Samlagning hverfiþunga

Athugum tvær $\frac{1}{2}$-spuna eindir

Heildarkerfið er í ástandi sem er samantekt fjögurra ástanda

$$\uparrow\uparrow\ ,\ \uparrow\downarrow\ ,\ \downarrow\uparrow\ ,\ \downarrow\downarrow$$

Hver er heildar hverfiþungi kerfisins?

$$\bar{S} = \bar{S}^{(1)} + \bar{S}^{(2)}$$

Hvert ástand er eiginástand

$$S_z = S_z^{(1)} + S_z^{(2)}$$

$$S_z \chi_1 \chi_2 = (S_z^{(1)} + S_z^{(2)}) \chi_1 \chi_2$$

$$= \{S_z^{(1)} \chi_1\} \chi_2 + \chi_1 \{S_z^{(2)} \chi_2\}$$

$$= \{\hbar m_1 \chi_1\} \chi_2 + \chi_1 \{\hbar m_2 \chi_2\}$$

$$= \hbar (m_1 + m_2) \chi_1 \chi_2$$

og því

$$\begin{array}{ll} \uparrow\uparrow & m = 1 \\ \uparrow\downarrow & m = 0 \\ \downarrow\uparrow & m = 0 \\ \downarrow\downarrow & m = -1 \end{array}$$

skrifið, því við búumst við $-1, 0, +1 = m$

og öllum einföldum,

ef $S=1$

skoðum $S_-(\uparrow\uparrow)$

$$\dot{S}_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_-(\uparrow\uparrow) = (S_-^{(1)}\uparrow)\uparrow + \uparrow(S_-^{(2)}\uparrow)$$

$$= (\hbar\downarrow)\uparrow + \uparrow(\hbar\downarrow)$$

$$= \hbar(\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow)$$

þannig að ástöndin með $S=1$ eru

$$\left.\begin{array}{l} |1,1\rangle = \uparrow\uparrow \\ |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \\ |1,-1\rangle = \downarrow\downarrow \end{array}\right\} \quad S=1 \text{ þrístig}$$

hér er nauðsynlegt að reyna að

$$(S_-^{(1)} + S_-^{(2)})\uparrow\downarrow = +(\hbar\downarrow)\downarrow + \uparrow\cdot 0$$

$$(S_-^{(1)} + S_-^{(2)})\downarrow\uparrow = 0 + \hbar\downarrow\downarrow$$

$$\rightarrow S_-|1,0\rangle \sim |1,-1\rangle$$

3

En, eftir er eitt ástand (↑↓ − ↓↑) þ.a.

$S_-(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) = 0$

Þetta er ástand með $s = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \\ \text{einstig} \end{array} \right.$$

Við þurfum að samyrkja betur flokkunina í einstig ($s=0$) og þrístig ($s=1$)

Eru þessi ástönd eiginástönd S^2 ~~með~~ réttum eigingildum?

$$S^2 = (S^{(1)} + S^{(2)}) \cdot (S^{(1)} + S^{(2)})$$
$$= \{S^{(1)}\}^2 + \{S^{(2)}\}^2 + 2\bar{S}^{(1)} \cdot \bar{S}^{(2)}$$

$$\bar{S}^{(1)} \cdot \bar{S}^{(2)}(\uparrow\downarrow) = (S_x^{(1)}\uparrow)(S_x^{(2)}\downarrow) + (S_y^{(1)}\uparrow)(S_y^{(2)}\downarrow) + (S_z^{(1)}\uparrow)(S_z^{(2)}\downarrow)$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2}\downarrow\right)\left(\frac{\hbar}{2}\uparrow\right) + \left(\frac{i\hbar}{2}\downarrow\right)\left(-\frac{i\hbar}{2}\uparrow\right) + \left(\frac{\hbar}{2}\uparrow\right)\left(-\frac{\hbar}{2}\downarrow\right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}(2\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow)$$

og líka

$$\vec{S}^{(1)}\cdot\vec{S}^{(2)}(\downarrow\uparrow) = \frac{\hbar^2}{4}(2\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

þess vegna fæst

$$\vec{S}^{(1)}\cdot\vec{S}^{(2)}|1,0\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{2\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow + 2\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\right\} = \frac{\hbar^2}{4}|1,0\rangle$$

$$\vec{S}^{(1)}\cdot\vec{S}^{(2)}|0,0\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{2\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow - 2\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\right\} = -\frac{3\hbar^2}{4}|0,0\rangle$$

$$\to S^2|1,0\rangle = \Big\{\underbrace{\frac{3\hbar^2}{4}}_{\{S^{(1)}\}^2} + \underbrace{\frac{3\hbar^2}{4}}_{\{S^{(2)}\}^2} + \underbrace{2\frac{\hbar^2}{4}}_{2\vec{S}^{(1)}\cdot\vec{S}^{(2)}}\Big\}|1,0\rangle = \underbrace{2\hbar^2}_{s(s+1)\text{ fyrir } s=1}|1,0\rangle$$

og

$$S^2|0,0\rangle = \left[\frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} - 2\frac{3\hbar^2}{4}\right]|0,0\rangle = 0$$

svo eiginástand S^2 með $s=0$

Almennt gildir fyrir tvo spuna/hverfiþunga s_1 og s_2 að við fáum spuna skala frá (s_1+s_1) niður í $|s_1-s_2|$ í heiltöluskrefum

$$s = (s_1+s_2),\ (s_1+s_2-1),\ (s_1+s_2-2),\ \cdots\cdots,\ |s_1-s_2|$$

$$|s,m\rangle = \sum_{m_1+m_2=m} C^{s_1 s_2 s}_{m_1 m_2 m} |s_1,m_1\rangle|s_2,m_2\rangle$$

