Hverfiþungi

Í sígildri eðlisfræði eru hverfiþungi og orka eindar varðveitt í miðlægu mætti

Hvernig er hverfiþungi í skammtafræði?

Sígild eðlisfræði

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}$$

$$L_x = y p_z - z p_y$$
$$L_y = z p_x - x p_z$$
$$L_z = x p_y - y p_x$$

Í kartískum hnitum eru skammtavirkjarnir búnir til með því að setja inn virkjana fyrir p og x

Þá sést að þættir $\bar{L}$ víxlast ekki

$$\boxed{\begin{aligned} [L_x, L_y] &= i\hbar L_z \\ [L_y, L_z] &= i\hbar L_x \\ [L_z, L_x] &= i\hbar L_y \end{aligned}}$$

eða almennt

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$$

$\epsilon_{ijk} = \pm 1$ jöfnum röðum / oddatöluröðum

$$\epsilon_{ijk} = \frac{(j-i)(k-i)(k-j)}{2}$$

Víxlin stýra eiginleikum $\bar{L}$

t.d.

$$\sigma_{L_x}^2 \cdot \sigma_{L_y}^2 \geq \left\{ \frac{1}{2i} \langle i\hbar L_z \rangle \right\}^2$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} \langle L_z \rangle^2$$

$$\rightarrow \Delta L_x \cdot \Delta L_y \geq \frac{\hbar}{2} |\langle L_z \rangle|$$

því eru ekki til ástönd sem eru eiginástönd L_x og L_y

En

$$\boxed{[L^2, L_i] = 0 \quad , \quad i = x, y, z}$$

eða

$$\boxed{[L^2, \bar{L}] = 0}$$

því má finna sameiginleg eiginástönd fyrir L^2 og L_z, eða L^2 og L_x, eða L^2 og L_y.

skoðum L^2 og L_z

leitum

$$L^2 f = \lambda f \quad \text{og} \quad L_z f = \mu f$$

til þess skilgreinum við

$$\boxed{L_{\pm} = L_x \pm i L_y}$$

③

Í ljós mun koma að

þetta eru hækkunar

og lækkunar virkjar

Athugum

$$[L_z, L_\pm] = [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y]$$

$$= i\hbar L_y \pm i(-i\hbar L_x)$$

$$= \pm\hbar(L_x \pm iL_y) = \pm\hbar L_\pm$$

Það

$$[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm$$

og auðvitað

fæst

$$[L^2, L_\pm] = 0$$

því $L_\pm$ er

samantekt L_i

með $i = x, y$

Ef f er eiginástand L^2 og L_z þá er $(L_\pm f)$ það líka

$\Updownarrow$

$$L^2(L_\pm f) = L_\pm(L^2 f)$$
$$= L_\pm(\lambda f)$$
$$= \lambda(L_\pm f)$$

$(L_\pm f)$ er eiginástand L^2 með sama eigingildi λ

$$L_z(L_\pm f) = \{L_z L_\pm - L_\pm L_z\} f + L_\pm L_z f$$
$$= [L_z, L_\pm] f + L_\pm L_z f$$
$$= \pm\hbar L_\pm f + L_\pm(\mu f)$$
$$= (\mu \pm \hbar)(L_\pm f)$$

$\to$ $(L_\pm f)$ er eiginástand L_z með eigingildið $\mu \pm \hbar$

L_+ hækkar eigingildi f úr $\mu \to \mu + \hbar$

L_- lækkar — // — $\mu \to \mu - \hbar$

$$L^2 f = \lambda f$$

$\vdots$	$\vdots$
$\mu + 2\hbar$	$L_+^2 f$
$\mu + \hbar$	$L_+ f$
μ	f
$\mu - \hbar$	$L_- f$
$\mu - 2\hbar$	$L_-^2 f$
$\uparrow$	$\uparrow$
eigingildi L_z	ástand

z-þáttur vigurs getur ekki vaxið án takmörkunar þegar honum er snúið (vigurinn hefur fasta lengd)

$\downarrow$

til er efsta ástand þ.a.

$$L_+ f_t = 0$$

og lægsta þ.a.

$$L_- f_b = 0$$

$$L_z f_t = \mu_t f_t$$

veljum $\mu_t = \hbar l$ sjáum síðar að það er gott val

$$L_z f_t = \hbar l f_t$$

$$L^2 f_t = \lambda f_t$$

$$L_\pm L_\mp = (L_x \pm i L_y)(L_x \mp i L_y)$$

$$= L_x^2 + L_y^2 \mp (L_x L_y - L_y L_x)$$

$$= L_x^2 + L_y^2 \mp i [L_x, L_y]$$

$$= L_x^2 + L_y^2 \mp i (i \hbar L_z)$$

$$= L^2 - L_z^2 \mp i(i\hbar L_z)$$

~~Seta~~

$$L^2 = L_\pm L_\mp + L_z^2 \mp \hbar L_z$$

og því

$$\underline{L^2 f_t} = (L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z) f_t$$

