Óvissu lögmálið

Athugum hvað gildir fyrir tvo virkja $\hat{A}$ og $\hat{B}$.
fyrir mælistærð A gildir

$$\sigma_A^2 = \langle (\hat{A}-\langle A\rangle)\Psi \,|\, (\hat{A}-\langle A\rangle)\Psi \rangle = \langle f|f\rangle$$

ef $\quad f \equiv (\hat{A}-\langle A\rangle)\Psi$

Á sama hátt fyrir aðra mælistærð B

$$\sigma_B^2 = \langle g|g\rangle \quad \text{með} \quad g = (\hat{B}-\langle B\rangle)\Psi$$

$$|\langle f|g\rangle| \leq \sqrt{\langle f|f\rangle\langle g|g\rangle}$$

$$\rightarrow \sigma_A^2\sigma_B^2 = \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle \geq |\langle f|g\rangle|^2$$

Schwarz

Fyrir $z \in \mathbb{C}$ gildir

$$|z|^2 = \{\mathrm{Re}(z)\}^2 + \{\mathrm{Im}(z)\}^2 \geq \{\mathrm{Im}(z)\}^2 = \left\{\frac{1}{2i}(z - z^*)\right\}^2$$

ef $z = \langle f|g \rangle$

$$\hookrightarrow \sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left\{\frac{1}{2i}\left[\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle\right]\right\}^2$$

En $\langle f|g\rangle = \langle (\hat{A} - \langle A\rangle)\Psi | (\hat{B} - \langle B\rangle)\Psi \rangle$

(hermískur) $= \langle \Psi | (\hat{A} - \langle A\rangle)(\hat{B} - \langle B\rangle)\Psi \rangle$

$= \langle \Psi | (\hat{A}\hat{B} - \hat{A}\langle B\rangle - \hat{B}\langle A\rangle + \langle A\rangle\langle B\rangle)\Psi \rangle$

$= \langle \Psi | \hat{A}\hat{B}\Psi \rangle - \langle B\rangle\langle \Psi | A\Psi \rangle - \langle A\rangle\langle \Psi | B\Psi \rangle + \langle A\rangle\langle B\rangle\langle \Psi|\Psi$

$$= \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle B \rangle\langle A \rangle - \langle A \rangle\langle B \rangle + \langle A \rangle\langle B \rangle$$

$$= \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle A \rangle\langle B \rangle$$

$$[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Og eins má sýna að

$$\langle g|f \rangle = \langle \hat{B}\hat{A} \rangle - \langle A \rangle\langle B \rangle$$

$$\rightarrow \langle f|g \rangle - \langle g|f \rangle = \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle \hat{B}\hat{A} \rangle = \langle [\hat{A},\hat{B}] \rangle$$

og að lokum fæst

$$\boxed{\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left\{ \frac{1}{2i} \langle [\hat{A},\hat{B}] \rangle \right\}^2}$$

Ósamrýmanlegar mælistærðir víxlast ekki

samrýmanlegar mælistærðir deila sameiginlegum fullkomnum eiginfallagrunni

Ósamrýmanlegar mælistærðir eiga ekki sameiginlegan eiginfallagrunn

Aðeins um tíma

Í okkar framsetningu á skammtafræði eru ástönd eða bylgjuföll möguleg háð tíma $\Psi(x,t)$, en virkjar oftast (hingað til) óháðir tíma, $\hat{x}$, $\hat{p}$

skoðum meðalgildi

$$d_t\langle Q\rangle = d_t\langle\Psi|\hat{Q}\Psi\rangle = \langle\partial_t\Psi|Q\Psi\rangle + \langle\Psi|(\partial_t\hat{Q})\Psi\rangle$$
$$+ \langle\Psi|\hat{Q}\,\partial_t\Psi\rangle$$

og jafna Schrödingers gefur

$$i\hbar\,\partial_t\Psi = \hat{H}\Psi\ , \qquad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

$$\rightarrow d_t\langle Q\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\langle H\Psi|\hat{Q}\Psi\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\Psi|Q\hat{H}\Psi\rangle + \langle\partial_t\hat{Q}\rangle$$

$\hat{H}$ er hermískur $\rightarrow$ $\langle\hat{H}\Psi|\hat{Q}\Psi\rangle = \langle\Psi|\underline{\hat{H}\hat{Q}}\Psi\rangle$

$$\rightarrow \boxed{d_t\langle Q\rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle\left[\hat{H},\hat{Q}\right]\right\rangle + \langle\partial_t\hat{Q}\rangle}$$

Ef $\hat{H}$ og $\hat{Q}$ víxlast þá er $\langle Q \rangle$ hreyfifasti

(ef Q er ekki beint háð t)

og $\hat{H}$ og $\hat{Q}$ hafa sameiginleg eiginföll

Ef H er óháð t þá er hægt að skilgreina $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$

og

$$\Psi(x,t) = U(t)\Psi(x,0)$$

$$\hat{A}(t) = U^{+}(t)\,\hat{A}\,U(t)$$

þá fæst

$$d_t\hat{A}(t) = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{A}(t)\right] + \left(\partial_t A\right)$$ hreyfijafna f. virkja

$$i\hbar\partial_t\Psi(x,0) = 0$$ Schrödingerjafna

Heisenbergmynd með tímaháðum virkjum og síföstum (ástöndum), bylgjuföllum

autt

Hreyfijafna Heisenbergs (í Heisenbergmynd) minnir á hreyfijöfnuna fyrir væntigildi virkja