Clebsch-Gordan-stuðlar

Rafeind í vetni í ástandi $|nlm\rangle$

getur haft heildarhverfiþunga

$l + \frac{1}{2}$ eða $l - \frac{1}{2}$ þegar spuni er tekinn með

Ef kjarnspuna er bætt við fæst

$$l+1, \; l, \; l-1$$

Eins eindir

Jafna Schrödingers gildir líka fyrir fleiri eindir en eina

Fyrir tvær eindir hafum við

$$i\hbar \partial_t \Psi = H \Psi$$

með $\Psi(\bar{r}_1, \bar{r}_2, t)$ og H

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(\bar{r}_1, \bar{r}_2, t)$$

$\bar{r}_1$ og $\bar{r}_2$ eru hnit sem eiga við eind 1 og 2

Bylgjufallið er normalegt og ber fyrir líkindatúlkun á ~~se~~ vanalegan hátt

$$\int d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 \, |\psi(\bar{r}_1, \bar{r}_2, t)|^2 = 1$$

fyrir mætti sem eru ekki háð t er til lausn á forma (?) p.a.

$$\Psi(\bar{r}_1, \bar{r}_2, t) = \psi(\bar{r}_1, \bar{r}_2) e^{-iEt/\hbar}$$

og tímaóháða jafna

Schrödingers

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2-\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2+V\right\}\phi=E\phi$$

er eigingildisjafna með heildarorkuna E sem eigingildi

Bose og Fermi-eindir

Er mögulegt að eind 1 sé lýst með $\psi_a(\bar{r})$ og eind 2 með $\psi_b(\bar{r})$ þ.a.

$$\psi(\bar{r}_1,\bar{r}_2)=\psi_a(\bar{r}_1)\,\psi_b(\bar{r}_2)$$

Eind 1 væri í ástandi $|a\rangle$ og eind 2 í $|b\rangle$

Við vorum rétt áðan að fjalla um ástand

$$|0,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow\right\}$$

þar sem þetta var ekki hægt að gera

samtvinnuð ástand

en stöðum, setjum að þetta séu eins eindir

þær þekkjast ekki í sundur!!

loysnin kann vera við

$$\psi_{\pm}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = A\left\{\psi_a(\bar{r}_1)\psi_b(\bar{r}_2) \pm \psi_b(\bar{r}_1)\psi_a(\bar{r}_2)\right\}$$

samhvørv og andsamhvørv samantekt

{ Í príviddini eru ikki fleiri møguleikar til tess at byggja at eindirnar kunnu ikki í sundur. Í tvívídd er hægt at finna fleiri -> anyons }

hesir tveir møguleikar kallast bose-eindir (+) og fermi-eindir (−)

Síðan hevur komið í ljós at eindir við heiltalsspinn eru boseeindir og hálvtalsspinn eru Fermi eindir

Síðar mun sjást að samhverfan eða andsamhverfan á við heildarbylgjufallið = brautarhluti og spuna-hluti.

Fermieindir í sama ástandinu, t.d. $|a\rangle$

$$\hookrightarrow \quad \psi_-(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = A\left\{\psi_a(\bar{r}_1)\psi_a(\bar{r}_2) - \psi_a(\bar{r}_1)\psi_a(\bar{r}_2)\right\} = 0$$

Pauli einsetulögmálið er vegna kröfu um andsamhverfu bylgjufallsins fyrir Fermieindir

Við getum skilgreint skiptavirkja P þ.a.

$$P f(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = f(\bar{r}_2, \bar{r}_1)$$

$P^2 = 1$ og eigingildin eru ± 1

fyrir eins eindir verður að gilda að

$$[P, H] = 0$$

H og P með annað hvort eigingildið ± 1 eiga þá sameiginleg ástönd

kerfi helst því áfram með þá samhverfu (± 1) sem valin er í upphafi

$$\boxed{\text{samhverfukrafa}}$$

$$\boxed{\psi(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = \pm\, \psi(\bar{r}_2, \bar{r}_1)}$$

Skipta kraftur

Tvær eindir

$$\psi_+(x_1 x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) + \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)\right\} \qquad \text{Bose}$$

$$\psi_-(x_1 x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) - \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)\right\} \qquad \text{Fermi}$$

Reiknum

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle + \langle x_2^2 \rangle - 2\langle x_1 x_2 \rangle$$

þá fæst

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_\pm = \langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b - 2\langle x \rangle_a \langle x \rangle_b \underbrace{\mp 2 |\langle x \rangle_{ab}|^2}_{(*)}$$

með

$$\langle x \rangle_{ab} \equiv \int dx\, \psi_a^*(x)\, x\, \psi_b(x)$$

Síðasti liðurinn

$$\mp 2|\langle x\rangle_{ab}|^2$$

fæst ekki fyrir mismunandi eindir

Ef við höfum ψ_a og ψ_b gefin á takmörkuðu svæði sést að fermieindir halda lengra bili milli sín, en bóseindir dragast að eins saman

Einungis vegna samhverfu bylgjufallanna

Því mun koma í ljós að rafeindir með eins spuna (þekkjast ekki í sundur) hafa veikari fráhrindikraft milli sín en rafeindir með sitt hvorn spunann (aðgreinanlegar) hafa sterkari fráhrindingu

Eða öðeins stýrar í atómi

Heildarbylgjufallið $\psi(\vec{r})\chi(s)$ er andsamhverft

Ef $\chi(s)$ er spuna einstigið þá er $\chi(s)$ andsamhverft og $\psi(\vec{r})$ því samhverft sem leiðir til efnatengis

Fínt jafnvægi raf- og samhverfu krafta