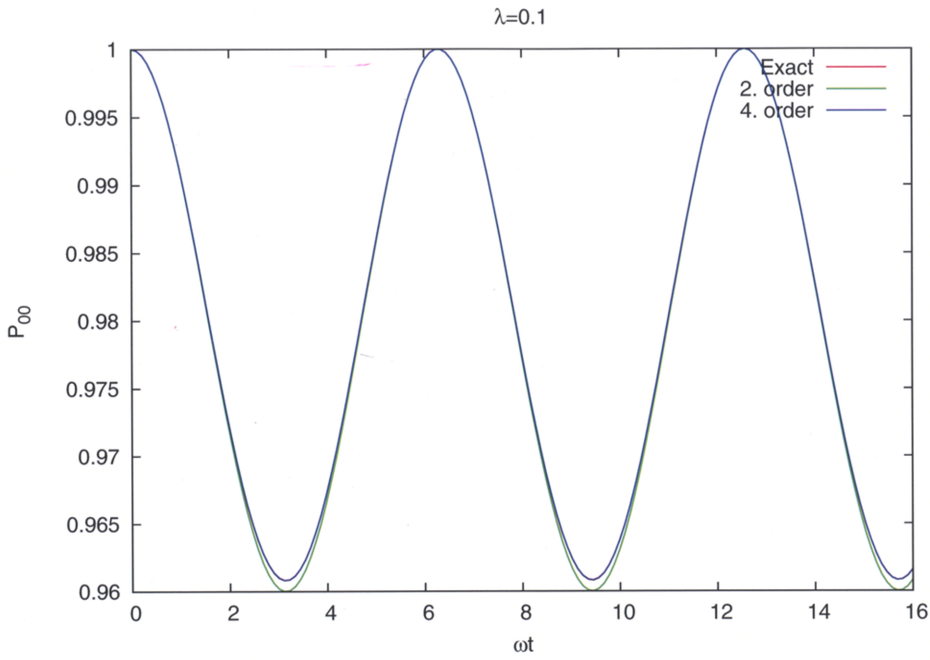
* Til þess að finna „meðalævi" þarf einhver þáttur kerfisins að hafa samfelld orkuástönd → endurkomutími kerfis verður óendanlegur

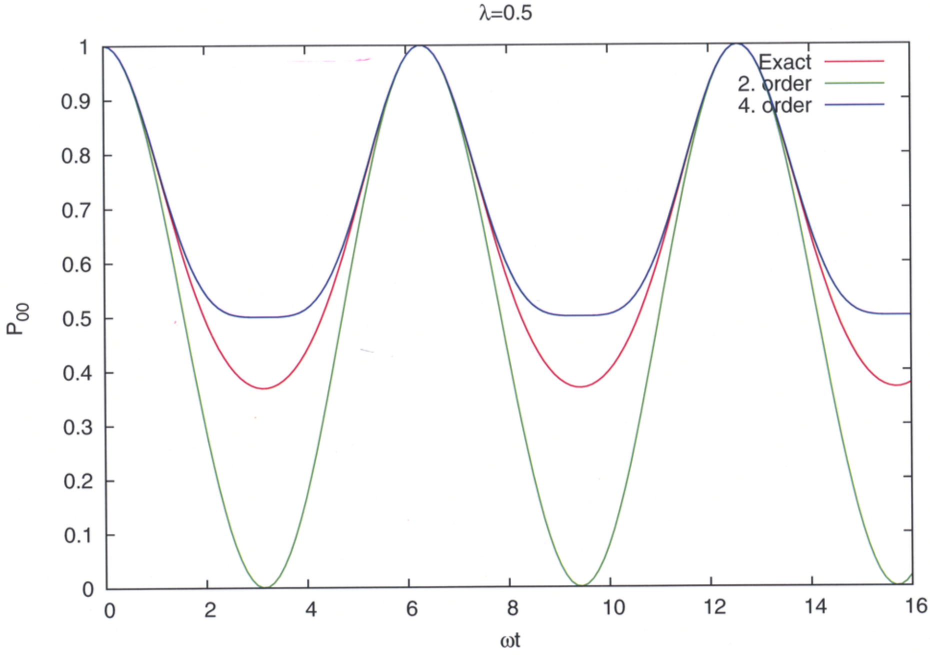
* Með rafsviðinu kemur orka inn í kerfið → blandað ástand