$$= (0 + \hbar^2 l^2 + \hbar^2 l) f_t$$

$$= \underline{\hbar^2 l(l+1) f_t}$$

$$\rightarrow \lambda = \hbar^2 l(l+1)$$

$$L_- f_b = 0$$

veljum eigingildi til $\bar{l}$:

$$L_z f_b = \hbar \bar{l} f_b$$

$$L^2 f_b = \lambda f_b$$

$$L^2 f_b = (L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z) f_b$$

$$= (0 + \hbar^2 \bar{l}^2 - \hbar^2 \bar{l}) f_b$$

$$= \hbar^2 \bar{l}(\bar{l}-1) f_b$$

$$\rightarrow \lambda = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l}-1)$$

$$\rightarrow l(l+1) = \bar{l}(\bar{l}-1)$$

með lausnir

$$\boxed{\bar{l} = -l} \quad \text{eða} \quad \bar{l} = l+1$$

Ekki ásættanlegt því þá væri lægsta eigingildið hærra en það hæsta

Eigingildi L_z eru því mtt frá $-l$ til l í N-heilum skrefum

$$l = -l + N \rightarrow 2l = N$$

eða $l = \frac{N}{2}$

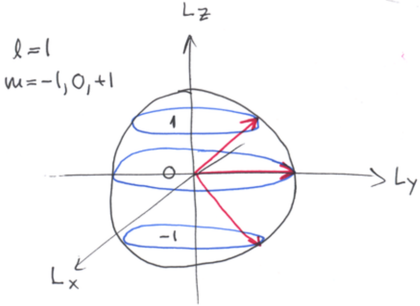
l er því heiltala eða heiltölur/2

Við höfum því

$$\boxed{L^2 f_{\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) f_{\ell m}, \qquad L_z f_{\ell m} = \hbar m f_{\ell m}}$$

Sígildur skilningur væri vigur með lengd^2 $\hbar^2 \ell(\ell+1)$ og $\hbar^2 \ell(\ell+1) > \hbar^2 \ell^2$ $\longrightarrow$ vigurinn liggur aldrei alveg í z-stefnu.

Er hægt að leggja z-ásinn eftir hvertipungunum?



Nei, þætti $\vec{L}$ er aldrei hægt að ákvarða samtímis

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$$

Eiginföll

Miðlægmætti varðveita hverfiþungann, því er eðlilegt að nota kúluhnit

notum að
$\bar{r} = r\hat{r}$

$$\bar{L} = -i\hbar\, \bar{r} \times \bar{\nabla}$$

$$\bar{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\rightarrow \bar{L} = -i\hbar\left\{ r\underbrace{(\hat{r}\times\hat{r})}_{=0}\frac{\partial}{\partial r} + \underbrace{(\hat{r}\times\hat{\theta})}_{\hat{\phi}}\frac{\partial}{\partial \theta} + \underbrace{(\hat{r}\times\hat{\phi})}_{=-\hat{\theta}}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right\}$$

$$\rightarrow \bar{L} = -i\hbar\left\{\hat{\phi}\frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right\}$$

Einingarvigrana má skrifa í Kartískum hnitum

Oft $\hat{i} = \hat{x}$, $\hat{j} = \hat{y}$, $\hat{k} = \hat{z}$

$$\hat{\theta} = (\cos\theta\cos\phi)\hat{i} + (\cos\theta\sin\phi)\hat{j} - (\sin\theta)\hat{k}$$

$$\hat{\phi} = -(\sin\phi)\hat{i} + (\cos\phi)\hat{j}$$

$$\rightarrow \bar{L} = -i\hbar\left\{(-\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j})\frac{\partial}{\partial\theta} - (\cos\theta\cos\phi\hat{i} + \cos\theta\sin\phi\hat{j} - \sin\theta\hat{k})\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}$$

og því

$$L_x = -i\hbar\left[-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

$$L_y = -i\hbar\left[+\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

og

$$\boxed{L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}}$$

$$L_\pm = L_x \pm i L_y = -i\hbar\left\{(-\sin\phi \pm i\cos\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} - (\cos\phi \pm i\sin\phi)\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}$$

eða með

$$\cos\phi \pm i\sin\phi = e^{\pm i\phi}$$

$$\rightarrow \qquad L_\pm = \pm\hbar e^{\pm i\phi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

$$L_+L_- = -\hbar^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + i\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}$$

og því

$$L^2 = -\hbar^2\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\}$$

því eru eiginföll L^2 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ með eiging. $\hbar^2 l(l+1)$

þau eru líka eiginföll L_z með eiging. $\hbar m$

Athyglisvert hér eru l og m heiltölur, en umfjöllunin áður með L_+ og L_- leyfði að l og m væru mögulega hálfar heiltölur

heiltölu lausnirnar þegar virkjarnir eru afleiddir í staðarrúminu