Spuni

Tilraunir sýna að rafeindin
hefur „viðbótar" hverfiþunga
sem kemur fram sem
tvístig → spuni

Afstæðiskenning +
1. stigs hreyfijafna
Dirac jafna
→ spuni

Galilei-ummyndun
+ 1. stigs hreyfijafna
→ spuni

Bætar jöfnur + Rafsegulsvið
→ g-stuðull = 2

Hverfiþunga tvístig þýðir
1/2-tölu hverfiþungi
Ekki hægt að tengja við
staðarrúmið →
ekki hringsnúningur um
eigin ás

Engin þekktur rafeindageisli,
jafnvel sá sígilt reiknaði
krefst of mikils hraða í
hringsnúningi

því er sagt að
spuni sé eiginhverfi-
þungi eindarinnar.
Tilkominn vegna
skammtalýsingar

Til eru þær hugmyndir
að spunium sé vegna
hringflæðis orku í
bylgjufalli eindarinnar.
→ Bylgjueiginleiki

spuni er til sem hálftölu
og heiltölu spuni

e	γ	π	$g_{\mu\nu}$
$1/2$	1	0	2

Spuni er hverfiþungi

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z$$

$$[S_y, S_z] = i\hbar S_x$$

$$[S_z, S_x] = i\hbar S_y$$

$$S^2 |s,m\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s,m\rangle$$

$$S_z |s,m\rangle = \hbar m |s,m\rangle$$

$$S_\pm |s,m\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m\pm 1)}\, |s,(m\pm 1)\rangle$$

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\ldots$$

$$m = -s, -s+1, \ldots\ldots, s-1, s$$

½ - spuni

Rafeindir og fjöldi annarra einda hefur $s = 1/2$

Einungis tvö eiginástönd (tvístig)

$$|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle \quad \text{spuni upp} \uparrow$$

$$|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \quad \text{spuni niður} \downarrow$$

Almennt ástand er samantekt þessara eiginástanda

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_-$$

(spinór - spinnill)

$$S^2 \chi_+ = \frac{3}{4}\hbar^2 \chi_+$$

$$S^2 \chi_- = \frac{3}{4}\hbar^2 \chi_-$$

Alla spunavirkjana (½-tölu) má útsetja sem 2x2-fylki.

T.d.

$$S^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Á samsvarar hátt fæst

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

og frá

$$S_+ \chi_- = \hbar \chi_+ \qquad S_- \chi_+ = \hbar \chi_-$$

og

$$S_+ \chi_+ = 0$$

$$S_- \chi_- = 0$$

$$\rightarrow S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eins má nota

$$S_\pm = S_x \pm i S_y$$

til ~~þess~~ að fá

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$$

$$S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$$

og því

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Venja er að tákna ½-spuna virkjana við fylki Pauli

$$\overline{S} = \frac{\hbar}{2}\overline{\sigma}$$

þar sem

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

S_x, S_y, S_z og S^2 eru öll Hermískir virkjar, enda mælistærðir

$S_\pm$ eru ekki Hermískir, enda ekki mælistærðir

Eiginástönd S_z eru

$$\chi_+ = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{með eigingildi } +\frac{\hbar}{2}$$

$$\chi_- = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{— || —} \quad -\frac{\hbar}{2}$$

líkindi þess að mæling S_z á $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ gefi $+\frac{\hbar}{2}$ eru $|a|^2$

og líkindin fyrir $-\frac{\hbar}{2}$ eru $|b|^2$

Bara þessir tveir möguleikar

$$\to |a|^2 + |b|^2 = 1$$

stöðlum $\chi = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

Hvað gerist ef ég mæli S_x á χ?

þarf að þekkja eiginástönd og gildi S_x

$$\chi_+^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{með eigingildi } +\frac{\hbar}{2}$$

$$\chi_-^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{með eigingildi } -\frac{\hbar}{2}$$

$$\to \chi = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)\chi_+^{(x)} + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)\chi_-^{(x)}$$

$$\left\{ = \frac{a+b}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{a-b}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \right\}$$

Mæling S_x á x gefur

$+\frac{\hbar}{2}$ með líkum $\frac{|a+b|^2}{2}$

$-\frac{\hbar}{2}$ með líkum $\frac{|a-b|^2}{2}$

Sömu mæliniðurstöður, en með öðrum líkum

Eftir mælinguna á S_x er eindin með vel skilgreint x-þátt spuna, eindin er komin í eigin ástand S_x

Mæling á S_z setur eindina í eigin ástand S_z

heildarlíkur

$$\frac{1}{2}\left\{|a+b|^2+|a-b|^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(a^*+b^*)(a+b)+(a^*-b^*)(a-b)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{|a|^2+|b|^2+a^*b+b^*a+|a|^2+|b|^2-a^*b-b^*a\right\}=|a|^2+|b|^2=1$$