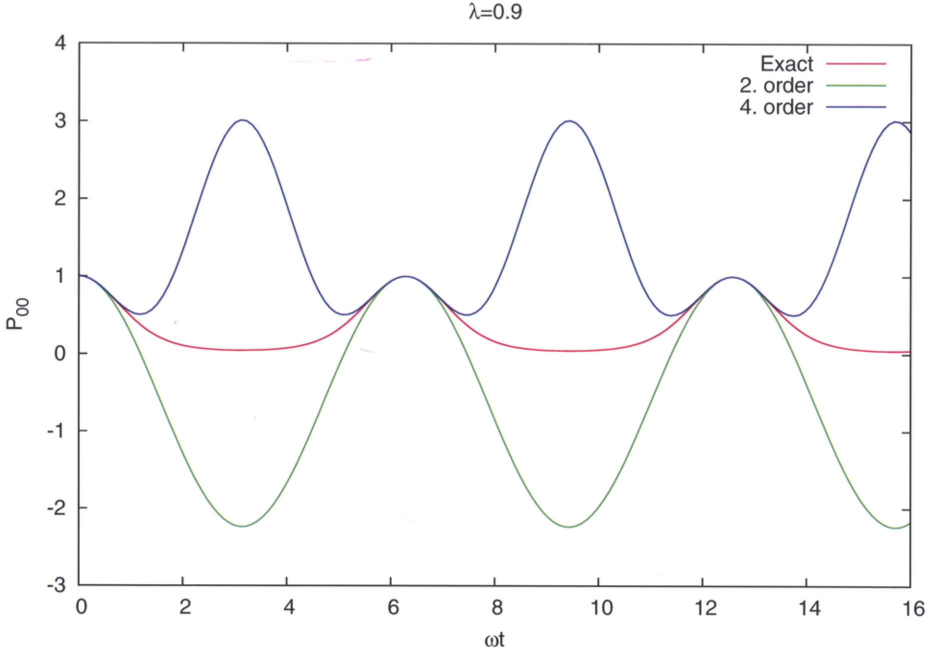
$P_{00}(t,\lambda)$
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
λ
16
14
12
10
8
6
4
2
0
ωt
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0

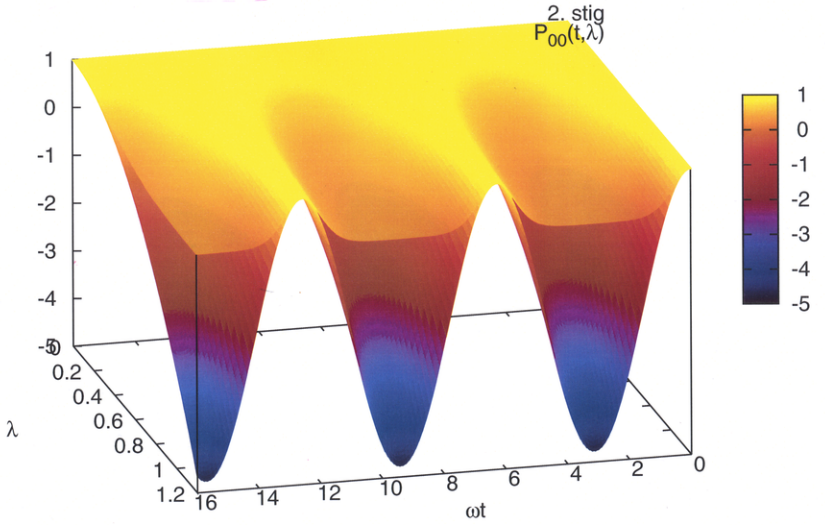

1-P00(t,λ)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
λ
0
2
4
6
8
10
12
14
16
ωt
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0

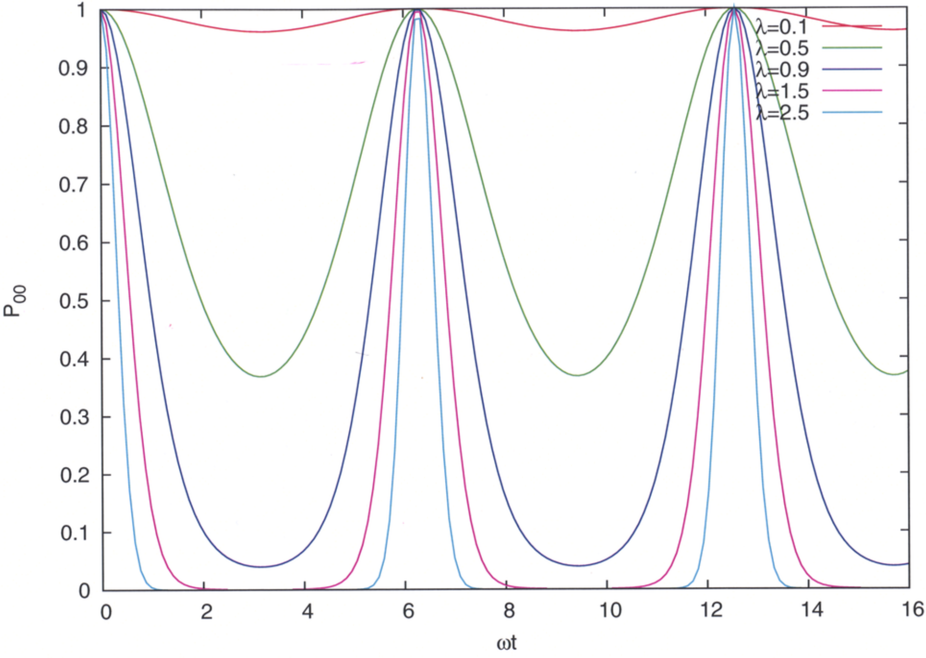

λ=0.1
Exact
2. order
4. order
1
0.995
0.99
0.985
0.98
0.975
0.97
0.965
0.96
P_{00}
0
2
4
6
8
10
12
14
16
ωt


λ=0.5
Exact
2. order
4. order
P00
ωt
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
2
4
6
8
10
12
14
16

(18)




2. stig
$P_{00}(t,\lambda)$
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
λ
16
14
12
10
8
6
4
2
0
ωt



1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
P_{00}
0
2
4
6
8
10
12
14
16
ωt
λ=0.1
λ=0.5
λ=0.9
λ=1.5
λ=2.5