9.3 Tveggja stiga kerfi truflað með $H' = U\delta(t)$

Gerum ráð fyrir að $U_{aa} = U_{bb} = 0$, $U_{ab} = U_{ba}^{*} \equiv \alpha$

og og bæti við $\alpha \in \mathbb{R}$

Gerum ráð fyrir að $\begin{pmatrix} C_a(-\infty) \\ C_b(-\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ upphafsskilyrði

Finna á $C_a(t)$ og $C_b(t)$, kanna að $|C_a(t)|^2 + |C_b(t)|^2 = 1$

I Fyrir bestu skrifað og hreyfijöfnuna sem

$$\boxed{i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H'_{aa} & H'_{ab}e^{-i\omega_0 t} \\ H'_{ba}e^{+i\omega_0 t} & H'_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix}}$$

eða

$$i\hbar\partial_t \bar{C}(t) = \mathbb{H}'(t)\bar{C}(t)$$

Með tímaheildun get ég komið upphafsskilyrðunum fyrir í jöfnunni sem breytist í heildisjöfnu

$$\boxed{\bar{C}(t) = \bar{C}(-\infty) + \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} ds\, \mathbb{H}'(s)\bar{C}(s)}$$

eða

$$\begin{pmatrix} C_a(t) \\ C_b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} ds \begin{pmatrix} 0 & \alpha\delta(s)e^{-i\omega_0 s} \\ \alpha\delta(s)e^{+i\omega_0 s} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_a(s) \\ C_b(s) \end{pmatrix}$$

δ-fallið verður alltaf til vandræða, hvort sem við leysum heildis eða afleiðujöfnuna. Því notum við markgildi fyrir það

③

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & \text{fyrir } -\epsilon < t < \epsilon \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Gott er að sannreyna að þessi stikun leiðir til $\delta(t)$ þ. $\epsilon \to 0$ fyrir $\int dx\, f(x)\delta_\epsilon(x)$

Lesum áðeins úr heildisjöfnunni

$$\begin{pmatrix} C_a(t) \\ C_b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{fyrir } t < -\epsilon \quad \left\{ \text{eða uppað } t=0 \right\}$$

á bilinu $-\epsilon < t < \epsilon$ verður snögg breyting

og eftir $t > \epsilon$ eru $\begin{pmatrix} C_a(t) \\ C_b(t) \end{pmatrix}$ ekki háðir t lengur

$\{ \delta_\epsilon$-fallið klippir á efri mörk heildisins við $t = \epsilon \}$

Við þurfum því að leysa

$$\begin{pmatrix} C_a(\epsilon) \\ C_b(\epsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{2\epsilon i\hbar} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} ds \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\omega_0 s} \\ e^{+i\omega_0 s} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_a(s) \\ C_b(s) \end{pmatrix}$$

Þetta eru tvær tengdar heildisjöfnur. Ef ég reyni að leysa þær þ.a. ég nálga

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} ds\, f(s)C(s) \simeq \frac{1}{2}\left\{ f(\epsilon)C(\epsilon) + f(-\epsilon)C(-\epsilon) \right\} 2\epsilon$$

þá fæst lausn fyrir $\begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix}$ sem er aðeins lægsta nálgun í α. Ég reyndi það til gamans og sá að $|C_a|^2 + |C_b|^2 = 1$, en við verðum að gera betur hér. Uppbygging heildisjöfnunnar segir okkur að $\begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix}$ er fall af α.

Notum ítrun og vonumst til ~~þess~~ að við berum kennsl á raðirnar sem fást.

Lægsta nálgun
$$\begin{pmatrix} C_a(\epsilon) \\ C_b(\epsilon) \end{pmatrix}^{(0)} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{C}^{0}(\epsilon)$$

Setjum $\bar{C}^{(0)}(\epsilon)$ inn í stað $\bar{C}(s)$ í heildinu og fáum

$$\begin{pmatrix} C_a(\epsilon) \\ C_b(\epsilon) \end{pmatrix}^{(1)} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{i\alpha}{\epsilon\hbar\omega_0} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\omega_0\epsilon) \end{pmatrix}$$

notum í stað $\bar{C}(s)$ í heildinu til að fá

$$\begin{pmatrix} C_a(\epsilon) \\ C_b(\epsilon) \end{pmatrix}^{(2)} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{i\alpha}{\epsilon\hbar\omega_0} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\omega_0\epsilon) \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{\epsilon\hbar\omega_0}\right)^2 \begin{pmatrix} \sin(2\omega_0\epsilon) \\ 0 \end{pmatrix}$$

tökum markgildið $\epsilon \to 0$ og notum

Hamiltoni er einfalt að finna með maxima

$$\lim_{\epsilon\omega_0 \to 0} \frac{\sin(\omega_0 \epsilon)}{\omega_0 \epsilon} = 1$$

$$\begin{pmatrix} C_a(0) \\ C_b(0) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{\hbar}\begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} + \left(\frac{\alpha}{\hbar}\right)^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots\cdots$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{\hbar}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\alpha}{\hbar}\right) \end{pmatrix}$$

↑ Uppbygging jöfnunnar leiðir til tveggja raða, önnur í jöfnum veldum og hin í odda veldum af $\left(\frac{\alpha}{\hbar}\right)$.

Augljóst er að $|C_a(0)|^2 + |C_b(0)|^2 = 1$

Upphaflega var kerfið í ástandi $\binom{1}{0}$ líkindi þess að finna það í $\binom{0}{1}$ eru

$$\boxed{|C_b|^2 = \sin^2\left(\frac{\alpha}{\hbar}\right)} \quad \text{fyrir } t > 0$$

þetta er nákvæm lausn án truflanareiknings

Sveiflur með styrk púls!