Áhrif segulsviðs á spuna

Segulsvið hefur áhrif á brautarhreyfingu hlaðinna einda og spuna þeirra

Hamiltonvirki brautarhreyfingarinnar breytist

$$H = \frac{p^2}{2m} + V$$

$$\rightarrow \frac{\pi^2}{2m} + V$$

þar sem $\bar{\pi} = \bar{p} + e\bar{A}$

með vigursviðið $\bar{A}$ þ.a.

$$\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$$

$$\bar{E} = -\partial_t \bar{A}$$

ef $\bar{\nabla} \cdot \bar{A} = 0$

Kvarðafrelsi

Einnig bætist við liður

$$H = -\bar{\mu} \cdot \bar{B}$$

þar sem B er ytra segulsvið sem eindin er sett í og $\bar{\mu}$ er segulvægi eindarinnar

Segulvægi eindar er í réttu hlutfalli við spuna hennar –

$$\bar{\mu} = \gamma \bar{S}$$

Í sígildri eðlisfræði er

$\gamma = \frac{q}{2m}$ fyrir eind þ.s.

massinn og hleðslan

eru eins dreifð.

Fyrir Dirac jöfnuna + EM

fæst $\gamma = -\frac{e}{m}$ fyrir

rafeindir

og líka fyrir óafstæða

1. stigs - hreyfijöfnu

A. Goswami

Y. Takahashi

skilgreindur er g-stuðull

$$\gamma = -g\frac{e}{2m}$$

$g = 2$ í tómarúmi

skömmtun rafsegulsviðs

leiðir til leiðréttinga á g

$$g = 2\left\{1 + \frac{\alpha}{2\pi} + \cdots\cdots\right\}$$

$$= 2.0023193043617$$

QED

Í efni getur g tekið ýmiss gildi

vegna uppbyggingu þess,

kristallagrind - - - - -

$$H = -\gamma \bar{B} \cdot \bar{S}$$

því eru spunaástöndin tvöföld í orku ef $B = 0$

Segulsviðið brýtur þá tvöfeldni

Dæmi Larmor pólvelta

Eindi í einsleitu segulsviði skoðum spuna, en engar brautarhreyfingar

Fastum

$$\bar{B} = B_0 \hat{k}$$

$$H = -\gamma \bar{B} \cdot \bar{S}$$

$$= -\gamma B_0 S_z = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eigin ástönd H eru því eigin ástönd S_z

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ með } E_+ = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2}$$

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ með } E_- = +\frac{\gamma B_0 \hbar}{2}$$

Tímaþróun er samkvæmt

$$i\hbar \partial_t \chi = H\chi$$

H er óháð tíma

$\downarrow$

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+ t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_- t/\hbar}$$

$$= \begin{pmatrix} a e^{\frac{i\gamma B_0}{2}t} \\ b e^{-\frac{i\gamma B_0}{2}t} \end{pmatrix}$$

Stuðlana a og b verður að ákveða frá upphafs-skilyrðum

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Gilda verður $|a|^2 + |b|^2 = 1$

Veljum því

$$a = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$b = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

og hornið α má ennvelja

$$\rightarrow \chi(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i\gamma B_0}{2}t} \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{-\frac{i\gamma B_0}{2}t} \end{pmatrix}$$

Til þess að sjá hvað er að gerast er rétt að reikna væntigildi

$$\langle S_x \rangle = \chi^{+}(t)\, S_x\, \chi(t) =$$

$$\left(\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) e^{-\frac{i\gamma B_0}{2}t},\ \sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i\gamma B_0}{2}t}\right) \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i\gamma B_0}{2}t} \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{-\frac{i\gamma B_0}{2}t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i\gamma B_0}{2}t},\ \cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) e^{-\frac{i\gamma B_0}{2}t}\right) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i\gamma B_0}{2}t} \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{-\frac{i\gamma B_0}{2}t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\, 2\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\left\{ e^{i\gamma B_0 t} + e^{-i\gamma B_0 t} \right\}$$

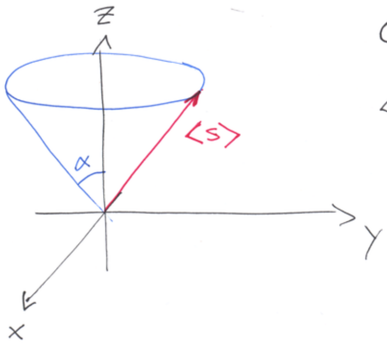
$$= \frac{\hbar}{2} \sin(\alpha) \cos(\gamma B_0 t)$$

Eins fast

$$\langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin(\alpha) \sin(\gamma B_0 t)$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos(\alpha)$$

α - er vinkel milli z-åss og kverfibungars



$\omega = \gamma B_0$ er på pålvektufreki

$\langle s \rangle$, som kverfur fegar $B \to 0$