---

Veljum $A = H$ og $B = Q$

$$\to \quad \sigma_H^2 \sigma_Q^2 \geq \left\{ \frac{1}{2i} \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle \right\}^2 = \left\{ \frac{1}{2i} \frac{\hbar}{i} d_t \langle Q \rangle \right\}^2$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \left\{ d_t \langle Q \rangle \right\}^2$$

eða

$$\sigma_H \sigma_Q \geq \frac{\hbar}{2} \left| d_t \langle Q \rangle \right|$$

Veljum núna $\Delta E = \sigma_H$ og

$$\Delta t = \frac{\sigma_Q}{\left| \frac{d\langle Q \rangle}{dt} \right|}$$

$$\rightarrow \quad \Delta E \cdot \sigma_Q \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{\sigma_Q}{\Delta t} \right| \quad \rightarrow \quad \Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Δt er tímabilið sem þarf fyrir Q t.þ.a breytast um 1.staðal frávik σ_Q

Ef einhver breyta/meðalstærð breytist hratt

$\rightarrow$ mikil óvissa í orku ΔE

Engin tenging við víxl hér

Dirac tákn

Fyrst þegar við lærðum um vigra voru alltaf notuð einhver gefin hnitakerfi

$$\bar{A} = A_x \bar{e}_x + A_y \bar{e}_y$$

Síðar lærðum við ýmislegt um vigra án þess að nefna hnitakerfi

Gerum svipað fyrir Hilbert-rúmið okkar. Þar hugsuðum við vissa tegund falla í staðar eða skriðþunga rúminu

staður eða skriðþungi leika hér hlutverk hnitakerfis

Hugsum okkur óhlutbundið Hilbertrúm ástanda (vigra)

þ.a.

$$\Psi(x,t) = \langle x | \Psi(t) \rangle$$

$|x\rangle$ er eigin ástand $\hat{x}$ með eigingildi x

og $|\Psi\rangle$ er ástand kerfisins í Hilbertrúminu

$$\Phi(p,t) = \langle p | \Phi(t) \rangle$$

Bylgjufallið $\Psi(x,t)$ er þá liðunarstuðull ástandsins $|\Psi(t)\rangle$ í grunni staðarástanda

---

Virkjar ummynda á eitt ástand í annað

$$|\beta\rangle = \hat{Q}|\alpha\rangle$$

Ástand má liða í einhverjum full komnum grunni ástanda $\{|\phi_n\rangle\}$

$$|\alpha\rangle = \sum_n a_n |\phi_n\rangle$$

$$\rightarrow \quad a_n = \langle\phi_n|\alpha\rangle$$

Virkja má þá setja út í sama grunni (sjá ofrum)

$$\langle\phi_m|\hat{Q}|\phi_n\rangle = Q_{mn}$$

sem fylki

Athugum

$$\sum_n b_n|\phi_n\rangle = \sum_n a_n \hat{Q}|\phi_n\rangle$$

innföldum með $|\phi_m\rangle$

$$\sum_n b_n \underbrace{\langle\phi_m|\phi_n\rangle}_{\delta_{m,n}} = \sum_n a_n \langle\phi_m|\hat{Q}|\phi_n\rangle$$

$$\rightarrow \quad b_m = \sum_n Q_{mn} a_n$$

Skoðum dæmi um tvístiga kerfi

Þannig kerfi eru til (spuni) eða eru nálgun fyrir flóknara kerfi

Tvö óháð ástönd

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Almennt blandað ástand er

$$|\phi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

með $|a|^2 + |b|^2 = 1$ stöðlun

Hugsum okkur

$$H = \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix}$$

Ef kerfið er í ástandi $|1\rangle$ klukkan $t=0$

Hvert er ástandið síðar, finnið $|\phi(t)\rangle$

Vitum

$$i\hbar\partial_t|\phi(t)\rangle = H|\phi(t)\rangle$$

en notum tímaóháða jöfnuna

$$H|s\rangle = E|s\rangle$$

þurfum að finna eigingildi

og vigra H

Eigingildin eru $\boxed{E_\pm = h \pm g}$

með eiginvigra

$$|S_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

Upphafsástandið

$$|\phi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|S_+\rangle + |S_-\rangle\right\}}$$

liðun í eigin ástöndum

því fæst

$$|\phi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{e^{-i(h+g)\frac{t}{\hbar}}|S_+\rangle + e^{-i(h-g)\frac{t}{\hbar}}|S_-\rangle\right\}$$

Dirac botti við nykur-rúminu $\langle\alpha|$

þ.a. ef

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

þá er

$$\langle\alpha| = (a_1^*, a_2^*, \dots)$$

$|\alpha\rangle$ ket

$\langle\alpha|$ bra

Ofanvarp á $|\alpha\rangle$

$$\hat{P} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$$

og fullkomleiki

$$\sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| = \mathbb{1}$$

Innfalda með $\langle x|$ og $|y\rangle$

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_n \langle x|\phi_n\rangle\langle\phi_n|y\rangle = \langle x|y\rangle \\ &\sum_n \phi_n^*(x)\,\phi_n(y) = \delta(x-y)\end{aligned}}$$

Hér þarf nokkra þjálfun sem við skoðum annað slagið í haust

Við munum fara varlega með táknum Diracs og nemendur kynnast henni betur í seinni námskeiðum